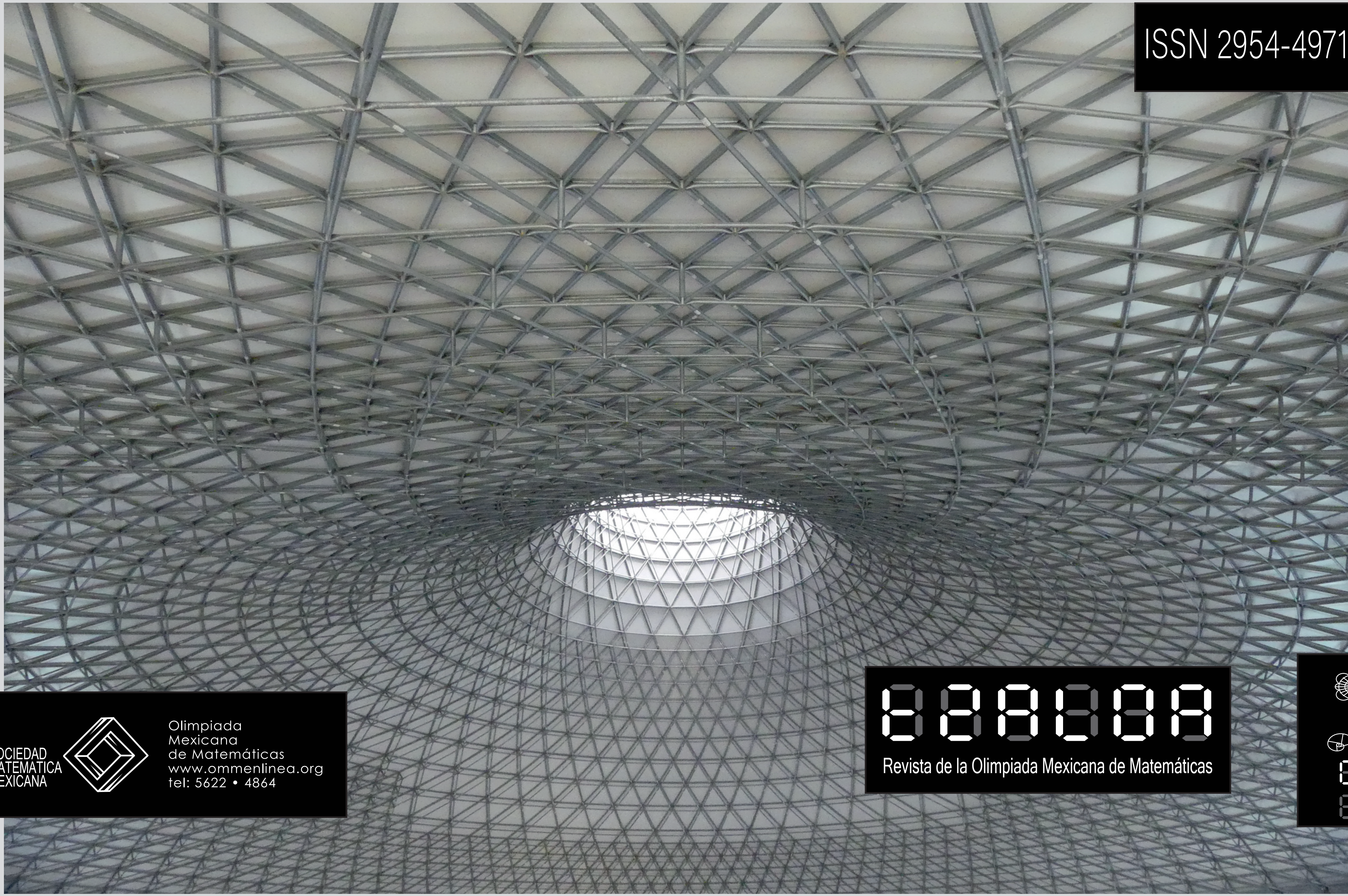


ISSN 2954-4971

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

02

16

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Información Legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS, Año 15, No. 2, mayo - julio 2023, es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México. Tel. 55-5849-6709, smm@smm.org.mx, http://www.smm.org.mx, www.ommenlinea.org. Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2023, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Mayo de 2023

Contenido

Presentación v

Artículos de matemáticas: Las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas de geometría 1

Problemas de práctica 25

Soluciones a los problemas de práctica 28

Problemas de Entrenamiento 38
- **Problemas de Entrenamiento. Año 2023 No. 2** 38
- **Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2022 No. 3** 40

Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (CdMx) 49

Concurso Metropolitano 2023 (CdMx) 52

36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Nacional 56

Problemas de Olimpiadas Internacionales 69
- **XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (Virtual)** . 69

Soluciones de Olimpiadas Internacionales 71
- **XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe** 71

Apéndice 78

Bibliografía 81

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 83

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2023, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas de geometría*, de nuestros amigos Marcilio Miranda y Jacob Rubio. En él, se muestra que la trigonometría puede ser muy útil a la hora de resolver cierto tipo de problemas de geometría, en particular, la ley de senos y la ley de cosenos son dos de dichas herramientas trigonométricas que usaremos para establecer relaciones entre los

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

lados y entre los ángulos de triángulos y cuadriláteros. Esperamos que sea del agrado de todos los lectores.

De especial interés para los más pequeños, incluimos los problemas del examen de la cuarta etapa del nivel 2 de la 7^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de la Ciudad de México, así como el examen de la primera etapa del Concurso Metropolitano 2023 de la Ciudad de México, correspondiente a la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas y al 3^{er} Concurso Nacional Femenil.

En el ámbito nacional, incluimos los problemas con soluciones del Concurso Nacional de la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) que se realizó en Oaxtepec, Morelos, en el mes de noviembre de 2022. También incluimos los nombres de los alumnos ganadores de medalla de oro, los nombres de los alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC), los nombres de las alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO), así como los 10 primeros lugares por Estados en el Concurso Nacional de la 36^a OMM.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, realizada de forma virtual a finales del mes de noviembre de 2022, organizada desde Costa Rica. También incluimos los resultados del equipo mexicano que participó en esta competencia.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2004. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2023-2024 y, para el 1° de julio de 2024, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana de noviembre de 2023. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2023 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXVI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 65^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2024) y a la XXXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2024).

De entre los concursantes nacidos en 2007 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2024).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2024.

7ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2023, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Séptima Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de quinto y sexto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto de 2023.

Nivel II. Estudiantes de primero y segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2023.

Nivel III. Estudiantes de tercer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2023.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 7^a OMMEB se realizará del 21 al 24 de septiembre de 2023, de forma virtual. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2024.

2ª Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas

En el año 2023, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Segunda Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas. En el Concurso Nacional, cada Estado podrá participar con una delegación integrada por un líder, a lo más 4 tutoras o tutores, a lo más 3 concursantes de Nivel 1 y a lo más 3 concursantes de Nivel 2.

Nivel 1. Las concursantes de este nivel deben estar inscritas a lo más en primer año de bachillerato al momento del concurso y no haber cumplido 18 años al 1 de agosto de 2022.

Nivel 2. Las concursantes de este nivel deben estar inscritas a lo más en tercer año de bachillerato al momento del concurso y no haber cumplido 20 años al 1 de agosto de 2022. Adicionalmente, no deben haber participado 2 veces anteriores en el Nivel 2 del Concurso Nacional Femenil, ni haber sido 2 veces parte del equipo mexicano en la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual en cada nivel consta de dos exámenes con 3 problemas cada uno, para resolver en dos sesiones de 4.5 horas cada una. El examen por equipos consta también de 3 problemas para resolver en un máximo de 4.5 horas. Los exámenes se llevarán a cabo en las sedes estatales de la OMM.

El Concurso Nacional de la 2^a Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas, se realizará del 8 al 15 de junio de 2023. Del 8 al 11 de junio, la sede del evento será Oaxtepec, Morelos y, del 12 al 15 de junio, la sede será la Ciudad de México.

En caso de que haya fondos suficientes, a las concursantes con los 8 mejores puntajes de la prueba individual del Nivel 1, se les integrará a los entrenamientos nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas a partir de junio de 2023. En caso de que se organice alguna olimpiada femenil en la que participe México, diferente a la EGMO, de entre las ganadoras de este Concurso Nacional se elegirá a las que conformarán la delegación, con base en su desempeño académico. El Comité Organizador de la OMM apoyará en la búsqueda de recursos para asistir a dicha(s) olimpiada(s).

Este concurso surge como un esfuerzo temporal que ayude al balance de género dentro de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) y que deje de realizarse una vez que se logre este objetivo. El desarrollo de un concurso nacional de matemáticas para chicas, puede enriquecer las olimpiadas de matemáticas de la siguiente manera:

- Fomentar la participación de chicas en concursos de matemáticas en cada Estado con el fin de tener más participación de chicas en los concursos nacionales de la OMM.
- Buscar que cada Estado haga énfasis en la participación de las chicas en sus concursos y les brinde un espacio de colaboración y confianza en el que puedan desarrollar sus habilidades matemáticas en un entorno de resolución de problemas.
- Establecer redes entre las concursantes de diferentes Estados, con el fin de que se conozcan, se apoyen e inspiren unas a otras.
- Promover que, tanto las chicas que están terminando el bachillerato como las entrenadoras, sean modelos a seguir para las más jóvenes.
- Tener una competencia nacional con un fuerte factor colaborativo.

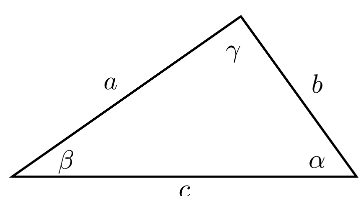
Como parte de los puntos anteriores, se incluye un componente colaborativo para este concurso, en complementariedad al componente individual habitual en el Concurso

Nacional de la OMM. Se ha observado cómo los formatos de trabajo en equipo en concursos nacionales e internacionales, propician distintas dinámicas sociales y distintos aprendizajes. Por ejemplo, proponen un balance entre el aprendizaje de las matemáticas con el fin de poder beneficiar a un colectivo y, el dominio de las matemáticas, con el fin del beneficio propio. Adoptar ambos formatos no solo visibiliza la importancia de tener los dos enfoques, sino que también brinda a las participantes herramientas sociales muy valiosas para una vida profesional futura.

Las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas de geometría

Por Marcilio Miranda de Carvalho y Carlos Jacob Rubio Barrios

Dos de las relaciones más conocidas entre los lados y los ángulos de un triángulo son, respectivamente, la ley de senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \tag{1}$$

y la ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \tag{2}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \tag{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{4}$$

El objetivo de este escrito es utilizar la ley de senos y la ley de cosenos en la resolución de problemas de geometría, donde la estrategia de solución involucra trigonometría, para calcular longitudes y ángulos, estableciendo relaciones entre los lados y entre los ángulos de triángulos y cuadriláteros.

Tradicionalmente, la ley de senos y la ley de cosenos son demostradas separadamente (ver [1]). Lo que es menos conocido es que es posible deducir una de las leyes a partir de la otra. Por ejemplo, en [6] se demuestra la ley de cosenos a partir de la ley de senos. Recíprocamente, Kirschen y Serulneck demuestran en [2] la ley de senos a partir de la ley de cosenos. A continuación reproducimos de [4] una demostración de la ley de senos a partir de la ley de cosenos, la cual es distinta y más corta de la dada en [2].

Supongamos que se satisfacen las relaciones (2), (3) y (4). Como $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{sen}\gamma$ son números positivos, basta demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}=\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{b^2}=\frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{c^2}.$$

Usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ y la relación (2), tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}=\frac{1-\cos^2\alpha}{a^2}=\frac{4b^2c^2-4b^2c^2\cos^2\alpha}{4a^2b^2c^2}=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Factorizando el numerador de la última fracción, obtenemos que

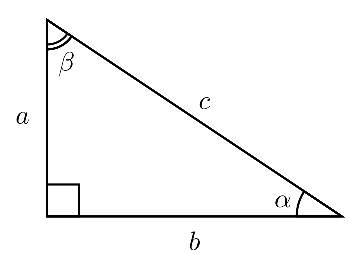
$$\begin{aligned}4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2&=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)\\&=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]\\&=[(b+c-a)(b+c+a)][(a-b+c)(a+b-c)].\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2b^2c^2}. \qquad (5)$$

La expresión (5) es simétrica en las variables a, b y c. En particular, es invariante bajo la permutación cíclica $(a,b,c)\mapsto(c,a,b)$. Por lo tanto, ambas fracciones $\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{b^2}$ y $\frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{c^2}$ son iguales a la expresión obtenida en (5) aplicando dos veces la permutación cíclica anterior.

Antes de presentar una demostración de la ley de cosenos, recordemos las definiciones de $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$, donde α es cualquier ángulo agudo. Consideremos el siguiente triángulo rectángulo donde uno de sus ángulos mide α.



Si a es la longitud del cateto opuesto al ángulo α, b es la longitud del cateto adyacente al ángulo α y c es la longitud de la hipotenusa del triángulo, entonces:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Observemos que si $\beta = 90^\circ - \alpha$ es el otro ángulo agudo del triángulo rectángulo de la figura anterior, entonces b es la longitud del cateto opuesto al ángulo β y a es la longitud del cateto adyacente al ángulo β. Luego, por las definiciones anteriores, tenemos que $\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha$ y $\cos\beta = \frac{a}{c} = \operatorname{sen}\alpha$, esto es,

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha.$$

Para el caso en que α es un ángulo obtuso, se define

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha), \quad \cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha) \quad \text{y} \quad \tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha).$$

En este caso, como $180^\circ - \alpha$ es un ángulo agudo, tenemos que

$$\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha) = -\frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

También podemos deducir la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para ángulos menores de 180°. Si α es un ángulo agudo, por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de la figura enterior, tenemos que $c^2 = a^2 + b^2$. Dividiendo por c^2 cada lado de esta igualdad, obtenemos que

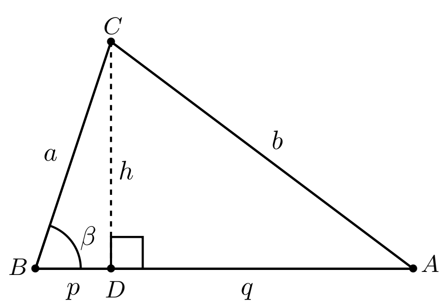
$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Si α es un ángulo obtuso, entonces $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, $180^\circ - \alpha$ es un ángulo agudo y, por lo tanto,

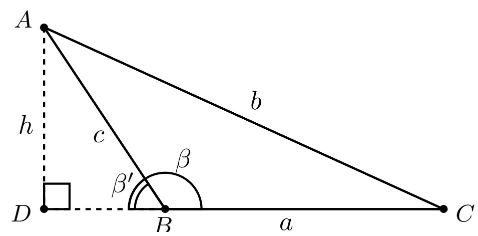
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1.$$

En la literatura hay varias demostraciones de la ley de cosenos (ver por ejemplo [6]). A continuación presentamos una demostración clásica de esta ley, demostrando la relación (3). La prueba la dividiremos en dos casos: Cuando el ángulo β es agudo y cuando el ángulo β es obtuso.

Caso 1: β es un ángulo agudo. En el triángulo ABC de lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$, tracemos la altura $CD = h$. Sean $p = BD$ y $q = AD$, de tal manera que $c = p + q$.



En el triángulo rectángulo BDC, tenemos que $\cos\beta = \frac{p}{a}$, esto es, $p = a\cos\beta$. Aplicando el teorema de Pitágoras dos veces, en los triángulos ACD y BCD, tenemos que $b^2 = h^2 + q^2 = a^2 - p^2 + (c-p)^2 = a^2 + c^2 - 2pc = a^2 + c^2 - 2ca\cos\beta$, que es lo que queríamos probar.
Caso 2: β es un ángulo obtuso. Tracemos la altura $h = AD$ sobre la prolongación de CB y sea $\beta' = \angle ABD$.



En el triángulo rectángulo ADB, tenemos que $\cos\beta' = \frac{BD}{c}$, de donde $BD = c\cos\beta'$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ADC, tenemos que

$$h^2 = b^2 - (BD + a)^2 = b^2 - (c\cos\beta' + a)^2.$$

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo ADB, tenemos que

$$h^2 = c^2 - BD^2 = c^2 - c^2\cos^2\beta' = c^2(1 - \cos^2\beta').$$

Entonces, $b^2 - (c\cos\beta' + a)^2 = c^2(1 - \cos^2\beta')$, esto es,

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta' = a^2 + c^2 + 2ac\cos(180^\circ - \beta).$$

Como $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$, concluimos que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.

Antes de comenzar con los ejemplos resueltos donde aplicaremos estas leyes, necesitaremos una serie de identidades trigonométricas que también serán de utilidad en la resolución de los ejemplos. A continuación, listamos las más comunes. En cada caso, todos los ángulos son positivos y menores de 180°.

1) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

2) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

5) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$.

6) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$.

7) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

8) $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

9) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

10) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

11) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

12) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

13) $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$.

14) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

La mayoría de estas identidades se pueden deducir fácilmente a partir de unas cuantas. Por ejemplo, para deducir la identidad 5), aplicamos las identidades 1) y 3):

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

Ahora, dividimos el numerador y el denominador por $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} &= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}\\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}$$

La identidad 6) se deduce de manera similar aplicando las identidades 2) y 4).
Las identidades de la 7) a la 10), se pueden deducir también a partir de las primeras cuatro identidades. Como ejemplo, deduciremos la identidad 7). Sean $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ y $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Entonces, $\theta+\gamma = \alpha$ y $\theta-\gamma = \beta$. Luego, usando las identidades 1) y 2), tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}(\theta+\gamma) + \operatorname{sen}(\theta-\gamma)\\ &= (\operatorname{sen}\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\cos\theta) + (\operatorname{sen}\theta\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma\cos\theta)\\ &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\gamma\\ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

La identidad 11) es consecuencia de la identidad 1), poniendo $\alpha = \beta$. La primera identidad que aparece en 12), se sigue de la identidad 3) poniendo $\alpha = \beta$. La segunda y la tercera identidades de 12) se siguen de la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha,$$
$$\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

Las identidades 13) y 14) son consecuencia de las identidades 11) y 12).

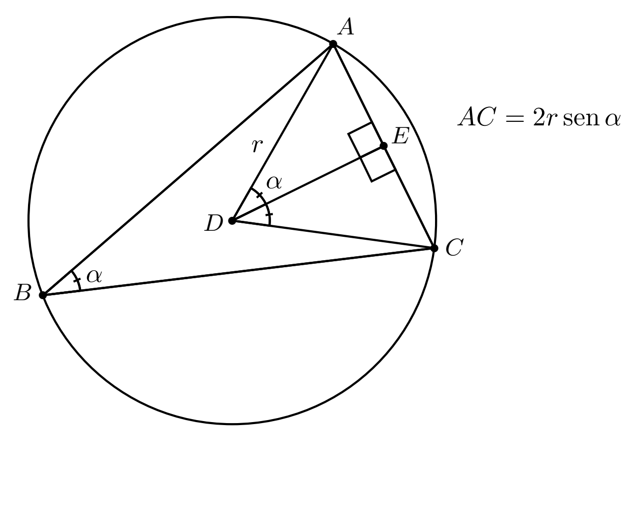
Como hemos visto, las identidades de la 1) a la 4) son la clave para justificar al resto de las identidades. Las demostraciones de las primeras cuatro identidades son más elaboradas. Sin embargo, por completez, daremos una demostración de ellas en el caso en que los ángulos α y β son agudos. El caso en que al menos uno de los ángulos α o β es obtuso, no lo trataremos aquí para no hacer más extenso el escrito.

Hay varias formas de justificar la identidad 1). La demostración que vamos a presentar utiliza la forma trigonométrica del teorema de Ptolomeo. El teorema de Ptolomeo establece que un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, esto es, puede ser inscrito en un círculo, si y solo si $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Para poder enunciar este teorema en su forma trigonométrica, demostraremos primero que *para cualquier ángulo α inscrito en una circunferencia de radio r, la longitud de la cuerda que subtiende α es igual a $2r \operatorname{sen} \alpha$.*

En efecto, consideremos un triángulo ABC con $\angle ABC = \alpha$, circuncentro D y circunradio r. Si E es el punto medio de AC, tenemos que los triángulos DEA y DEC son rectángulos en E y congruentes. Además, tenemos que $\angle ADE = \angle CDE = \alpha$. Luego, en el triángulo rectángulo DEA, tenemos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AE}{DA} = \frac{\frac{1}{2}AC}{r} = \frac{AC}{2r},$$

de donde se sigue el resultado.

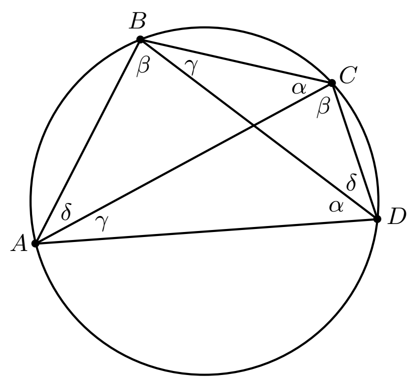


Consideremos ahora un cuadrilátero cíclico $ABCD$, esto es, $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$, $\angle ABD = \angle ACD = \beta$, $\angle CBD = \angle CAD = \gamma$ y $\angle BAC = \angle BDC = \delta$. Si r es el radio de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$, entonces aplicando el resultado que acabamos de demostrar tenemos que

$$AB = 2r \operatorname{sen} \alpha, \quad BC = 2r \operatorname{sen} \delta, \quad CD = 2r \operatorname{sen} \gamma, \quad DA = 2r \operatorname{sen} \beta.$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} BD &= 2r \operatorname{sen}(\delta + \gamma) = 2r \operatorname{sen}(\alpha + \beta), \\ AC &= 2r \operatorname{sen}(\alpha + \delta) = 2r \operatorname{sen}(\beta + \gamma). \end{aligned}$$



Ahora podemos escribir la igualdad que aparece en el teorema de Ptolomeo en forma trigonométrica: $4r^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma + 4r^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta = 4r^2 \operatorname{sen}(\beta + \gamma) \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, esto es,

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen}(\beta + \gamma) \operatorname{sen}(\alpha + \beta). \tag{6}$$

Con esto ya podemos justificar la identidad 1) de nuestra lista de identidades, en el caso en que los ángulos son agudos. En efecto, supongamos que en el cuadrilátero $ABCD$, se cumple que $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 90°$. Entonces, $\operatorname{sen}(\beta + \gamma) = 1$, $\operatorname{sen} \delta = \cos(90° - \delta) = \cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \gamma = \cos(90° - \gamma) = \cos \beta$. Sustituyendo estos valores en la relación (6), obtenemos

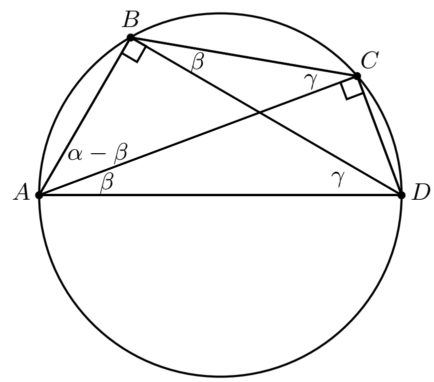
$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \beta),$$

que es la identidad 1).

Si ahora en el cuadrilátero $ABCD$, AD es un diámetro, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ y $\angle ACB = \gamma$, entonces $\angle BAC = \alpha - \beta = \angle BDC$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ y $\angle ADB = \gamma$. Si $r = \frac{AD}{2}$, tenemos que

$$AB = 2r \operatorname{sen} \gamma, \quad BC = 2r \operatorname{sen}(\alpha - \beta), \quad CD = 2r \operatorname{sen} \beta, \quad AD = 2r \operatorname{sen} 90° = 2r,$$

$$\begin{aligned} AC &= 2r \operatorname{sen}(\gamma + \alpha - \beta) = 2r \operatorname{sen}(90° - \beta) = 2r \cos \beta, \\ BD &= 2r \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$



Aplicando el teorema de Ptolomeo, obtenemos que

$$4r^2 \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta + 4r^2 \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 4r^2 \cos\beta \operatorname{sen}\alpha,$$

esto es, $\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \cos\beta \operatorname{sen}\alpha$.
Como $\gamma = \angle ADB = 90^\circ - \angle BAD = 90^\circ - \alpha$, tenemos que $\operatorname{sen}\gamma = \cos\alpha$ y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \cos\beta \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta,$$

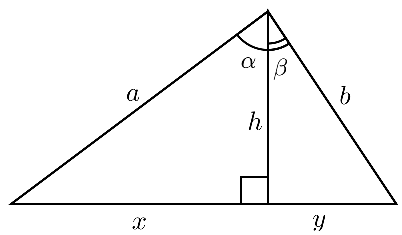
que es la identidad 2) en el caso en que $0 < \beta < \alpha < 90^\circ$.

Usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ junto con la identidad 2), podemos demostrar la identidad 4) en el caso $0 < \beta < \alpha < 90^\circ$, como sigue:

$$\begin{aligned}
&\cos^2(\alpha-\beta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = 1 - [\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha]^2\\
&= \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta - \operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha\\
&= \operatorname{sen}^2\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos^2\alpha(1-\operatorname{sen}^2\beta) + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta\\
&= \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta\\
&= (\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta)^2.
\end{aligned}$$

Como α, β y $\alpha-\beta$ son ángulos agudos, tenemos que $\cos(\alpha-\beta) > 0$, $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{sen}\beta > 0$ y $\cos\beta > 0$. Por lo tanto, tomando raíz cuadrada en la igualdad enterior, obtenemos que $\cos(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta$.

Para concluir las demostraciones de las identidades de la lista, demostraremos la identidad 3) utilizando la ley de cosenos, en el caso en que los ángulos α y β son agudos (ver ejercicio 17, capítulo 6, sección 5 de [1]). Consideremos un triángulo como el de la siguiente figura, con un ángulo igual a $\alpha+\beta$.



Aplicando la ley de cosenos en este triángulo, tenemos que

$$(x+y)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta).$$

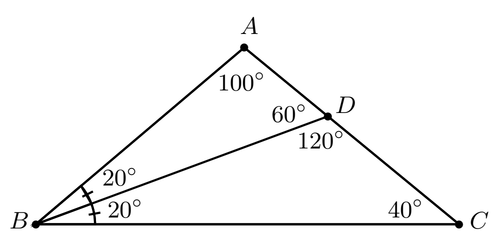
Aplicando dos veces el teorema de Pitágoras, tenemos que $h^2 = a^2 - x^2 = b^2 - y^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \frac{a^2+b^2-(x+y)^2}{2ab} = \frac{a^2-x^2+b^2-y^2-2xy}{2ab} = \frac{2h^2-2xy}{2ab}\\ &= \frac{h}{a}\cdot\frac{h}{b} - \frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b} = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Estamos listos para ver la utilidad de las leyes de senos y cosenos, así como de algunas de las identidades trigonométricas del listado anterior, en la solución de problemas de geometría que han aparecido en distintas olimpiadas de matemáticas. Cabe resaltar, que muchos de los problemas que veremos a continuación se pueden resolver usando geometría elemental, sin embargo, puede ser más difícil resolverlos sin el uso de la trigonometría.

Problema 1. (África del Sur, 2006). En un triángulo ABC, se sabe que $AB = AC$ y $\angle BAC = 100^\circ$. Sea D un punto en AC tal que $\angle ABD = \angle CBD$. Demuestra que $AD + BD = BC$.

Primera solución. Sean $AB = AC = y$. Como $AB = AC$, tenemos que $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$ y, como $\angle ABD = \angle CBD$, tenemos que $\angle ABD = \angle CBD = 20^\circ$.



Aplicando la ley de cosenos en el triángulo ABC, tenemos que

$$y^2 = y^2 + BC^2 - 2yBC\cos 40^\circ,$$

esto es, $BC^2 = 2yBC\cos 40°$. Como la longitud de BC es mayor que 0, resulta que $BC = 2y\cos 40°$.
Usando ahora la ley de senos en el triángulo ABD, obtenemos que

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{AD}{\operatorname{sen} 20°} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{BD}{\operatorname{sen} 100°},$$

lo cual implica que

$$AD = \frac{y\operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 60°} \quad \text{y} \quad BD = \frac{y\operatorname{sen} 100°}{\operatorname{sen} 60°}.$$

Por la identidad 7), concluimos que

$$\begin{aligned} AD + BD &= \frac{y\operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 60°} + \frac{y\operatorname{sen} 100°}{\operatorname{sen} 60°} = y\left(\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{100°+20°}{2}\right)\cos\left(\frac{100°-20°}{2}\right)}{\operatorname{sen} 60°}\right) \\ &= \frac{2y\operatorname{sen} 60°\cos 40°}{\operatorname{sen} 60°} = 2y\cos 40° = BC. \end{aligned}$$

Segunda solución. En la primera solución vimos que $\angle ABC = \angle ACB = 40°$ y $\angle ABD = \angle CBD = 20°$. Aplicando la ley de senos en el triángulo ABD, tenemos que

$$\frac{BD}{\operatorname{sen} 100°} = \frac{AD}{\operatorname{sen} 20°}.$$

Usando que $\operatorname{sen}(180° - x) = \operatorname{sen} x$, obtenemos que

$$\frac{BD}{\operatorname{sen} 80°} = \frac{AD}{\operatorname{sen} 20°}.$$

Luego,

$$\frac{BD}{\operatorname{sen} 80°} = \frac{BD + AD}{\operatorname{sen} 20° + \operatorname{sen} 80°}.$$

Usando las identidades 7) y 11), se sigue que

$$BD + AD = \frac{BD(\operatorname{sen} 20° + \operatorname{sen} 80°)}{\operatorname{sen} 80°} = \frac{BD(2\operatorname{sen} 50°\cos 30°)}{2\operatorname{sen} 40°\cos 40°}.$$

Como $\operatorname{sen} 50° = \cos(90° - 50°) = \cos 40°$ y $\cos 30° = \operatorname{sen}(90° - 30°) = \operatorname{sen} 60°$, resulta que

$$BD + AD = \frac{BD\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 40°}.$$

Por otro lado, aplicando ahora la ley de senos en el triángulo BCD, obtenemos que

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} 120°} = \frac{BD}{\operatorname{sen} 40°},$$

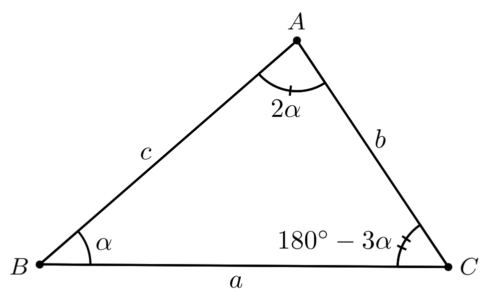
de donde se sigue que

$$BC = \frac{BD\operatorname{sen} 120°}{\operatorname{sen} 40°} = \frac{BD\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 40°},$$

pues $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 120^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ$.
Por lo tanto, $BD + AD = BC$.

Problema 2. (India, 1992). En un triángulo ABC, se sabe que $\angle BAC = 2\angle ABC$. Demuestra que $a^2 = b(b + c)$, donde $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$.

Solución. Sea $\alpha = \angle ABC$. Por hipótesis, tenemos que $\angle BAC = 2\alpha$ y, por consiguiente, $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 3\alpha$.



Aplicando la ley de senos en el triángulo ABC, obtenemos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}(180^\circ - 3\alpha)}.$$

Usando las identidades 11), 2) y 13), tenemos que

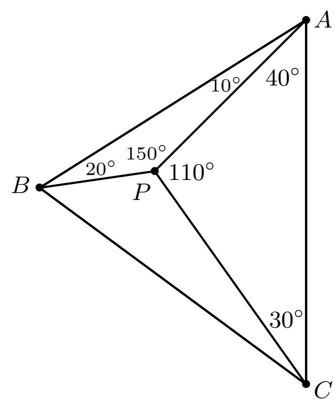
$$\frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a},$$

lo cual implica que $a = 2b\cos\alpha$ y $c = b(3 - 4\operatorname{sen}^2\alpha) = 3b - 4b\operatorname{sen}^2\alpha$.
Por lo tanto,

$$b(b + c) = b(4b - 4b\operatorname{sen}^2\alpha) = 4b^2(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) = 4b^2\cos^2\alpha = (2b\cos\alpha)^2 = a^2.$$

Problema 3. (Estados Unidos, 1996). En un triángulo ABC se marca un punto interior P tal que $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PAC = 40^\circ$ y $\angle PCA = 30^\circ$. Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

Solución. Observemos que $\angle APC = 110^\circ$ y $\angle APB = 150^\circ$.



Aplicando la ley de senos en el triángulo APC, tenemos que

$$\frac{AP}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 110^\circ}.$$

Usando que $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$ y la identidad 2), obtenemos que

$$AC = AP(2\operatorname{sen} 110^\circ) = 2AP(\operatorname{sen}(180^\circ - 110^\circ)) = 2AP(\operatorname{sen} 70^\circ).$$

Usando ahora la ley de senos en el triángulo APB, obtenemos que

$$\frac{AP}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{AB}{\operatorname{sen} 150^\circ},$$

lo cual implica que

$$AB = \frac{AP\operatorname{sen} 150^\circ}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{AP\operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ)}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{AP\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{AP}{2\operatorname{sen} 20^\circ}.$$

Usando ahora las identidades 2) y 11), obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{2AP(\operatorname{sen} 70^\circ)}{\frac{AP}{2\operatorname{sen} 20^\circ}} = 2\operatorname{sen} 20^\circ(2\operatorname{sen} 70^\circ) = 4\operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen}(90^\circ - 20^\circ)\\ &= 4\operatorname{sen} 20^\circ \cos 20^\circ = 2(2\operatorname{sen} 20^\circ \cos 20^\circ) = 2\operatorname{sen} 40^\circ.\end{aligned}$$

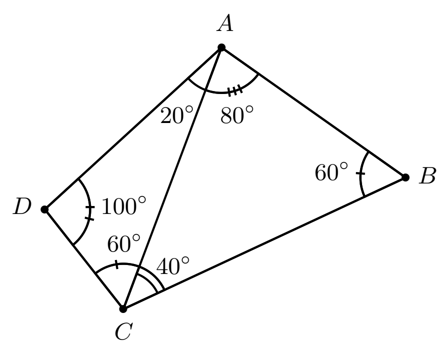
Aplicando ahora la ley de cosenos en el triángulo ABC y usando la relación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos 50^\circ\\ &= AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos(90^\circ - 40^\circ)\\ &= AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\operatorname{sen} 40^\circ\\ &= AC^2 + AB^2 - (AC)(AB)(2\operatorname{sen} 40^\circ)\\ &= AC^2 + AB^2 - (AC)(AB)\frac{AC}{AB}\\ &= AB^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $BC = AB$, lo que significa que el triángulo ABC es isósceles.

Problema 4. (Revista Eureka). En un cuadrilátero $ABCD$, los ángulos en A, C y D miden $100°$ cada uno y $\angle ACB = 40°$. Demuestra que $BC \cdot DA = (BC+AB-DA)^2$.

Solución. Tenemos que $\angle ACD = 100° - \angle ACB = 100° - 40° = 60°$, $\angle ABC = 360° - 300° = 60°$ y $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 180° - 60° - 40° = 80°$.



Aplicando la ley de senos en el triángulo ACD, tenemos que $\frac{AC}{\operatorname{sen} 100°} = \frac{DA}{\operatorname{sen} 60°}$, esto es, $\frac{AC}{DA} = \frac{\operatorname{sen} 100°}{\operatorname{sen} 60°}$. Aplicando ahora la ley de senos en el triángulo ACB, tenemos que $\frac{BC}{\operatorname{sen} 80°} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 60°}$, esto es, $\frac{BC}{AC} = \frac{\operatorname{sen} 80°}{\operatorname{sen} 60°}$.
Como $\operatorname{sen} 100° = \operatorname{sen}(180° - 100°) = \operatorname{sen} 80°$, obtenemos que $\frac{AC}{DA} = \frac{BC}{AC}$, de donde se sigue que $AC^2 = BC \cdot DA$. Luego, basta demostrar que $AC = BC + AB - DA$ o, de manera equivalente, $AC + DA = BC + AB$.
Observemos que

$$AC + DA = AC + \frac{AC \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 100°} = \frac{AC(\operatorname{sen} 100° + \operatorname{sen} 60°)}{\operatorname{sen} 100°}.$$

Usando la identidad 7) y la relación $\operatorname{sen} 100° = \operatorname{sen} 80°$, obtenemos que

$$AC + DA = \frac{AC(2 \operatorname{sen} 80° \cos 20°)}{\operatorname{sen} 100°} = \frac{2AC \operatorname{sen} 80° \cos 20°}{\operatorname{sen} 80°} = 2AC \cos 20°.$$

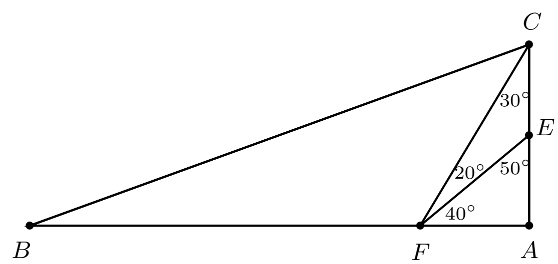
De manera análoga, obtenemos que

$$\begin{aligned} BC + AB &= \frac{AC \operatorname{sen} 80°}{\operatorname{sen} 60°} + \frac{AC \operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{AC(\operatorname{sen} 80° + \operatorname{sen} 40°)}{\operatorname{sen} 60°} \\ &= \frac{AC(2 \operatorname{sen} 60° \cos 20°)}{\operatorname{sen} 60°} = 2AC \cos 20°. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $AC + DA = 2AC \cos 20° = BC + AB$, como queríamos.

Problema 5. (Canadá, 1998). En un triángulo ABC, se tiene que $\angle BAC = 90°$ y $\angle BCA = 70°$. Sea F un punto en el segmento AB tal que $\angle ACF = 30°$ y, sea E un punto en el segmento AC, tal que $\angle CFE = 20°$. Demuestra que BE es la bisectriz del ángulo $\angle ABC$.

Primera solución. En el triángulo rectángulo BAC, tenemos que $\angle BCA = 70°$. Entonces, $\operatorname{sen} 70° = \frac{AB}{BC}$. En el triángulo EFC, tenemos que $\angle FEC = \angle 180° - 20° - 30° = 130°$ y, por consiguiente, $\angle FEA = 180° - 130° = 50°$ y $\angle AFE = 90° - 50° = 40°$. Luego, en el triángulo rectángulo FAE, tenemos que $\operatorname{sen} 40° = \frac{AE}{EF}$.



Aplicando ahora la ley de senos en el triángulo ECF, tenemos que

$$\frac{EF}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{EC}{\operatorname{sen} 20°}.$$

Entonces,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{EF}{EC} \cdot \frac{AE}{EF} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} 20°}(\operatorname{sen} 40°).$$

Finalmente, usando la identidad 11) y que $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, se sigue que

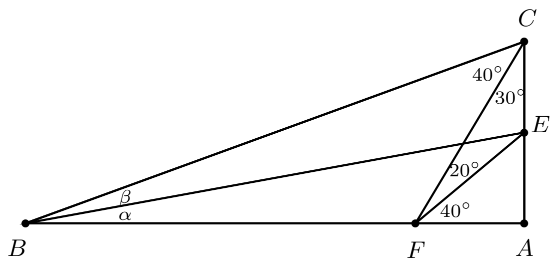
$$\frac{AE}{EC} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} 20°}(2 \operatorname{sen} 20° \cos 20°) = \cos 20° = \operatorname{sen} 70° = \frac{AB}{BC}.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de la bisectriz, concluimos que BE es la bisectriz del ángulo $\angle ABC$.

Segunda solución. Sean $\alpha = \angle ABE$ y $\beta = \angle CBE$. Como en la primera solución, tenemos que $\angle AFE = 40°$. Entonces, en los triángulos rectángulos EAB y EAF, tenemos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AE}{BE}, \tag{7}$$

$$\operatorname{sen} 40° = \frac{AE}{FE}. \tag{8}$$



Aplicando la ley de senos en los triángulos BCE y ECF, tenemos que

$$\frac{BE}{CE} = \frac{\operatorname{sen} 70^\circ}{\operatorname{sen} \beta}, \tag{9}$$

$$\frac{EF}{CE} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{1/2}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} 20^\circ}. \tag{10}$$

De las relaciones (7) y (9), obtenemos que

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AE}{BE} \cdot \frac{BE}{CE} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 70^\circ}{\operatorname{sen} \beta}. \tag{11}$$

Usando ahora las relaciones (8) y (10), obtenemos que

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AE}{EF} \cdot \frac{EF}{CE} = \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{2 \operatorname{sen} 20^\circ \cos 20^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} = \cos 20^\circ = \operatorname{sen} 70^\circ. \tag{12}$$

Por último, de (11) y (12), se sigue que

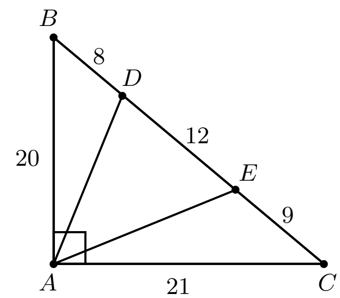
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 70^\circ}{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{sen} 70^\circ$$

y, por consiguiente, $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$. Por lo tanto, $\alpha = \beta$, lo que significa que BE es bisectriz del ángulo $\angle ABC$.

Problema 6. (Irlanda, 2002). En un triángulo ABC se tiene que $AB = 20$, $AC = 21$ y $BC = 29$. Sean D y E puntos en el segmento BC tales que $BD = 8$ y $EC = 9$. Determina la medida del ángulo $\angle DAE$.

Solución. Observemos que el triángulo ABC es rectángulo en A, ya que

$$BC^2 = 29^2 = 20^2 + 21^2 = AB^2 + AC^2.$$



Entonces, tenemos que $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{20}{29}$ y $\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{21}{29}$. Aplicando la ley de cosenos en los triángulos ABD y ACE, tenemos que

$$AD^2 = 20^2 + 8^2 - 2(20)(8)\cos B = 20^2 + 8^2 - 2(20)(8)\left(\frac{20}{29}\right) = \frac{7056}{29},$$
$$AE^2 = 21^2 + 9^2 - 2(21)(9)\cos C = 21^2 + 9^2 - 2(21)(9)\left(\frac{21}{29}\right) = \frac{7200}{29}.$$

Como $DE = BC - BD - EC = 29 - 8 - 9 = 12$, aplicando ahora la ley de cosenos en el triángulo ADE y usando los valores obtenidos para AD^2 y AE^2, obtenemos que

$$12^2 = \frac{7056}{29} + \frac{7200}{29} - 2\sqrt{\frac{7056}{29} \cdot \frac{7200}{29}}\cos\angle DAE,$$

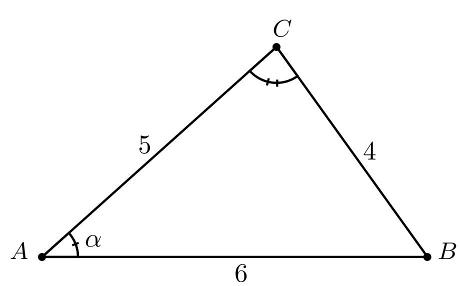
de donde se sigue que $\cos\angle DAE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto, $\angle DAE = 45°$.

Problema 7. (Revista Eureka). En un triángulo ABC se tiene que $AB = 6$, $AC = 5$ y $BC = 4$. Demuestra que $\angle ACB = 2\angle CAB$.

Solución. Observemos primero que el triángulo ABC es acutángulo, ya que

$$AB^2 = 6^2 < 4^2 + 5^2 = BC^2 + AC^2.$$

Entonces, $\angle CAB < 90°$ y, por lo tanto, $2\angle CAB < 180°$. Sea $\angle CAB = \alpha$.



Aplicando la ley de cosenos en el triángulo ABC, tenemos que

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos\alpha,$$

esto es, $\cos\alpha = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.
Aplicando nuevamente la ley de cosenos en el triángulo ABC, tenemos que

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4)\cos\angle ACB,$$

esto es, $\cos\angle ACB = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$.
Aplicando ahora la identidad 12), $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, obtenemos que

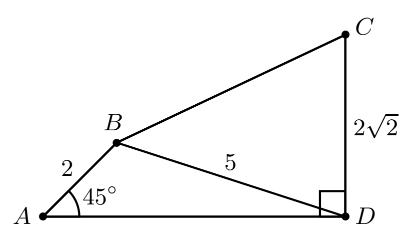
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = 2\cdot\frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}.$$

Por lo tanto, $\cos\angle ACB = \cos 2\alpha$ y, como ambos ángulos $\angle ACB$ y 2α miden menos de $180°$, concluimos que son iguales, esto es, $\angle ACB = 2\angle CAB$.

Problema 8. En un cuadrilátero $ABCD$, $\angle ADC = 90°$, $\angle BAD = 45°$, $AB = 2$ y $BD = 5$.
a) Determina el valor de $\cos\angle ADB$.
b) Si $DC = 2\sqrt{2}$, determina la longitud de BC.

Solución. a) Aplicando la ley de senos en el triángulo ABD, tenemos que

$$\frac{5}{\operatorname{sen}\angle BAD} = \frac{2}{\operatorname{sen}\angle ADB}.$$



Como $\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos que $\operatorname{sen}\angle BAD = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sustituyendo este valor en la igualdad anterior, obtenemos que $\operatorname{sen}\angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Usando ahora la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtenemos que

$$\cos^2\angle ADB = 1 - \operatorname{sen}^2\angle ADB = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}.$$

Como $\angle ADB$ es agudo, su coseno es positivo y, por lo tanto, $\cos\angle ADB = \frac{\sqrt{23}}{5}$.

b) Como $90^\circ = \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$ y $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$, aplicando la identidad 1) y sustituyendo los valores obtenidos en el inciso anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}(\angle ADB + \angle BDC) \\ &= \operatorname{sen}\angle ADB \cos\angle BDC + \cos\angle ADB \operatorname{sen}\angle BDC \\ &= \frac{\sqrt{2}}{5}\cos\angle BDC + \frac{\sqrt{23}}{5}\operatorname{sen}\angle BDC. \end{aligned} \tag{13}$$

Por otro lado, si hacemos $x = \cos\angle BDC$, tenemos que $\operatorname{sen}^2\angle BDC = 1 - x^2$. Como $\angle BDC$ es agudo, tenemos que $\operatorname{sen}\angle BDC > 0$ y, por consiguiente, $\operatorname{sen}\angle BDC$ es la raíz cuadrada positiva de $1 - x^2$, esto es, $\operatorname{sen}\angle BDC = \sqrt{1 - x^2}$. Sustituyendo esta igualdad en la relación (13), obtenemos que

$$\frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{\sqrt{23}}{5}\sqrt{1 - x^2} = 1.$$

Resolviendo esta última ecuación, encontramos que la única solución es $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Finalmente, aplicando la ley de cosenos en el triángulo BCD, obtenemos que

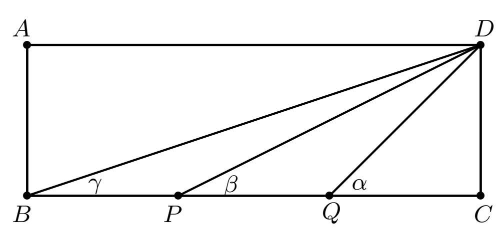
$$BC^2 = 5^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(5)(2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{5} = 25,$$

de donde se sigue que $BC = 5$.

Problema 9. (Canadá, 1970). Sea $ABCD$ un rectángulo con $BC = 3AB$. Sean P y Q puntos en BC, tales que $BP = PQ = QC$. Prueba que $\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$.

Solución. Sean $\alpha = \angle DQC$, $\beta = \angle DPC$ y $\gamma = \angle DBC$. Como $BC = BP + PQ + QC = 3BP$ y $BC = 3AB$, tenemos que $AB = BP = PQ = QC$. Entonces,

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{CD}{QC} = \frac{AB}{QC} = 1, \\ \tan\beta &= \frac{CD}{PC} = \frac{AB}{PQ + QC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2}, \\ \tan\gamma &= \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{3AB} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



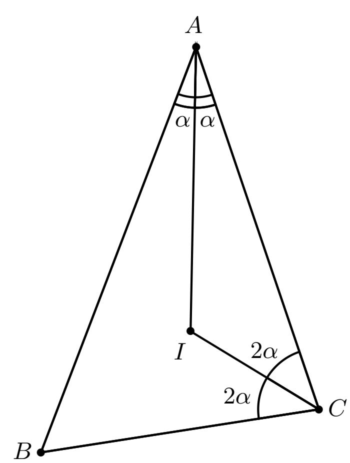
Aplicando la identidad 5), obtenemos que

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

Por lo tanto, $\tan\alpha = \tan(\beta+\gamma)$ y, como $\alpha < 90°$ y $\beta+\gamma < 180°$, concluimos que $\beta+\gamma = \alpha$.

Problema 10. (Olimpiada Brasileira, 2010). Las bisectrices internas de los ángulos internos de un triángulo ABC, se cortan en el punto I. Si $AI = BC$ y $\angle ICA = 2\angle IAC$, determina la medida del ángulo $\angle ABC$.

Solución. Sea $\alpha = \angle IAC$. Como AI es bisectriz del ángulo en A, tenemos que $\angle IAB = \alpha$. Como CI es bisectriz del ángulo en C y $\angle ICA = 2\angle IAC$, tenemos que $\angle BCI = 2\alpha$.



Aplicando la ley de senos en los triángulos ACI y ABC, obtenemos que

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}(180° - \alpha - 2\alpha)} = \frac{AI}{\operatorname{sen} 2\alpha},$$
$$\frac{AC}{\operatorname{sen}(180° - 2\alpha - 4\alpha)} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 2\alpha},$$

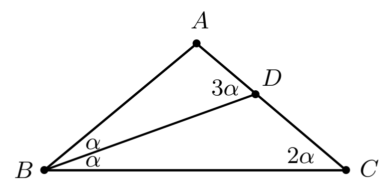
respectivamente. Usando que $\operatorname{sen}(180° - x) = \operatorname{sen} x$, podemos reescribir las dos igualdades anteriores de manera equivalente como sigue

$$\frac{AC}{AI} = \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{\operatorname{sen} 6\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Como $AI = BC$, de lo anterior obtenemos que $\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen} 6\alpha$ y, como $0 < 3\alpha < 6\alpha < 180°$, se sigue que $3\alpha + 6\alpha = 180°$. Por lo tanto, $\alpha = 20°$, lo cual implica que $\angle ABC = 180° - 6\alpha = 60°$.

Problema 11. (Canadá, 1996). Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. La bisectriz del ángulo $\angle ABC$ corta al lado AC en D y $BC = AD + BD$. Determina la medida del ángulo $\angle BAC$.

Solución. Sea $\alpha = \angle CBD$. Es fácil ver que $\angle ABD = \alpha$, $\angle BCD = \angle ABC = 2\alpha$, $\angle BDC = 180° - 3\alpha$, $\angle BDA = 3\alpha$ y $\angle BAC = 180° - 4\alpha$.



Aplicando la ley de senos en los triángulos ABD y BCD, tenemos que

$$\frac{AD}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{BD}{\operatorname{sen}(180° - 4\alpha)} = \frac{BD}{\operatorname{sen}4\alpha},$$
$$\frac{BD}{\operatorname{sen}2\alpha} = \frac{BC}{\operatorname{sen}(180° - 3\alpha)} = \frac{BC}{\operatorname{sen}3\alpha},$$

respectivamente, de donde obtenemos que

$$AD = \frac{BD\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}4\alpha}, \quad BC = \frac{BD\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}.$$

Sustituyendo en la condición $BC = AD + BD$, tenemos que

$$\frac{BD\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} = \frac{BD\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}4\alpha} + BD,$$

esto es,

$$\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}4\alpha} + 1.$$

Multiplicando y dividiendo por $2\cos 2\alpha$, obtenemos que

$$\frac{2\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}4\alpha}{\operatorname{sen}4\alpha}.$$

Aplicando la identidad 7), tenemos que $2\cos 2\alpha\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}5\alpha + \operatorname{sen}\alpha$ y, por la identidad 11), tenemos que $2\cos 2\alpha\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}4\alpha$. Entonces,

$$\frac{\operatorname{sen}5\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}4\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}4\alpha}{\operatorname{sen}4\alpha},$$

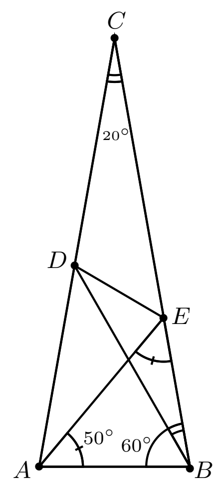
lo cual implica que $\operatorname{sen}5\alpha = \operatorname{sen}4\alpha$.
Por otro lado, en el triángulo ABC tenemos que $4\alpha < 180°$. Además, como $\angle DCB = 2\alpha > \alpha = \angle DBC$, tenemos que $BD > DC$, por lo que

$$BC = AD + BD > AD + DC = AC.$$

Luego, $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha > 2\alpha = \angle ABC$, lo cual implica que $6\alpha < 180^\circ$, esto es, $\alpha < 30^\circ$ y, por consiguiente, $5\alpha < 150^\circ < 180^\circ$.
Por lo tanto, tenemos que $\operatorname{sen} 5\alpha = \operatorname{sen} 4\alpha$, $0 < 5\alpha < 180^\circ$ y $0 < 4\alpha < 180^\circ$, lo cual implica que $5\alpha + 4\alpha = 180^\circ$, esto es, $\alpha = 20^\circ$ y, de aquí, $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha = 100^\circ$.

Problema 12. (Triángulo Russo). Sea ABC un triángulo isósceles, con $AC = BC$ y $\angle ACB = 20^\circ$. Sean D y E puntos en los lados AC y BC, respectivamente, tales que $\angle ABD = 60^\circ$ y $\angle EAB = 50^\circ$. Determina la medida del ángulo $\angle BDE$.

Solución. Como $AC = BC$ y $\angle ACB = 20^\circ$, tenemos que $\angle CAB = 80^\circ = \angle CBA$, lo cual implica que $\angle EBD = 20^\circ$, $\angle EAC = 30^\circ$, $\angle BEA = 50^\circ$ y $\angle ADB = 40^\circ$. Luego, $AB = EB$.



Aplicando la ley de senos en el triángulo AEC, tenemos que

$$\frac{AC}{\operatorname{sen} 130^\circ} = \frac{CE}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{CE}{1/2},$$

esto es,

$$\frac{AC}{CE} = 2 \operatorname{sen} 130^\circ = 2 \operatorname{sen} 50^\circ = 2 \cos 40^\circ, \tag{14}$$

pues $\operatorname{sen} 130^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 130^\circ) = \operatorname{sen} 50^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) = \cos 40^\circ$.
Aplicando ahora la ley de senos en el triángulo ABD, tenemos que

$$\frac{BD}{\operatorname{sen} 80^\circ} = \frac{AB}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{EB}{\operatorname{sen} 40^\circ}.$$

Usando la identidad 11) se sigue que

$$\frac{BD}{EB} = \frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{2 \operatorname{sen} 40^\circ \cos 40^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} = 2 \cos 40^\circ. \tag{15}$$

De (14) y (15), obtenemos que
$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{EB}$$
y, por consiguiente, los triángulos AEC y DEB son semejantes. Luego, concluimos que $\angle BDE=\angle EAC=30^\circ$.

Finalizamos este escrito con una lista de ejercicios para practicar.

Ejercicios

1) (Filipinas, 2008) En un cuadrilátero $ABCD$, se sabe que $AB=BC=4$, $\angle ABC=100^\circ$ y $\angle CDA=130^\circ$. Determina la medida de BD.

2) (Uruguay, 2000) Sea ABC un triángulo y sea D un punto en BC. Sean R_1 y R_2 los circunradios de los triángulos ADC y ABD, respectivamente. Demuestra que $\frac{AC}{AB}=\frac{R_1}{R_2}$.

3) (Argentina, 1997) Sea ABC un triángulo con $\angle BAC>90^\circ$ y sea M el punto medio de BC. Si $\angle BAM=90^\circ$, $AB=35$ y $AC=77$, determina la medida de BC.

4) (Yugoslavia, 2000) Sean a, b y c los lados de un triángulo con ángulos opuestos $\angle A=40^\circ$, $\angle B=60^\circ$ y $\angle C=80^\circ$, respectivamente.
Demuestra que $a(a+b+c)=b(b+c)$.

5) (Croacia, 2001) En un triángulo ABC, con $AC\neq BC$, M es el punto medio de AB, $\angle CAB=\alpha$, $\angle CBA=\beta$, $\angle ACM=\gamma$ y $\angle BCM=\delta$. Demuestra que
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\gamma-\delta)}.$$

6) (Rumania, 2001) Sea ABC un triángulo rectángulo en A y sea D un punto en AC tal que BD es bisectriz del ángulo en B. Demuestra que $BC-BD=2AB$ si y solo si $\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}=\frac{1}{2AB}$.

7) (Croacia, 1999) En un triángulo ABC, las bisectrices interna y externa del ángulo en C, cortan a AB en L y en M, respectivamente. Si $CL=CM$, demuestra que $AB^2+BC^2=4R^2$, donde R es el circunradio del triángulo ABC.

8) (Croacia, 1998) Sean a, b y c los lados de un triángulo. Demuestra que
$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos C+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos B+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\cos A=3.$$

9) Sea ABC un triángulo tal que $\angle ABC=\angle ACB=80^\circ$. Sea P un punto en AB tal que $\angle BPC=30^\circ$. Demuestra que $AP=BC$.

10) (Croacia, 2003) Sea ABC un triángulo de lados a, b y c. Demuestra que si $\angle BAC=3\angle CBA$, entonces $(a^2-b^2)(a-b)=bc^2$.

11) (Argentina, 1995) En un triángulo ABC las medianas relativas a los lados AB y AC son perpendiculares. Si $AC = 15$ y $AB = 10$, determina la medida de BC.

12) En un triángulo ABC donde $AC = b$, $BC = a$ y $AB = c$, tenemos que $\angle B = 18^\circ$ y $\angle A = 36^\circ$. Demuestra que $a - b = R$, donde R es el circunradio del triángulo ABC.

13) En un triángulo ABC donde $AC = b$, $BC = a$ y $AB = c$, tenemos que $\angle B = 18^\circ$ y $\angle A = 54^\circ$. Demuestra que $ab = R^2$, donde R es el circunradio del triángulo ABC.

14) Sean a, b y c lados opuestos a los ángulos en A, B y C, respectivamente, de un triángulo ABC. Demuestra que si $ab^2 \cos A = bc^2 \cos B = ca^2 \cos C$, entonces el triángulo ABC es equilátero.

15) (Bielorrusia, 1995) En un triángulo ABC sea K el punto medio del lado AB y sea L un punto en AC tal que $AL = LC + BC$. Demuestra que $\angle KLB = 90^\circ$ si y solo si $AC = 3BC$.

16) (Polonia, 1999) Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $\angle ACB = 2\angle ABC$. Sea D un punto en BC tal que $2\angle ABD = \angle ABC$. Demuestra que

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

17) (Argentina, 2000) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ y $\angle BAD = 60^\circ$. Si $AB = 7$ y $AD = 8$, determina las medidas de BC y CD.

18) (Brasil, 2005) Sea D un punto en el lado BC de un triángulo ABC. Si $AB = AD = 2$, $BD = 1$ y los triángulos BAD y CAD son congruentes, determina la medida del segmento CD.

19) (Brasil, 2014) Una circunferencia es tangente a los lados de un cuadrilátero $ABCD$. Los puntos de tangencia son: R en AB, S en BC, T en CD y U en DA. Si $AU = 1$, $DU = 2$, $BS = 2$ y $CS = 4$, determina la medida de SU.

20) (Brasil, 2011) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB = 4$, $BC = 8\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{13}$ y $AD = 2\sqrt{13}$. Si E es la intersección de las diagonales AC y BD, determina la longitud de BE.

21) (Vietnam, 1981) Demuestra que un triángulo ABC es rectángulo si y solo si

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \cos A + \cos B + \cos C + 1.$$

22) Los lados de un triángulo ABC satisfacen la relación $BC = AC + \frac{1}{2}AB$. Un punto P divide al lado AB en la razón $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{3}$. Demuestra que $\angle CAP = 2\angle CPA$.

23) (Bélgica, 1996) En un triángulo ABC de lados $BC = a$, $AC = b$ y $AB = c$, se cumple que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Determina la medida del ángulo en B.

24) (Bulgaria, 1999) Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Si $\angle CAB = 45^\circ$ y $\angle ABC = 30^\circ$, determina la medida del ángulo $\angle AMC$ y demuestra que $AM = \frac{AB \cdot BC}{2AC}$.

25) (Ucrania, 2005) Sea AD una mediana de un triángulo ABC. Si $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$, determina la medida del ángulo $\angle BAD$.

26) (Alemania, 1997) En un cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene que $\angle CBD = 10^\circ$, $\angle CAD = 20^\circ$, $\angle ABD = 40^\circ$ y $\angle BAC = 50^\circ$. Determina las medidas de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle ADC$.

27) (China, 1999) En un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C, sean E y F puntos en AB tales que $AE = AC$ y $BF = BC$. Determina la medida del ángulo $\angle ECF$.

Bibliografía

1) I. M. Gelfand, M. Saul. *Trigonometry*. Springer, Birkhäuser, Boston. 2001.

2) L. S. Kirschen, J. A. Serulneck. The law of sines from the law of cosines. *The Mathematics Teacher*, NCTM 88 no. 1 (January 1995) 76.

3) M. Miranda. *Problemas Seleccionados de Matemática ITA-IME-Olimpiadas*. Volume 1, Fortaleza (CE), Editora Vestseller, 2010.

4) P. Nystedt. A Proof of the Law of Sines Using the Law of Cosines. *Mathematics Magazine*, Vol. 90, No. 3, June 1997.

5) Revista Eureka, Olimpiada Brasileira de Matemática. Río de Janeiro, SBM.

6) Wikipedia contributors. Law of cosines. *Wikipedia. The Free Encyclopedia*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_cosines`.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2023. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Sean p y q enteros positivos tales que p, q, $p+q$ y $p-q$ son números primos. Determina el valor de la suma de los números p, q, $p+q$ y $p-q$.

Problema 2. Sean a, b, c, x, y números reales positivos tales que

$$ax + by \leq bx + cy \leq cx + ay.$$

Demuestra que $b \leq c$.

Problema 3. Sobre el lado AB del triángulo equilátero ABC se eligen dos puntos M y N tales que $AM = MN = NB$. El punto P está sobre AC de forma que $CP = AM$. Determina la medida de $\angle PMC + \angle PNC$.

Problema 4. Sean a y b números enteros tales que $a > b > 0$. Si $ab - 1$ y $a + b$ son primos relativos, así como $ab+1$ y $a-b$, demuestra que $(ab+1)^2 + (a-b)^2$ no puede ser un cuadrado perfecto.

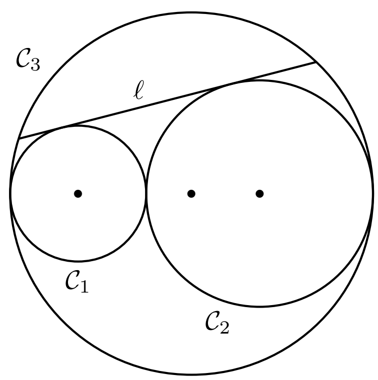
Problema 5. Sofía tiene una máquina con botones $B_1, B_2, B_3, \ldots$ y una pantalla que muestra un número. Dependiendo del número que se muestre en la pantalla, cada botón, al ser presionado, reemplaza el número en la pantalla por otro número. Jugando con la máquina, Sofía descubre que al repetir dos veces cualquier secuencia de botones, se muestra el número con el que inició. Por ejemplo, cuando la pantalla muestra el número 2023, al presionar la secuencia de botones $B_3B_{17}B_{501}B_{32}B_3B_{17}B_{501}B_{32}$, la máquina muestra nuevamente el número 2023. Demuestra que si en dos secuencias se presionan los mismos botones la misma cantidad de veces, el resultado es el mismo.

Problema 6. Si $x = 2 + \sqrt{5}$, determina el valor de $\dfrac{x(x^6 - 1)}{x^8 + 1}$.

Problema 7. Sean $a < b < c$ enteros consecutivos, con b impar. Demuestra que $c^c - a^a$ es divisible por b.

Problema 8. Victoria pinta de negro las seis caras de un cubo de madera. Luego, corta el cubo en 1000 cubitos más pequeños, todos de iguales dimensiones, algunos de los cuales tienen algunas caras negras. Victoria lanza los 1000 cubitos al suelo y se da cuenta de que ninguno cayó con una cara negra hacia arriba. Si la probabilidad de que esto suceda se expresa de la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, determina el valor de $a + b + c$.

Problema 9. Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes externamente y ambas son tangentes internamente a una circunferencia $\mathcal{C}_3$ de forma que sus centros son colineales. Una cuerda ℓ de $\mathcal{C}_3$ es tangente externa de $\mathcal{C}_1$ y de $\mathcal{C}_2$. Si el radio de $\mathcal{C}_1$ es 4 y el radio de $\mathcal{C}_2$ es 10, determina la longitud de la cuerda ℓ.



Problema 10. Determina el menor entero positivo n tal que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ sea múltiplo de 200.

Problema 11. En una circunferencia, se pintan 432 puntos que dividen a la circunferencia en 432 partes iguales. De estos puntos, 108 son rojos, 108 son verdes, 108 son azules y 108 son amarillos. Demuestra que es posible escoger tres puntos de cada color de tal forma que los cuatro triángulos formados por vértices del mismo color sean congruentes.

Problema 12. Sean a, b y c números reales distintos. Supongamos que las ecuaciones $x^2 + ax + 1 = 0$ y $x^2 + bx + c = 0$ tienen exactamente una raíz real en común y que las ecuaciones $x^2 + x + a = 0$ y $x^2 + cx + b = 0$ tienen exactamente una raíz real en común. Determina todos los valores posibles de $a + b + c$.

Problema 13. Determina el mayor entero positivo N con la siguiente propiedad: existen enteros $x_1, \ldots, x_N$ tales que $x_i^2 - x_i x_j$ no es divisible por 1111 para todo $i \neq j$.

Problema 14. En una recta hay 50 segmentos dibujados. Demuestra que entre estos segmentos hay 8 que cumplen que son ajenos dos a dos, o los 8 tienen al menos un punto en común.

Problema 15. Encuentra todas las parejas (m, n) de enteros positivos tales que el número

$$9^{|m-n|} + 3^{|m-n|} + 1$$

sea divisible por m y n simultáneamente.

Problema 16. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ que satisfacen

$$(f(f(y) - x))^2 + f(x)^2 + f(y)^2 = f(y)\,(1 + 2f(f(y)))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 17. Los números enteros del 1 al 2023 están escritos en un pizarrón. Cada minuto dos números se eligen, se borran y, se escribe en su lugar, la diferencia no negativa en el pizarrón. Al final queda un solo número escrito en el pizarrón. Determina todos los valores que ese número puede tomar.

Problema 18. Sea N el número de formas de colocar los enteros del 1 al 12 en las doce casillas de un tablero de 2×6, de forma que para cualesquiera dos casillas que comparten un lado, la diferencia de sus números escritos no es divisible por 3. Determina el número de divisores positivos de N.

Problema 19. Determina si existe una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ de números enteros positivos que satisface las siguientes condiciones:

- $a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{s-1} + a_s$ no es primo para cada $1 \leq r \leq s \leq 2024$,
- $\text{mcd}(a_i, a_{i+1}) = 1$ para cada $1 \leq i \leq 2023$,
- $\text{mcd}(a_i, a_{i+2}) = 1$ para cada $1 \leq i \leq 2022$.

Problema 20. En cada lado de un polígono regular de n lados de longitud 1, elegimos un punto distinto a los vértices, obteniendo así un nuevo polígono de n lados. ¿Para qué valores de n podemos obtener un polígono cuyos ángulos internos son todos iguales, pero que este nuevo polígono no sea regular?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Dado que $p-q$ es primo y, por tanto, entero positivo, $p > q$. Como el único primo par es el más pequeño, p debe ser impar. Si q es impar, entonces $p+q$ es par mayor que 2 y no sería primo. Luego, necesariamente $q = 2$.
Hacemos los casos dependiendo de p módulo 3.
Si p es múltiplo de 3, entonces $p = 3$, pero $p - q = 1$ no es primo.
Si $p \equiv 1 \pmod 3$, entonces $p + q$ es múltiplo de 3 y, por ende, $p + q = 3$, dejando $p = 1$ el cual no es primo.
Por último, si $p \equiv 2 \pmod 3$, entonces $p - q$ es múltiplo de 3 y, por ende, $p - q = 3$, dejando $p = 5$. Como $5 + 2 = 7$ es primo, la solución $(p, q) = (5, 2)$ es válida y, por consiguiente, $p + q + (p + q) + (p - q) = 17$.

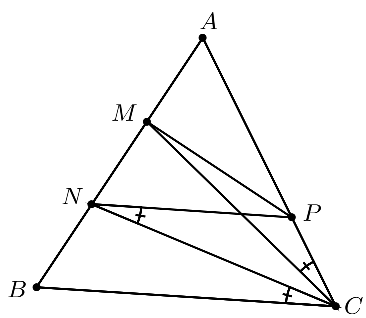
Solución del problema 2. Sean a, b, c, x, y números reales positivos tales que

$$ax + by \leq bx + cy \leq cx + ay.$$

Supongamos, por contradicción, que $b > c$. Entonces, $by > cy$ y, por la primera desigualdad, concluimos que $ax < bx$, de donde $a < b$. De manera análoga, tenemos que $bx > cx$ y, por la segunda desigualdad, concluimos que $cy < ay$, de donde $c < a$.

Luego, tenemos que $c < a < b$, lo cual implica que $cx < ax$ y $ay < by$, por lo que $cx + ay < ax + by$, lo que contradice las desigualdades iniciales. Por lo tanto, $b \leq c$.

Solución del problema 3. Como NP y BC son paralelas, tenemos que $\angle PNC = \angle NCB$. Además, los triángulos NBC y MAC son congruentes por el criterio LAL, por lo que $\angle NCB = \angle ACM = \angle PCM$.



Por otro lado, dado que $AN = AP$ y $\angle NAP = 60°$, el triángulo ANP es equilátero y, como $AM = MN$, la recta PM es bisectriz de este triángulo, de donde obtenemos que $\angle APM = 30°$. Por lo tanto,

$$\angle PMC + \angle PNC = \angle PMC + \angle PCM = \angle APM = 30°.$$

Solución del problema 4. Observemos que

$$(ab + 1)^2 + (a - b)^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = (a^2 + 1)(b^2 + 1).$$

Demostraremos primero que $a^2 + 1$ y $b^2 + 1$ son coprimos. El máximo común divisor de $a + b$ y $ab - 1$ es el mismo que el de $a + b$ y $(a + b)b - (ab - 1) = b^2 + 1$, así que estos dos números son coprimos. A su vez, el máximo común divisor de $a - b$ y $ab + 1$ es igual al de $a - b$ y $ab + 1 - (a - b)b = b^2 + 1$, y estos dos números también son coprimos. Por lo tanto, $b^2 + 1$ es coprimo con $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ y, por consiguiente, $b^2 + 1$ es coprimo con $(a^2 - b^2) + (b^2 + 1) = a^2 + 1$. Dado que ninguno de ellos puede ser un cuadrado, al no haber dos cuadrados positivos con diferencia 1, concluimos que su producto tampoco es un cuadrado.

Solución del problema 5. Basta demostrar que la secuencia B_iB_j regresa el mismo número que la secuencia B_jB_i. Tras presionar el botón B_i, tenemos que $B_i = B_iB_iB_jB_iB_j$ ya que aplicar dos veces la secuencia B_iB_j regresa el mismo valor. Pero la secuencia B_iB_i regresa el mismo valor, por lo que $B_i = B_jB_iB_j$. De aquí se sigue que $B_iB_j = B_jB_iB_jB_j$. Pero la secuencia B_jB_j regresa el mismo valor, llegando así a que $B_iB_j = B_jB_i$.

Solución del problema 6. Primero, notemos que

$$\frac{x(x^6-1)}{x^8+1} = \frac{x\cdot x^3\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{x^3-\frac{1}{x^3}}{x^4+\frac{1}{x^4}} = \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)}{x^4+\frac{1}{x^4}}. \tag{16}$$

Como $x = 2+\sqrt{5}$, tenemos que $(x-2)^2 = 5$, de donde $x^2-1 = 4x$. Como $x \neq 0$, entonces $x - \frac{1}{x} = 4$. Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación, obtenemos que $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}-2 = 16$, esto es, $x^2+\frac{1}{x^2} = 18$. Análogamente, elevando al cuadrado ambos lados de esta última ecuación, obtenemos que $x^4+\frac{1}{x^4} = 322$. Finalmente, sustituyendo en (16), obtenemos que

$$\frac{x(x^6-1)}{x^8+1} = \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)}{x^4+\dfrac{1}{x^4}} = \frac{4(18+1)}{322} = \frac{38}{161}.$$

Solución del problema 7. Como $c = b+1$, tenemos que $c^c \equiv 1^c \equiv 1 \pmod{b}$. Análogamente, como $a = b-1$ es par, tenemos que $a^a \equiv (-1)^a \equiv 1 \pmod{b}$. Por lo tanto, $c^c - a^a \equiv 0 \pmod{b}$.

Solución del problema 8. Cada cubito en un vértice del cubo original tiene tres caras pintadas de de negro, por lo que cada uno tiene una probabilidad de $1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ de no caer con una cara negra hacia arriba. Observemos que las aristas del cubo son de longitud 10. Quitando los cubitos en los vértices del cubo original, cada arista del cubo está formada por ocho cubitos, por lo que hay $12\cdot 8 = 96$ de estos; cada uno tiene dos caras pintadas de negro, por lo que tienen una probabilidad de $1-\frac{2}{6} = \frac{2}{3}$ de no caer con una cara negra hacia arriba. Quitando los cubitos en los vértices y en las aristas, cada cara está formada por $8\cdot 8 = 64$ cubitos, por lo que hay $6\cdot 64 = 384$ de estos, cada uno de los cuales tiene una probabilidad de $1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ de no caer con una cara negra hacia arriba. De los 512 cubos restantes, ninguno tiene alguna cara pintada de negro, así que tienen una probabilidad de 1 de no caer con una cara negra hacia arriba. Entonces, la probabilidad de que suceda el lanzamiento de Victoria es

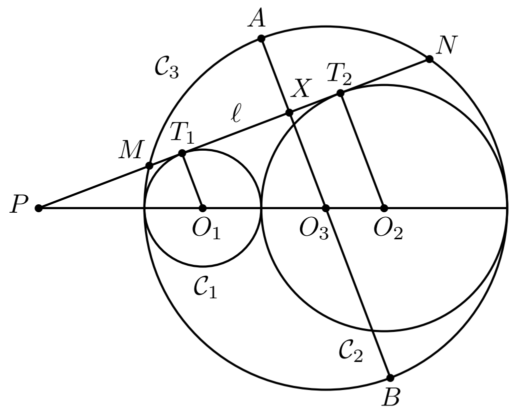
$$\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{384}1^{512} = \frac{2^{96}\cdot 5^{384}}{2^8\cdot 3^{96}\cdot 2^{384}\cdot 3^{384}} = 2^{-296}\cdot 3^{-480}\cdot 5^{384}.$$

Por lo tanto, $a+b+c = -296-480+384 = -392$.

Solución del problema 9. Sean O_1, O_2 y O_3 los centros de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ respectivamente. Sean T_1 y T_2 los puntos de tangencia de ℓ con $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Sea P el punto de intersección de las rectas O_1O_2 y T_1T_2. Sea X el pie de la perpendicular a T_1T_2 que pasa por O_3. Como los centros O_1, O_2 y O_3 son colineales, el radio de $\mathcal{C}_3$ es $\frac{2\cdot 4+2\cdot 10}{2} = 14$. Como O_1T_1 y O_2T_2 son radios, entonces son perpendiculares a ℓ, así que los triángulos PO_1T_1, PO_2T_2 y PO_3X son semejantes, esto es,

$$\frac{PO_1}{4} = \frac{PO_1+14}{10} = \frac{PO_1+10}{O_3X},$$

de donde se sigue que $PO_1 = \frac{28}{3}$ y que $O_3X = \frac{58}{7}$.
Prolonguemos el segmento O_3X hasta cortar a $\mathcal{C}_3$ en los puntos A y B. Como el radio de $\mathcal{C}_3$ es 14, tenemos que $AX = 14 - \frac{58}{7}$ y $XB = 14 + \frac{58}{7}$. Prolonguemos la recta T_1T_2 hasta cortar a $\mathcal{C}_3$ en los puntos M y N.



Como la mediatriz de una cuerda pasa por el centro, resulta que X es el punto medio de MN. Por potencia del punto X, tenemos que $AX \cdot XB = MX \cdot XN$, esto es, $\frac{40}{7} \cdot \frac{156}{7} = MX^2$. Finalmente, obtenemos que $MX = \frac{4\sqrt{390}}{7}$ y, por lo tanto, la longitud de la cuerda ℓ es $2MX = \frac{8\sqrt{390}}{7}$.

Solución del problema 10. Tenemos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

es múltiplo de 200 si y solo si $n(n+1)(2n+1)$ es múltiplo de $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$.
Si $2^4 = 16$ divide a $n(n+1)(2n+1)$, como $2n+1$ es impar, entonces $16 \mid n(n+1)$. Pero n y $n+1$ son coprimos, por lo que $16 \mid n$ o $16 \mid n+1$. En otras palabras, $n(n+1)(2n+1)$ es divisible por 16 si y solo si n es congruente a 0 o 15 módulo 16.
Si $5^2 = 25$ divide a $n(n+1)(2n+1)$, entonces 25 divide a alguno de los tres factores, o 5 divide a dos de ellos. Luego,

a) $5 \mid n$ si y solo si $n \equiv 0 \pmod 5$,

b) $5 \mid n+1$ si y solo si $n \equiv 4 \pmod 5$ y,

c) $5 \mid 2n+1$ si y solo si $n \equiv 2 \pmod 5$.

Como todos los residuos son diferentes, es imposible que dos de los factores en el producto $n(n+1)(2n+1)$ sean múltiplos de 5, llegando así a que exactamente uno de los tres factores es múltiplo de 25. Luego,

a) $25 \mid n$ si y solo si $n \equiv 0 \pmod{25}$,

b) $25 \mid n+1$ si y solo si $n \equiv 24 \pmod{25}$ y,

c) $25 \mid 2n+1$ si y solo si $n \equiv 12 \pmod{25}$.

Por otra parte, $n(n+1)(2n+1)$ es múltiplo de 3 para todo entero positivo n, pues $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ es un entero, por lo que el problema se reduce a encontrar el menor entero positivo n tal que n es congruente con 0 o 15 módulo 16 y con 0, 12 o 24 módulo 25.
De aquí, notemos que el entero positivo más pequeño que es congruente con 0 módulo 16 y es congruente con 0, 12 o 24 módulo 25 es 112, que es congruente con 12 módulo 25. Finalmente, notemos que los enteros que son congruentes con 15 módulo 16 y son menores que 112, son 15, 31, 47, 63, 79, 95 y 111, cuyos residuos módulo 25 son 15, 6, 22, 13, 4, 20 y 11 respectivamente, esto es, ninguno de ellos deja residuo 0, 12 o 24 módulo 25, por lo que la respuesta es $n = 112$.

Solución del problema 11. Notemos que si dos triángulos con vértices en una circunferencia difieren por una rotación de la misma, entonces son congruentes, por lo que bastará demostrar que es posible escoger tres puntos de cada color de forma que los cuatro triángulos difieran por una rotación de la circunferencia.
Notemos que hay 431 rotaciones no triviales de los puntos en la circunferencia, conformadas por rotaciones de $(\frac{360}{432})^\circ$. Después de 431 rotaciones, cada punto rojo toca un punto verde 108 veces, así que, como hay 108 puntos rojos, todos los puntos rojos tocan los puntos verdes 108^2 veces. Entonces, en promedio, en cada movimiento, $\frac{108^2}{431} > 27$ puntos rojos tocan un punto verde, así que, en alguna rotación, al menos 28 de los 108 puntos rojos tocan algún punto verde.
Similarmente, después de 431 rotaciones de estos 28 puntos, cada uno habrá tocado 108 puntos azules, así que, en promedio, en cada movimiento, $\frac{108 \cdot 28}{431} > 7$ de estos puntos rojos tocan algún punto azul, así que, en alguna rotación, al menos 8 de los 28 puntos rojos tocan algún punto azul.
De manera análoga, después de 431 rotaciones de estos 8 puntos, cada punto rojo toca todos los puntos amarillos, por lo que, en promedio, en cada movimiento, $\frac{108 \cdot 8}{431} > 2$ puntos rojos tocan un punto amarillo, es decir, existen 3 puntos rojos que, en alguna rotación, tocan un punto amarillo.
De esta manera, hemos encontrado tres puntos rojos que, tras alguna rotación, tocarán un punto verde, un punto azul y un punto amarillo, probando así el resultado.

Solución del problema 12. Si p es raíz común de $x^2+ax+1=0$ y de $x^2+bx+c=0$, entonces $p^2+ap+1-(p^2+bp+c)=0$, esto es, $p(a-b)+1-c=0$, de donde obtenemos que $p = \frac{c-1}{a-b}$. Ahora, si q es raíz común de $x^2+x+a=0$ y de $x^2+cx+b=0$, entonces $q^2+q+a-(q^2+cq+b)=0$, esto es, $q(1-c)+(a-b)=0$, de donde obtenemos que $q = \frac{a-b}{c-1}$. Por lo tanto, $q = \frac{1}{p}$.
Por otro lado, por las fórmulas de Vieta, la otra raíz de $x^2+ax+1=0$ es $\frac{1}{p}$. Esto significa que $q = \frac{1}{p}$ es raíz de x^2+ax+1 y de $x^2+x+a=0$. Por lo tanto, $q^2+aq+1-(q^2+q+a)=0$, esto es, $(q-1)(a-1)=0$, de donde obtenemos que $a = 1$ o $q = 1$.

a) Si $a = 1$, entonces $x^2+x+1=0$, que no tiene raíces reales.

b) Si $q = 1$, entonces $p = 1$ y $x^2 + ax + 1 = (x-1)^2$, lo cual implica que $a = -2$. Además, tenemos que $q^2 + cq + b = 1 + c + b = 0$, de donde $b + c = -1$ y, por lo tanto, $a + b + c = -3$.

Solución del problema 13. Demostraremos que el mayor entero N con la propiedad requerida es $N = 1000$. Observemos que $x_i^2 - x_ix_j = x_i(x_i - x_j)$ y, que $1111 = 11 \cdot 101$. Primero demostraremos que podemos encontrar 1000 enteros $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ tales que $x_i^2 - x_ix_j$ no es divisible por 1111 para todo $i \neq j$. Consideremos el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1110\}$. Este conjunto contiene 10 enteros divisibles por 101 y contiene 100 enteros divisibles por 11. Ninguno de los enteros de este conjunto es divisible por ambos números 11 y 101. Si borramos a estos $10 + 100$ enteros del conjunto, quedan 1000 enteros. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ tales enteros. Tenemos que $11 \nmid x_i$ y $101 \nmid x_i$ para todo i. Supongamos que existen $i \neq j$ tales que $1111 \mid x_i(x_i - x_j)$. Entonces, debemos tener que $1111 \mid (x_i - x_j)$, lo que es una contradicción ya que $x_i, x_j \in \{1, 2, \ldots, 1110\}$. Por lo tanto, los enteros $x_1, \ldots, x_{1000}$ satisfacen el problema.
Ahora demostraremos que entre cualesquiera 1001 enteros $x_1, x_2, \ldots, x_{1001}$, existen $i \neq j$ tales que $1111 \mid x_i(x_i - x_j)$. Supongamos, por contradicción, que para todos los índices $i \neq j$, se cumple que $x_i(x_i - x_j)$ no es divisible por 1111 y sea $X = \{x_1, \ldots, x_{1001}\}$. Reduciendo módulo 1111 podemos asumir que $x_i \in \{0, 1, \ldots, 1110\}$ para todo i. Tenemos que $x_i \neq 0$ para todo i y, que $x_i \neq x_j$, para todo $i \neq j$. Supongamos que para algún i, $11 \mid x_i$ (como $x_i \neq 0$, sabemos que $101 \nmid x_i$). Entonces, cualquier entero $a \neq x_i$, con $a \equiv x_i \pmod{101}$ no puede ser un elemento de X, ya que $1111 \mid x_i(x_i - x_j)$. En el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1110\}$ hay 10 de tales enteros, todos ellos primos relativos con $11 \cdot 101$. Si hay exactamente k valores distintos de i tales que $11 \mid x_i$, entonces hay $10k$ enteros distintos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 1110\}$ que no pueden ser elementos de X, todos ellos primos relativos con $11 \cdot 101$. Análogamente, si hay exactamente m valores distintos de i tales que $101 \mid x_i$, entonces hay $100m$ enteros distintos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 1110\}$ que no pueden ser elementos de X, todos ellos primos relativos con $11 \cdot 101$ (observe que esos $10k$ y $100m$ enteros pueden traslaparse).
En el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1110\}$ hay 100 múltiplos de 11, hay 10 múltiplos de 101 y no hay múltiplos de $11 \cdot 101$, así que hay 1000 enteros que son primos relativos con $11 \cdot 101$. En X tenemos $1001 - k - m$ enteros que son coprimos con $11 \cdot 101$, así que exactamente $k + m - 1$ de los enteros primos relativos en $\{1, 2, \ldots, 1110\}$ no están en X. Esto implica que $10k \leq k + m - 1$ y $100m \leq k + m - 1$. Sumando estas dos desigualdades obtenemos que $8k + 98m \leq -2$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $N < 1001$.

Solución del problema 14. Notemos que $50 = 7 \times 7 + 1$ y que $8 = 7 + 1$. Demostraremos el siguiente resultado más general: dados $7n + 1$ segmentos sobre una recta, hay $n + 1$ de ellos ajenos dos a dos o hay 8 de ellos con un punto en común.
Veamos qué pasa si $n = 1$. Si tomamos 2 segmentos cualesquiera, o se intersecan o son ajenos, por lo que si no hay dos de ellos ajenos, entonces los 8 se intersecan en un punto en común, así que el resultado se sigue para $n = 1$. Supongamos que el resultado se sigue para $n - 1$.

Como los $7n+1$ intervalos están en una recta, para cada intervalo I_k, sea P_k su punto a la izquierda. Ordenemos los intervalos de manera que I_0 cumpla que P_0 sea el punto más a la derecha entre todos los P_i, $i \in \{0, 1, \ldots, 7n\}$. Eso quiere decir que si un intervalo I_k tiene puntos en comón con I_0, entonces $P_0 \in I_k$. Tenemos dos casos: el primero es que haya 7 intervalos que intersecan a I_0, en cuyo caso acabamos, pues esos 7 intervalos junto con I_0, contienen a P_0. El segundo caso es que haya al menos $7(n-1)+1$ intervalos que no intersequen a I_0. Por hipótesis de inducción tenemos 8 que se intersecan y terminamos, o hay n de ellos que son ajenos dos a dos. Si a estos n le añadimos I_0, vemos que este último es ajeno a todos los anteriores (pues sabemos que no lo intersecan) y, por lo tanto, se sigue el resultado.

Solución del problema 15. Si $m = n$, entonces $9^0 + 3^0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ debe ser divisible por n, lo cual implica que $m = n = 1$ o $m = n = 3$.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m > n$. Sea $d = m - n$. Tenemos que

$$\nu_3(9^{|m-n|} + 3^{|m-n|} + 1) = \nu_3(9^d + 3^d + 1) = 0,$$

por lo que $\nu_3(m) = \nu_3(n) = 0$. Esto significa que $3 \nmid m$ y $3 \nmid n$.
Sean $k = \nu_3(d)$, p un divisor primo de m y $r = \text{ord}_p(3)$. Como

$$3^{3d} - 1 = (3^d - 1)(9^d + 3^d + 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

se sigue que $r \mid 3d$, lo que implica que $\nu_3(r) \leq \nu_3(3d) = k + 1$.
Si $r \mid d$, entonces $3^d \equiv 1 \pmod{p}$, por lo que $9^d + 3^d + 1 \equiv 3 \pmod{p}$, lo cual es una contradicción. Así, $r \nmid d$. Concluimos que $\nu_3(r) = k + 1$.
Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, lo cual implica que $r \mid (p-1)$, esto es, $p \equiv 1 \pmod{r}$ y, por lo tanto, $p \equiv 1 \pmod{3^{k+1}}$. Como $p \mid m$ y p es un primo arbitrario, concluimos que $m \equiv 1 \pmod{3^{k+1}}$. Lo mismo es cierto para n, por lo que $n \equiv 1 \pmod{3^{k+1}}$. Por lo tanto, $3^{k+1} \mid (m - n)$, esto es, $3^{k+1} \mid d$, lo que contradice que $\nu_3(d) = k$. Concluimos que las únicas soluciones son $m = n = 1$ y $m = n = 3$.

Solución del problema 16. Haciendo $x = y = 0$ y $c = f(0)$ en la ecuación funcional, tenemos que $f(c)^2 + c^2 + c^2 = c + 2cf(c)$, esto es, $(f(c) - c)^2 = c - c^2$. Como el lado izquierdo es no negativo, el lado derecho también debe ser no negativo, así que $c - c^2 \geq 0$, esto es, $c(1-c) \geq 0$. Esto implica que $0 \leq c \leq 1$ y, como c es un entero, necesariamente $c = 0$ o $c = 1$. En ambos casos, tenemos que $c - c^2 = 0$, lo que significa que $f(c) - c = 0$, esto es, $f(c) = c$.
Por otro lado, haciendo $y = 0$ encontramos que para todo número real x,

$$(f(c-x))^2 + f(x)^2 + c^2 = c + 2c^2. \tag{17}$$

Si $c = 0$, esta ecuación se reduce a $f(-x)^2 + f(x)^2 = 0$ y, como el lado izquierdo es una suma de dos cuadrados, ambos cuadrados deben ser igual a 0. Luego, $f(x) = 0$ para todo x y, es fácil ver, que esta función es una solución de la ecuación funcional.
Ahora consideremos el caso $c = 1$. La ecuación (17) se reduce a $f(1-x)^2 + f(x)^2 = 2$. El lado izquierdo es una suma de dos cuadrados de enteros, así que ambos deben ser

igual a 1. Por lo tanto, para todo número real x tenemos que $f(x) = 1$ o $f(x) = -1$. Haciendo $x = 0$ en la ecuación funcional del problema, obtenemos que

$$(f(f(y)))^2 + f(0)^2 + f(y)^2 = f(y)(1 + 2f(f(y))),$$

la cual puede reescribirse como $(f(y) - f(f(y)))^2 + f(0)^2 = f(y)$. Como el lado izquierdo es no negativo, necesariamente $f(y) \geq 0$ para todo y. Si combinamos esto con $f(x) = \pm 1$ para todo x, concluimos que $f(x) = 1$ para todo número real x y, es fácil ver, que esta función es una solución de la ecuación funcional.

Solución del problema 17. Denotemos por (a, b) a la acción de borrar los números a y b del pizarrón y reemplazarlos por su diferencia no negativa. Probaremos por inducción en n que si están escritos inicialmente los números del 1 al $4n+3$, entonces los posibles valores para el número restante son los enteros pares del 0 al $4n + 2$.
Notemos que nunca puede quedar un número impar, pues la paridad de la suma de todos los números en el pizarrón es invariante y, el valor inicial de esta suma, igual a

$$\frac{(4n+3)(4n+4)}{2} = (4n+3)(2n+2)$$

es un número par.
Si $n = 0$, podemos dejar el 0 haciendo los movimientos $(2, 3)$ y $(1, 1)$, o podemos dejar el 2 haciendo los movimientos $(1, 2)$ y $(1, 3)$.
Supongamos que el resultado es cierto para algún entero n y consideremos el problema para $n + 1$. Si hacemos los movimientos $(4n + 4, 4n + 5)$, $(4n + 6, 4n + 7)$, $(1, 1)$ y $(4n+3, 0)$, quedaremos con los números del 1 al $4n+3$ en el pizarrón. Por la hipótesis de inducción, sabemos que nuestro número restante puede ser cualquier entero par del 0 al $4n + 2$. Basta con mostrar que el número restante también puede ser $4n + 4$ o $4n + 6$.
Si están escritos los números del 1 al $4n + 7$, podemos usar la hipótesis de inducción para quedarnos con los números $4n + 2$, $4n + 4$, $4n + 5$, $4n + 6$ y $4n + 7$. Para dejar el $4n + 6$, podemos hacer los movimientos $(4n + 2, 4n + 4)$, $(4n + 5, 4n + 6)$, $(1, 2)$ y $(1, 4n + 7)$. Para dejar el $4n + 4$, podemos hacer los moviemientos $(4n + 2, 4n + 6)$, $(4n + 4, 4n + 5)$, $(1, 4)$ y $(3, 4n + 7)$. Con esto concluimos la inducción.

Solución del problema 18. Sea C el número de formas de colocar cuatro de cada número 0, 1 y 2 en el tablero, sin que dos casillas que compartan un lado tengan el mismo número. Para cada uno de estos acomodos, podemos reemplazar cada número con uno que tenga su misma congruencia módulo 3. Hay 4! formas de reemplazar los 0's, los 1's y los 2's, por lo que $N = (4!)^3 C$.
Para determinar el valor de C, consideremos las columnas en uno de los acomodos relevantes. Estas pueden tener los conjuntos de números $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$. Digamos que estos se usan a, b y c veces, respectivamente. Como cada número se usa 4 veces, tenemos que $a + b = 4$, $b + c = 4$ y $c + a = 4$, por lo que $a = b = c = 2$.
Hay $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$ formas de elegir los números en cada columna, sin considerar el orden en el que aparecen. Dados los números que contiene, hay 2 formas de elegir la primera columna. A partir de aquí, las columnas siguientes están determinadas, pues

en exactamente una de las 2 formas de colocar los números, quedarán dos casillas adyacentes con el mismo número. Por lo tanto, $C = 2 \cdot 90 = 180$ y $N = (4!)^3 \cdot 180 = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5$, de donde se sigue que N tiene $(11+1)(5+1)(1+1) = 144$ divisores positivos.

Solución del problema 19. Demostraremos que sí existe. Sea p un número primo impar y sean $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}, q_1, q_2, \ldots, q_{2024}$ números primos impares distintos entre sí y distintos de p. Por el teorema chino del residuo, existe un número entero a_0 tal que:

$$\begin{aligned} a_0 &\equiv 1 \pmod 2, \\ a_0 &\equiv 1 \pmod p, \\ a_0 + 2ip &\equiv 0 \pmod{p_i q_i} \text{ para } 1 \leq i \leq 2024. \end{aligned}$$

Consideremos la sucesión $a_i = a_0 + 2ip$ para $1 \leq i \leq 2024$. Demostraremos que esta sucesión satisface las condiciones del problema. Como es una progresión aritmética, tenemos que

$$a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{s-1} + a_s = \left(\frac{a_r + a_s}{2}\right)(s - r + 1),$$

donde $\frac{a_r+a_s}{2}$ es un entero, ya que todos los a_i's son impares. Si $r < s$, cada factor $\frac{a_r+a_s}{2}$ y $s - r + 1$ es mayor que 1, así que la suma no es primo y, si $r = s$, la suma se reduce a a_r, el cual no es primo ya que $p_r q_r \mid a_r$.
Por último debemos checar la condición del máximo común divisor. Tenemos que

$$\text{mcd}(a_i, a_{i+2}) = \text{mcd}(a_i, a_i + 4p) = \text{mcd}(a_i, 4p) = 1,$$

$$\text{mcd}(a_i, a_{i+1}) = \text{mcd}(a_i, a_i + 2p) = \text{mcd}(a_i, 2p) = 1,$$

ya que $a_i \equiv a_0 \equiv 1 \pmod 2$ y $a_i \equiv a_0 \equiv 1 \pmod p$.

Solución del problema 20. Sean $A_1A_2 \ldots A_n$ el polígono regular y $B_1B_2 \ldots B_n$ el polígono inscrito, de manera que B_i está en el lado A_iA_{i+1}, considerando los índices módulo n. Para cada i, tenemos que

$$\begin{aligned} \angle B_{i-1}B_iB_{i+1} + \angle B_{i+1}B_iA_{i+1} &= \angle B_iB_{i-1}A_i + \angle A_{i-1}A_iA_{i+1} \\ &= 180^\circ - \angle A_iB_iB_{i-1}. \end{aligned}$$

En particular,

$$\angle B_{i-1}B_iB_{i+1} = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1} \quad \text{si y solo si} \quad \angle B_{i+1}B_iA_{i+1} = \angle B_iB_{i-1}A_i,$$

esto es, los triángulos $B_{i+1}B_iA_{i+1}$ y $B_iB_{i-1}A_i$ son semejantes por el criterio AA. Por lo tanto, estos triángulos son todos semejantes entre sí, si y solo si los ángulos internos del polígono inscrito son todos iguales.
Si $n = 2k$, podemos elegir un número real $0 < r < \frac{1}{2}$ y construir el polígono inscrito de manera que $A_iB_i = A_iB_{i-1} = r$ para todo i impar. De esta manera, todos los triángulos $B_iB_{i-1}A_i$ son isósceles y comparten un ángulo del polígono regular, por

lo que son semejantes. Como la razón de semejanza $\frac{r}{1-r}$ es distinta de 1, el polígono inscrito tiene sus ángulos iguales pero no sus lados.
Supongamos ahora que n es impar y que el polígono inscrito tiene sus ángulos iguales. Sea $x_i = A_iB_i$. Por las semejanzas, tenemos que $x_i/(1-x_{i-1})$ es constante. En particular,

$$x_i(1-x_i) = x_{i+1}(1-x_{i-1})$$

y, por lo tanto, $x_i < x_{i+1}$ si y solo si $x_i < x_{i-1}$. Luego, los signos de las diferencias $x_1 - x_2,\ x_2 - x_3, \ldots$ han de alternarse. Como n es impar, esto significa que todas estas diferencias son iguales a cero, lo cual implica que todos los x_i son iguales. Así, el polígono inscrito tiene simetría rotacional de orden n, lo cual implica que es regular. Por lo tanto, los valores de n que satisfacen el problema son los enteros pares.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2023 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este segundo número del año 2023 de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

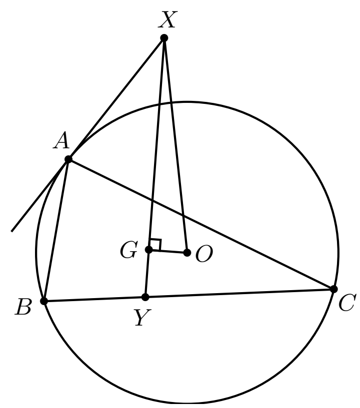
Problema 1. Determina el menor entero positivo n tal que, cuando se escribe 3^n en base 143, sus últimos dos dígitos de la derecha son 01.

Problema 2. En un triángulo isósceles ABC con $AB = BC$, sea T un punto en el interior tal que $\angle BAT = 40°$, $\angle TAC = 30°$ y $\angle BCT = 20°$. Determina la medida del ángulo $\angle CBT$.

Problema 3. En un pizarrón se escriben los números enteros del 1 al $2n$. Demuestra que si se eligen aleatoriamente $n+1$ números de entre ellos, entonces entre los elegidos hay un par tal que uno divide al otro.

Problema 4. Diremos que dos enteros positivos a y b son *hermanos* si existe un primo p tal que $a = pb$ o $b = pa$. Diremos que un entero positivo n es *familiar* si tiene al menos tres divisores positivos y todos sus divisores se pueden acomodar en un círculo (sin repeticiones) de tal forma que cualesquiera dos divisores vecinos en el círculo sean hermanos. Determina todos los enteros familiares.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O y gravicentro G. Sea X el punto de intersección de la perpendicular a GO que pasa por G y la tangente por A al circuncírculo de ABC. Sea Y el punto de intersección de XG con BC. Si $\angle ABC : \angle BCA : \angle XOY = 13 : 2 : 17$, determina la medida del ángulo $\angle BAC$.



Problema 6. Una parábola es la gráfica de una función de la forma ax^2+bx+c, donde $a \neq 0$, b y c son números reales. Demuestra que para cada conjunto finito de parábolas, existe una parábola que no interseca a ninguna parábola del conjunto.

Problema 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, demuestra que

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

Problema 8. Demuestra que para cualesquiera enteros positivos m y n, el número $2^m + 3^n$ no es múltiplo de 2023.

Problema 9. Una hormiga camina sobre la superficie de un cubo de lado 1. Se encuentra en un vértice y quiere moverse al vértice opuesto. ¿Cuál es la mínima distancia que debe caminar la hormiga?

Problema 10. Determina el número de funciones $f : \{0,1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(0) = 0$, $f(6) = 12$ y, para todo $x, y \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, se cumple que

$$|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2022 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2022. En esta ocasión, agradecemos a Titu Zvonaru, de Comăneşti, Rumania, por haber enviado sus soluciones a los problemas 3, 4 y 10. Aprovechamos para invitar a todos los lectores, a enviar sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2022, por lo que aún tienes tiempo de mandar las tuyas.

Problema 1. Sea $n \geq 3$ un número entero. Se quiere llenar una canasta con n pelotas de tres colores: azul, rojo y verde, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

a) Hay al menos dos pelotas azules.

b) Hay al menos una pelota roja.

c) Hay un número par de pelotas verdes.

¿De cuántas maneras se puede llenar la canasta si no importa el orden de las pelotas en la canasta?

Solución. Supongamos primero que n es impar, esto es, $n = 2m + 1$. Como la canasta está forzada a tener dos pelotas azules y una roja, podemos meter dos pelotas azules y una roja antes de empezar el conteo. Nos quedan $2m - 2$ pelotas por meter a la canasta con la única restricción de que el número de pelotas verdes sea par. Supongamos que metemos 0 pelotas verdes. Entonces, hay $2m - 1$ maneras de hacerlo:

$$(0, 2m - 2), (1, 2m - 1), \dots, (2m - 2, 0),$$

donde (a, b) indica que hay a pelotas azules y b pelotas rojas.
Si hay 2 pelotas verdes, entonces hay $2m - 3$ maneras de hacerlo:

$$(0, 2m - 4), (1, 2m - 3), \dots, (2m - 4, 0).$$

Continuando de esta forma, tenemos que con $2k$ pelotas verdes hay $2m - 2k - 1$ maneras de hacerlo. Por lo tanto, en total tenemos

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2m - 1) = m^2 = \frac{(n-1)^2}{4}$$

maneras.
De manera análoga, si $n = 2m$, obtenemos

$$2 + 4 + \cdots + (2m - 2) = (m - 1)m = m^2 - m = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-2)}{4}$$

maneras.

Problema 2. Decimos que una pareja de números enteros (m, n) es *invertible* si existen enteros x, y tales que $mx - ny = 1$ y $my + nx = 0$. Encuentra todas las parejas invertibles de números enteros.

Solución. Observemos que para cualesquiera números a, b, c, d, se cumple que:

$$\begin{aligned}(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2). \qquad (18)\end{aligned}$$

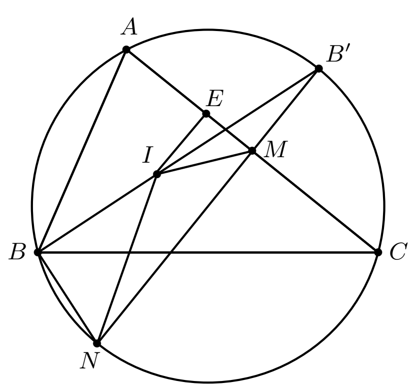
En particular, si (m, n) es invertible, entonces existen enteros x, y tales que

$$(mx - ny)^2 + (my + nx)^2 = 1^2 + 0^2 = 1.$$

Aplicando la identidad (18), tenemos que $(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) = 1$, de donde se sigue que $m^2 + n^2 = 1$, esto es, si (m, n) es invertible, entonces $(m, n) = (1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ o $(0, -1)$, las cuales son todas parejas invertibles.
Nota: La identidad (18) se conoce como identidad de Brahmagupta-Fibonacci.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con incentro I, con $BC > AB$. Si M es el punto medio de AC y N es el punto medio del arco $\widehat{AC}$ que contiene a B, demuestra que $\angle IMA = \angle INB$.

Solución de Titu Zvonaru. Denotemos por B' a la intersección de la mediatriz de AC con el circuncírculo de ABC y por E al pie de la altura desde I sobre AC. Como MN es mediatriz de AC, el punto B' está en la recta MN.



Sean $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle ACB$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} AE &= s-a,\\ EM &= \frac{b}{2}-(s-a)=\frac{a-c}{2},\\ BI &= \frac{ac\cos\frac{\beta}{2}}{s},\\ IE &= r,\\ NB' &= 2R, \end{aligned}$$

donde s, r y R denotan el semiperímetro, el inradio y el circunradio del triángulo ABC. Como $\widehat{ANC}=360^\circ-2\beta$, tenemos que

$$\angle BB'N=\angle AB'N-\angle ACB=\frac{180^\circ-\beta-2\gamma}{2}=\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

Se sigue que $BN=2R\operatorname{sen}\frac{\alpha-\gamma}{2}$. Demostraremos que

$$\frac{BI}{BN}=\frac{IE}{EM}. \tag{19}$$

Aplicando la ley de senos generalizada[2] en el triángulo ABC, la relación (19) es equivalente a

$$\frac{ac\cos\dfrac{\beta}{2}}{2Rs\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}=\frac{2r}{a-c},$$

esto es,

$$\frac{ac\cos\dfrac{\beta}{2}}{2Rs\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}=\frac{2r}{2R(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\gamma)}.$$

Aplicando la identidad 8) del artículo de este número, la igualdad anterior es equivalente a

$$\frac{ac\cos\dfrac{\beta}{2}}{s\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}=\frac{2r}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

Simplificando, obtenemos la igualdad equivalente

$$2ac\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=2rs.$$

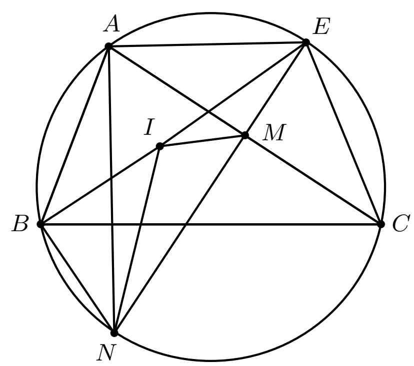
[2]**Ley de senos generalizada.** En un triángulo de lados a, b y c, con ángulos α, β y γ opuestos a los lados a, b y c, respectivamente, se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Finalmente, aplicando la identidad 11) del artículo de este número, la igualdad anterior es equivalente a $ac \operatorname{sen}\beta = 2rs$, la cual es verdadera puesto que $ac \operatorname{sen}\beta$ y $2rs$ son ambos iguales a 2Área(ABC). Por lo tanto, la relación (19) es verdadera, lo que significa que los triángulos rectángulos IBN y IEM son semejantes, de donde se sigue que $\angle IMA = \angle INB$.

Solución alternativa. Sea E el punto medio del arco $\widehat{AC}$ que no contiene a B. Tenemos que BE es bisectriz del ángulo $\angle CBA$, por lo que los puntos B, I y E son colineales. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. Tenemos que N, M y E son colineales (por estar en la mediatriz de la recta AC) y $AE = EC = IE$.



Como la recta NE es diámetro de Γ, tenemos que $\angle NAE = \angle AME = 90°$, de donde se sigue que los triángulos AME y NAE son semejantes por el criterio AA. En consecuencia, $ME \cdot NE = AE^2 = EI^2$. Por lo tanto, los triángulos EIM y ENI son semejantes también, de donde $\angle IME = \angle EIN$. Luego,

$$\begin{aligned} 90° + \angle IMA = \angle AME + \angle IMA = \angle IME \\ = \angle EIN = \angle INB + \angle IBN = \angle INB + 90°, \end{aligned}$$

donde $\angle IBN = 90°$ al ser NE un diámetro. Por lo tanto, $\angle IMA = \angle INB$.

Problema 4. Sean x, y y z números reales no negativos tales que $x + y + z = 1$. Determina el valor máximo del producto

$$(x + 3y + 5z)\left(x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right).$$

Solución de Titu Zvonaru. El problema es equivalente a determinar el mayor número M tal que existen x, y, z, con $x + y + z \neq 0$, que satisfacen

$$(x + 3y + 5z)\left(x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right) = \frac{M}{15}(x + y + z)^2. \qquad (20)$$

Esta ecuación es equivalente a

$$(M-15)x^2+(M-15)z^2+2(M-39)xz+(M-15)y^2 \\ +2(M-25)xy+2(M-17)yz=0,$$

esto es,

$$(M-15)(x-z)^2+4(M-27)xz+(M-15)y^2 \\ +2(M-25)xy+2(M-17)yz=0.$$

Si $M>27$, de la ecuación anterior obtenemos que $x=y=z=0$, lo que contradice que $x+y+z\neq 0$.
Si $M=27$, la ecuación anterior tiene soluciones $x=z>0$, $y=0$.
Por lo tanto, el mayor valor del producto $(x+3y+5z)\left(x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}\right)$ es $\frac{27}{15}=\frac{9}{5}$, que se obtiene con $x=z=\frac{1}{2}$, $y=0$.

Problema 5. Sydney la ardilla se encuentra en el origen $(0,0)$ del plano. Ella puede moverse reflejando su posición sobre una recta formada por dos puntos con coordenadas enteras, siempre y cuando su reflexión caiga en otro punto con coordenadas enteras. ¿Puede Sydney llegar al punto $(2021,2022)$?

Solución. Demostraremos que es imposible que Sydney llegue al punto $(2021,2022)$. Más especificamente, mostraremos que Sydney nunca puede llegar a un punto cuyas coordenadas tengan distinta paridad.
Supongamos que Sydney llega al punto (a,b), iniciando desde el punto $(0,0)$. El punto medio del segmento que conecta estos dos puntos es $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$, por lo que su mediatriz, la recta por la que Sydney debe haber reflejado, tiene ecuación

$$y-\frac{b}{2}=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right).$$

Reacomodando, obtenemos que $2(ax+by)=a^2+b^2$. Sabemos por hipótesis que hay puntos con coordenadas enteras (x,y) sobre esta recta, por lo que el lado derecho de la ecuación debe ser par. Esto solo es posible si a y b tienen la misma paridad. Como 2021 y 2022 tienen distinta paridad, Sydney no puede llegar al punto $(2021,2022)$.

Problema 6. Determina todos los enteros positivos a, b y c, que son solución de la ecuación

$$a!b!=a!+b!+c!$$

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a\leq b$. Dividiendo por $b!$ la ecuación original, obtenemos que

$$a!=\frac{a!}{b!}+\frac{c!}{b!}+1.$$

Si $a < b$, necesariamente $c < b$ ya que el lado derecho debe ser un número entero. Luego, tenemos que $a! < b!$ y $c! < b!$, de donde

$$\frac{a!}{b!} + \frac{c!}{b!} + 1 < 1 + 1 + 1 = 3,$$

esto es, $a! < 3$, lo cual implica que $a = 1$ o 2. Si $a = 1$, obtenemos la ecuación $c! + 1 = 0$, la cual no tiene soluciones. Si $a = 2$, obtenemos la ecuación $b! = 2 + c!$, la cual implica que $c \mid 2$ (ya que $c < b$), esto es, $c = 1$ o 2. En cualquier caso, es fácil ver que no hay soluciones para b.
Por lo tanto, $a = b$ y la ecuación se reduce a

$$a! = \frac{c!}{a!} + 2 > 2,$$

lo cual implica que $c \geq a \geq 3$.
Si $c \geq a + 3$, entonces el lado derecho no es divisible por 3, mientras que el lado izquierdo sí lo es.
Si $c = a + 2$, entonces $a! = (a + 1)(a + 2) + 2 = a^2 + 3a + 4$. El lado izquierdo es estrictamente mayor que el lado derecho si $a \geq 5$ y es fácil ver que no hay soluciones para valores de a menores que 5.
Si $c = a + 1$, entonces $a! = a + 3$, de donde $a \mid 3$. Luego, la única opción es $a = 3$ y obtenemos la solución $(3, 3, 4)$.
Si $c = a$, entonces $a! = 3$ que no tiene soluciones.
Por lo tanto, la única solución de la ecuación original es la terna $(3, 3, 4)$.

Problema 7. En una cuadrícula de $n \times n$, se pintan algunos cuadritos de negro. Una coloración se dice *confusa* si, al tener el cuadrito en la fila i y columna j coloreado de negro, entonces el cuadrito en la fila j y columna j está coloreado de negro. ¿Cuántas coloraciones confusas hay para cada entero positivo n?

Solución. Sea (i, j) el cuadrito en la fila i y la columna j. Para cada columna j existen dos casos:

a) (j, j) no está coloreado, así que ningún (i, j) lo está.

b) (j, j) está coloreado. En este caso, ninguno, alguno o todos los $n - 1$ cuadritos de $A = \{(1, j), \ldots, (j - 1, j), (j + 1, j), \ldots, (n, j)\}$ están coloreados. Como hay 2^{n-1} subconjuntos de A, incluyendo al conjunto vacío, tenemos 2^{n-1} posibles coloraciones de la columna j.

Por lo tanto, cada columna j se puede colorear de $1 + 2^{n-1}$ formas. Como son n columnas y la coloración de cada una es independiente del resto, tenemos $(1 + 2^{n-1})^n$ coloraciones confusas para cada entero $n \geq 1$.

Problema 8. Sean a y b enteros positivos tales que $2a^2 - 1 = b^{15}$. Demuestra que si $a > 1$, entonces a es múltiplo de 5.

Solución. Comenzamos demostrando el siguiente lema.
Lema. Para todo entero positivo n,

a) $\text{mcd}(n+1, n^2-n+1) = 1$ o 3.

b) $\text{mcd}(n+1, n^4-n^3+n^2-n+1) = 1$ o 5.

Demostración del Lema. Para la parte a), notemos que $n^2-n+1 = (n+1)(n-2)+3$. Luego, si d es divisor de $n+1$ y de n^2-n+1, entonces $d \mid 3$. De aquí se sigue el resultado.
La parte b) es análoga, observando que

$$n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 = (n+1)(n^3 - 2n^2 + 3n - 4) + 5. \qquad \square$$

De la ecuación $2a^2 - 1 = b^{15}$, tenemos que $2a^2 = b^{15} + 1 = (b^5+1)(b^{10} - b^5 + 1)$. Dado que el número $b^{10} - b^5 + 1$ siempre es impar, se sigue del apartado a) del lema anterior que $b^5 + 1 = 2u^2$ y $b^{10} - b^5 + 1 = v^2$, o $b^5 + 1 = 6u^2$ y $b^{10} - b^5 + 1 = 3v^2$. Además, para $a > 1$, tenemos que $b^5 > 1$, por lo que $(b^5-1)^2 < b^{10} - b^5 + 1 < (b^5)^2$, lo cual implica que $b^{10} - b^5 + 1$ no puede ser un cuadrado. Por lo tanto, el único caso posible es $b^5 + 1 = 6u^2$.
Por otro lado, tenemos que $(b^5+1) - (b^3+1) = b^3(b-1)(b+1)$ es divisible por el producto $(b-1)b(b+1)$ y, por lo tanto, es divisible por 3. Así, b^3+1 es divisible por 3, esto es, $b^3 = 3m - 1$. Haciendo $z = b^3 = 3m - 1$, tenemos que $z^5 + 1 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 2a^2$. Si $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ no es múltiplo de 5, se sigue del apartado b) del lema anterior que $z+1$ y $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ son primos relativos. Como $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ es impar, necesariamente $z + 1 = 2u^2$ y $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = v^2$. Pero, como $z \equiv -1 \pmod 3$, resulta que $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 \equiv 2 \pmod 3$, lo cual no puede ser porque todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 3. Por lo tanto, $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ es múltiplo de 5 y, en consecuencia, a es múltiplo de 5.

Problema 9. Demuestra que no existen dos sucesiones acotadas de números reales $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ con la siguiente propiedad: para cualesquiera enteros positivos m y n, con $m > n$,

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{o} \quad |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(Nota: una sucesión de números reales $x_1, x_2, \ldots$ está *acotada* si existe un número $N > 0$ tal que $|x_i| \leq N$ para todo entero $i \geq 1$).

Solución. Supongamos que sí existen tales sucesiones (a_n) y (b_n), esto es, existe un número real $N > 0$ tal que $|a_n| \leq N$ y $|b_n| \leq N$ para todo entero positivo n. Para cada entero positivo n, consideremos el cuadrado

$$C_n = \left\{ (x, y) : |x - a_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},\ |y - b_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \right\}.$$

Afirmamos que para $m \neq n$, estos cuadrados son disjuntos. En efecto, si $m > n$ y C_m, C_n se intersecan en (x, y), por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$|a_m - a_n| = |(a_m - x) + (x - a_n)| \leq |a_m - x| + |x - a_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

y

$$|b_m - b_n| = |(b_m - x) + (x - b_n)| \leq |b_m - x| + |x - b_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

lo cual contradice las hipótesis del problema.
Como estos cuadrados están contenidos en un cuadrado más grande de área $(2N+1)^2$, su área total ha de ser finita. Sin embargo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Área}(C_n) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty,$$

ya que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, estas sucesiones no existen.

Problema 10. Encuentra todos los números reales a, b y c del intervalo $(0,1]$ tales que

$$\text{mín}\left\{\sqrt{\frac{ab+1}{abc}}, \sqrt{\frac{bc+1}{abc}}, \sqrt{\frac{ac+1}{abc}}\right\} = \sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}}.$$

Solución de Titu Zvonaru. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 < a \leq b \leq c \leq 1$. Entonces,

$$\text{mín}\left\{\sqrt{\frac{ab+1}{abc}}, \sqrt{\frac{bc+1}{abc}}, \sqrt{\frac{ac+1}{abc}}\right\} = \sqrt{\frac{ab+1}{abc}}.$$

Demostraremos que

$$\sqrt{ab+1} \geq \sqrt{bc(1-a)} + \sqrt{ac(1-b)} + \sqrt{ab(1-c)}. \tag{21}$$

Aplicando la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{bc(1-a)} + \sqrt{ac(1-b)} &= \sqrt{c}\left(\sqrt{b(1-a)} + \sqrt{a(1-b)}\right)\\ &\leq \sqrt{c}\cdot\frac{b+1-a+a+1-b}{2} = \sqrt{c},\end{aligned}$$

con la igualdad si y solo si $a+b=1$.
Luego, es suficiente demostrar que $\sqrt{ab+1} \geq \sqrt{c} + \sqrt{ab(1-c)}$ para demostrar la desigualdad (21). Esta última desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$ab + 1 \geq c + ab(1-c) + 2\sqrt{abc(1-c)},$$

esto es, $abc + 1 - c \geq 2\sqrt{abc(1-c)}$, la cual es verdadera por la desigualdad MA-MG, con la igualdad si y solo si $abc = 1-c$.
La igualdad en (21) se sostiene si y solo si $a+b=1$ y $abc = 1-c$. Por lo tanto, las soluciones son:

$$0 < a \leq \frac{1}{2}, \quad b = 1-a, \quad c = \frac{1}{a(1-a)+1}$$

y sus permutaciones.

Solución alternativa. Sean r, s y t números reales mayores o iguales que 0 tales que $r^2 = \frac{1}{a} - 1$, $s^2 = \frac{1}{b} - 1$ y $t^2 = \frac{1}{c} - 1$, esto es,

$$a = \frac{1}{1+r^2}, \quad b = \frac{1}{1+s^2}, \quad c = \frac{1}{1+t^2}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t = \min\{r, s, t\}$. La igualdad requerida puede reescribirse en la forma

$$\sqrt{(1+t^2)(1+(1+r^2)(1+s^2))} = r + s + t.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$(r+s+t)^2 \leq ((r+s)^2+1)(1+t^2),$$

con la igualdad si y solo si $r + s = \ell$ y $1 = \ell t$ para algún número positivo ℓ.
La desigualdad anterior implica que $(1+r^2)(1+s^2) \leq (r+s)^2$, que es equivalente a $(rs-1)^2 \leq 0$. Solo la igualdad es cierta aquí, esto es, $rs = 1$ y todas las desigualdades anteriores son igualdades. Luego, $t(r+s) = 1$.
Recíprocamente, si $rs = 1$ y $t(r+s) = 1$, con $t = \frac{1}{r+s}$ aún menor que ambos $\frac{1}{r} = s$ y $\frac{1}{s} = r$, la condición del problema se satisface.
Por lo tanto, las soluciones son

$$a = \frac{1}{1+r^2}, \quad b = \frac{1}{1+\frac{1}{r^2}}, \quad c = \frac{(r+\frac{1}{r})^2}{1+(r+\frac{1}{r})^2}$$

y sus permutaciones, donde $r > 0$.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (CdMx)

La cuarta etapa del Concurso de Primaria y Secundaria 2022-2023 de la Ciudad de México, correspondiente a la 7^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB), se llevó a cabo el sábado 25 de marzo de 2023. En el nivel 2, participaron 44 estudiantes de sexto grado de primaria y 51 estudiantes de primero de secundaria. La prueba constó de 11 problemas: 10 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto y un problema de redacción libre. La duración máxima del examen fue de 90 minutos.
A continuación, presentamos el examen de la cuarta etapa del nivel 2 de la 7^a OMMEB de la Ciudad de México.

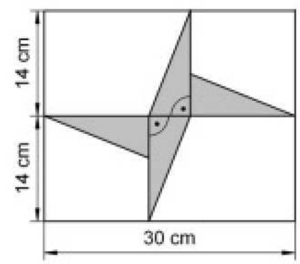
1) De los 225 alumnos del colegio Michi, 144 juegan tenis, 130 juegan fútbol y 96 practican ambos deportes. ¿Cuántos no juegan ni tenis ni fútbol?

2) Los hermanos Diego y Carlos van andando al mismo colegio. Diego tarda veinte minutos en llegar al colegio y Carlos media hora. Hoy Diego ha salido de casa cinco minutos después que Carlos. Si van por el mismo trayecto, ¿al cabo de cuántos minutos alcanzará Diego a Carlos?

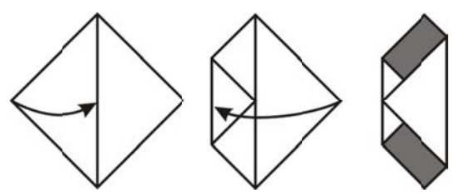
3) Si sumo todos los números de tres cifras que terminan en 7 y a esa suma le resto la suma de todos los números de tres cifras que terminan en 5, ¿qué número obtengo?

4) En una caja de zapatos tengo todos mis tesoros. Si consigo dos brillantes más, tendré tantos brillantes como canicas. Si regalo tres canicas tendré tantas canicas como conchas marinas. Tengo tantas castañas como brillantes, canicas y conchas marinas juntas. Además, tengo dos caracolas. Si en total hay 190 objetos, ¿cuántos brillantes tengo?

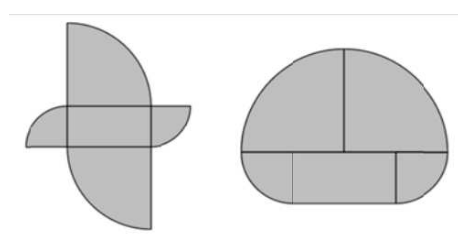
5) La figura muestra un rectángulo con cuatro triángulos idénticos en su interior. ¿Cuál es la suma de las áreas de los 4 triángulos?



6) Una pieza cuadrada de papel de área 64 cm^2 se dobla dos veces como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale la suma de las áreas de las dos secciones grises?

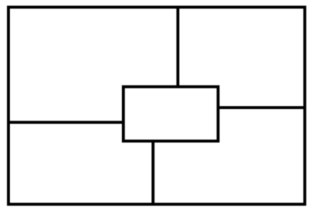


7) Las dos figuras que se muestran, están hechas con las mismas 5 piezas. El rectángulo tiene dimensiones 5 cm $\times 10$ cm. Las otras piezas son, cada una, la cuarta parte de una circunferencia. ¿Cuál es la diferencia entre el perímetro de ambas figuras?

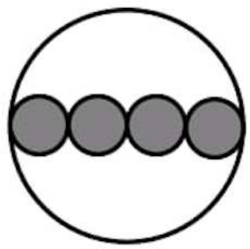


8) El año 2023 es un año *suma siete* porque sus cifras suman 7. ¿Cuántos años suma siete hay entre los años 2000 y 3000?

9) La bandera que he inventado tiene cinco regiones y quiero colorearla con mis colores favoritos: negro, blanco y rosa. ¿De cuántas maneras podré hacerlo si dos regiones vecinas no pueden tener el mismo el color?



10) Estás viendo una vivienda para pulgas. En cada uno de los cuatro círculos iguales caben 6 pulgas. ¿Cuántas pulgas caben en la zona blanca?



En la siguiente pregunta debes escribir toda la explicación del procedimiento que utilizaste para llegar a la respuesta.

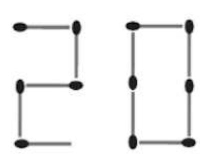
11) La gata Pezuñas tiene 7 gatitos. Los gatitos son de los siguientes colores y combinaciones de colores: blanco, negro, naranja, blanco-negro, naranja-blanco, naranja-negro y naranja-blanco-negro. ¿De cuántas formas se puede elegir a 4 gatitos de tal manera que cada pareja entre ellos tenga al menos un color en común?

Concurso Metropolitano 2023 (CdMx)

La primera etapa del Concurso Metropolitano 2023 de la Ciudad de México, correspondiente a la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas y al 3^{er} Concurso Nacional Femenil, se llevó a cabo entre el 17 y el 25 de abril de 2023. Se contó con la participación de 38723 estudiantes de la Ciudad de México de todos los niveles educativos preuniversitarios. La prueba consistió de 12 problemas de opción múltiple que se puntuaron de la siguiente manera: cada respuesta correcta vale 5, cada respuesta en blanco vale 0 y cada respuesta incorrecta vale -1.

A continuación, presentamos el examen de la primera etapa del Concurso Metropolitano 2023 de la Ciudad de México. Los alumnos tuvieron 60 minutos para resolverlo.

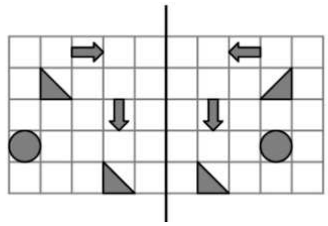
1) Ami tiene una caja con 30 cerillos. Usando algunos de esos cerillos forma el número 2023. Ami ya ha formado los primeros dos dígitos, como se muestra en la figura.



¿Cuántos cerillos le quedarán en la caja para cuando haya terminado de escribir el número?

(a) 5 (b) 9 (c) 10 (d) 19 (e) 21

2) Varios símbolos se dibujan sobre una pieza de papel, como se muestra en la figura.



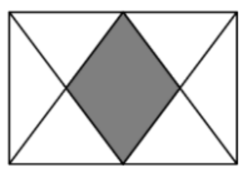
Naty dobla el papel a lo largo de la línea vertical hacia la derecha. ¿Cuántos símbolos del lado izquierdo quedan encimados perfectamente sobre una figura igual del lado derecho?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

3) Soy un número y soy menor que mi mitad y mayor que mi doble. Si me sumas con mi cuadrado el resultado es 0. ¿Qué número soy?

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2

4) Los puntos medios de los lados más grandes del rectángulo, se conectan con los vértices del rectángulo, como se muestra en la figura.



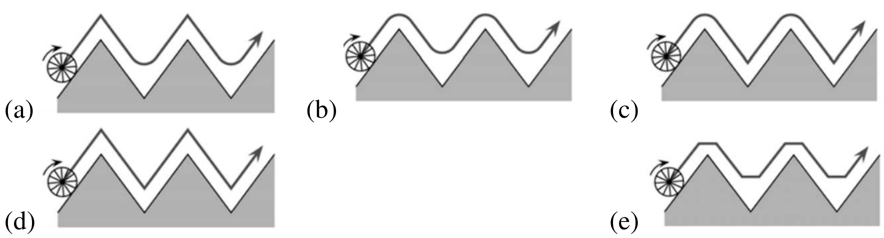
¿Qúe fracción del área del rectángulo está sombreada?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{2}{5}$

5) Una vez conocí a seis hermanas cuyas edades eran seis enteros consecutivos. Le pregunté a cada una: ¿qué edad tiene la mayor de tus hermanas?
¿Cuál de los siguientes números no puede ser la suma de las seis respuestas?

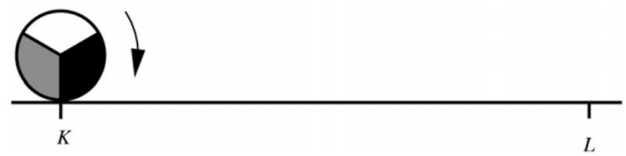
(a) 95 (b) 125 (c) 167 (d) 205 (e) 233

6) Una rueda gira a lo largo de un zigzag. ¿Cuál de las siguientes figuras muestra la línea que describe el centro de la rueda?

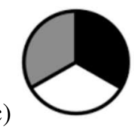


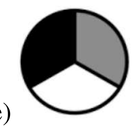
(a) (b) (c) (d) (e)

7) Un círculo de radio 1 cm rueda a lo largo de una línea recta desde el punto K hasta el punto L, como se muestra.



Sabemos que $KL = 11\pi$ cm. ¿En qué posición está el círculo cuando llega a L?

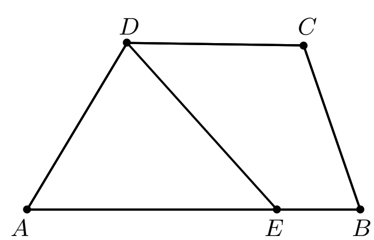
(a)  (b)  (c) 

(d)  (e) 

8) En una boda, un octavo de los invitados son menores de edad. Tres séptimos de los adultos invitados (personas mayores de edad en la fiesta) son hombres. ¿Cuál es la proporción de mujeres adultas en la fiesta?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{7}$ (e) $\frac{3}{7}$

9) $ABCD$ es un trapecio con lados paralelos AB y CD. Sabemos que $AB = 50$ cm y $CD = 20$ cm. El punto E está sobre el lado AB y es tal que la línea DE divide al trapecio in dos figuras de áreas iguales. ¿Cuánto mide el segmento AE?



(a) 25 cm (b) 30 cm (c) 35 cm (d) 40 cm (e) 45 cm

10) ¿Cuántos enteros positivos n tienen la propiedad de que exactamente uno de los dos números n y $n + 20$ tiene cuatro dígitos?

(a) 19 (b) 20 (c) 38 (d) 39 (e) 40

11) Un hotel tiene tres albercas: A, B y C. Una hormiga que siempre corre a la misma velocidad, juega a dar vueltas a las albercas. Sabemos que en el mismo tiempo que la hormiga le da 4 vueltas a la alberca B, la hormiga le da 5 vueltas a la alberca

A. Además, sabemos que la hormiga tarda el mismo tiempo en darle 6 vueltas a la alberca B que 7 vueltas a la alberca C. El perímetro de C es de 30 m. ¿Cuánto mide el perímetro de A?

(a) 27 m (b) 28 m (c) 29 m (d) 30 m (e) 31 m

12) Un número *popular* se construye a partir de un número de dos dígitos a y b como sigue: se escriben los dos dígitos tres veces una tras otra, formando así un número de seis dígitos. Este nuevo número popular es siempre divisible por

(a) 2 (b) 5 (c) 7 (d) 9 (e) 11

36^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas Concurso Nacional

Del 6 al 11 de noviembre de 2022 se llevó a cabo en Oaxtepec, Morelos, el Concurso Nacional de la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de 188 estudiantes provenientes de los 32 Estados del país. Cada Estado participó con 6 estudiantes, excepto Campeche que participó solo con 2.

Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

1. Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
2. Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
3. Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).
4. Eric Ransom Treviño (Nuevo León).
5. Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León).
6. Diego Caballero Ricaurte (Ciudad de México).
7. Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur).
8. Emiliano Hernández Barranco (Ciudad de México).
9. Luis Veudi Vivas Pérez (Quintana Roo).
10. David García Maldonado (Oaxaca).
11. Carlos Fernando Martínez Quintero (Ciudad de México).
12. Franco Giosef Álvarez González (Chiapas).
13. Mateo Iván Latapí Acosta (Ciudad de México).
14. Juan Alfonso Pérez Mondragón (Puebla).
15. Enrique Rabell Talamantes (Querétaro).
16. Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa).

Los 9 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

1. Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos).
2. Leonardo Melgar Rubí (Morelos).
3. Juan Luis Manríquez Sequera (Baja California Sur).
4. Iker Torres Terrazas (Chihuahua).
5. Sebastián Daw Bonilla (Querétaro).
6. Rodrigo Saldívar Mauricio (Zacatecas).
7. Rafael Argumedo Solís (Zacatecas).
8. Isaac Emanuel Rodríguez Ibarra (Chiapas).
9. Sofía Constanza Santisteban Dávila (Quintana Roo).

Las 8 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

1. Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
2. Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos).
3. Claudia Itzel Pérez Lara (Hidalgo).
4. María Fernanda López Tuyub (Yucatán).
5. Andrea Escalona Contreras (Morelos).
6. Camila Campos Juárez (Sinaloa).
7. Ana Camila Cuevas González (Tamaulipas).
8. Isabela Loredo Carvajal (Tamaulipas).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 36^a OMM.

1. Nuevo León.
2. Ciudad de México.
3. Jalisco.
4. Morelos.
4. Guerrero.
6. Baja California Sur.
7. Aguascalientes.
8. Sinaloa.
9. San Luis Potosí.
10. Chiapas.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por Sonora. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Nayarit y Baja California Sur, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del 36 Concurso Nacional de la OMM. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Un número x es *Tlahuica* si existen números primos positivos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tales que

$$x = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k}.$$

Determina el mayor número Tlahuica x que satisface las dos propiedades siguientes:
1) $0 < x < 1$,
2) existe un número entero $0 < m \leq 2022$ tal que mx es un número entero.

(Problema sugerido por David Torres Flores).

Solución de Carlos Fernando Amador Martínez Quintero. Se probará que el número buscado es $x = \frac{1805}{1806}$. Nótese que $\frac{1805}{1806} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}$, $1806x = 1805$ es un entero, $1806 \leq 2022$ y $0 < \frac{1805}{1806} < 1$, por lo que x es Tlahuica. Resta probar que x es el mayor número Tlahuica que cumple 1) y 2). Como x es una suma de números racionales positivos, x es un número racional positivo, esto es, $x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$. Como existe $0 < m \leq 2022$ tal que $mx = \frac{mp}{q} \in \mathbb{N}$, entonces $q \mid mp$. Pero $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$, por lo que $q \mid m$; en particular, $q \leq m$, llegando así a que $q \leq m \leq 2022$, de donde se sigue que, en su forma reducida, el denominador de x es a lo más 2022. Como $x = \frac{p}{q} < 1$, entonces $p \leq q - 1$. Pero, si $p \leq q - 2$, como $q \leq 2022 < 1806 \cdot 2$, entonces $\frac{1}{1806} < \frac{2}{q}$ y, por lo tanto, $x = \frac{p}{q} \leq \frac{q-2}{q} = 1 - \frac{2}{q} < 1 - \frac{1}{1806} = \frac{1805}{1806}$, lo que es una contradicción, por lo que

$$p = q - 1. \tag{22}$$

Por otra parte, sabemos que existen números primos positivos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tales que

$$x = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{p_2 p_3 \cdots p_k + p_1 p_3 \cdots p_k + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}{p_1 p_2 \cdots p_k}. \tag{23}$$

Si el numerador y el denominador tuvieran un factor en común mayor a 1, este sería múltiplo de alguno de los p_i; en particular, tendríamos que p_i divide a la suma

$$p_2 p_3 \cdots p_k + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_{k-1}.$$

Pero todos los términos de esta suma, salvo el i-ésimo término, son múltiplos de p_i, por lo que p_i divide al i-ésimo término, lo cual es imposible, llegando así a que la fracción (23) es reducida. Luego, por (22), tenemos que

$$p_2 p_3 \cdots p_k + p_1 p_3 \cdots p_k + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_{k-1} = p_1 p_2 \cdots p_k - 1.$$

Por otra parte, notemos que si $k \geq 5$, entonces $p_1 p_2 \cdots p_k \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 2022$, por lo que $k \leq 4$. Si $k = 1$, entonces $\frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{2} < \frac{1805}{1806}$. Si $k = 2$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1805}{1806}$. Si $k = 3$, tenemos que $p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + 1 = p_1 p_2 p_3$, esto es,

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_1 p_2 p_3}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p_1 < p_2 < p_3$. Si $p_1 \geq 3$, entonces

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{72}{105},$$

lo que es una contradicción y, por consiguiente, $p_1 = 2$.
Tenemos entonces que $2p_2p_3 = 1 + p_2p_3 + 2p_2 + 2p_3$, esto es, $(p_2 - 2)(p_3 - 2) = 5$, de donde se sigue que $p_2 = 3$ y $p_3 = 7$. Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42} < \frac{1805}{1806}$, concluimos que $k = 4$. Análogamente, si $3 \leq p_1 < p_2 < p_3 < p_4$, entonces

$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_1 p_2 p_3 p_4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{887}{1155},$$

lo que es una contradicción y, por consiguiente, $p_1 = 2$.
Similarmente, si $p_2 \geq 5$, entonces

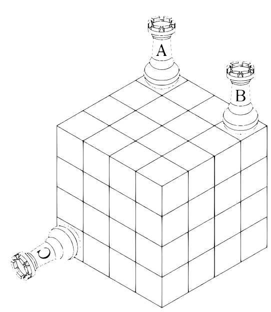
$$1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_1 p_2 p_3 p_4} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{720}{770},$$

lo que es una contradicción, por lo que $p_2 = 3$. Luego,

$$6p_3p_4 = 1 + 3p_3p_4 + 2p_3p_4 + 6p_4 + 6p_3,$$

esto es, $(p_3 - 6)(p_4 - 6) = 37$, de donde se sigue que $p_3 = 7$ y $p_4 = 43$.

Problema 2. Sea n un entero positivo. David tiene 6 tableros de ajedrez de $n \times n$ que ha dispuesto de manera que formen las 6 caras de un cubo de $n \times n \times n$. Se dice que dos casillas a y b de este nuevo tablero cúbico están *alineadas*, si podemos conectarlas por medio de un camino de casillas $a = c_1, c_2, \ldots, c_m = b$ de manera que cada pareja de casillas consecutivas en el camino comparten un lado y los lados que la casilla c_i comparte con sus vecinas son lados opuestos del cuadrado c_i, para $i = 2, 3, \ldots, m-1$. Diremos que dos torres colocadas sobre el tablero se *atacan*, si las casillas que ocupan están alineadas. David coloca algunas torres sobre el tablero de forma que ninguna ataque a otra. ¿Cuál es la máxima cantidad de torres que David puede colocar?

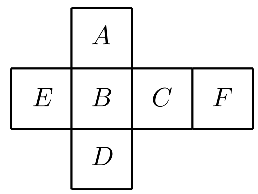


La figura muestra un ejemplo con $n = 4$, donde A y B se atacan, A y C se atacan, pero no se atacan B y C.

(Problema sugerido por José Alejandro Reyes González)

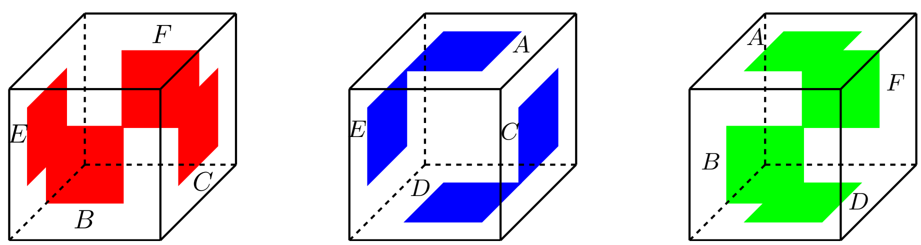
.

Solución de Daniel Ramírez Kühn. Etiquetemos las caras del cubo como se muestra en la figura.

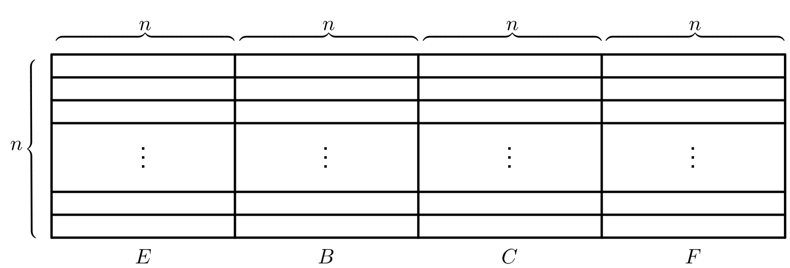


Consideremos los siguientes conjuntos de caras.

$X = \{E, B, C, F\}$ $\quad$ $Y = \{A, C, D, E\}$ $\quad$ $Z = \{A, B, D, F\}$

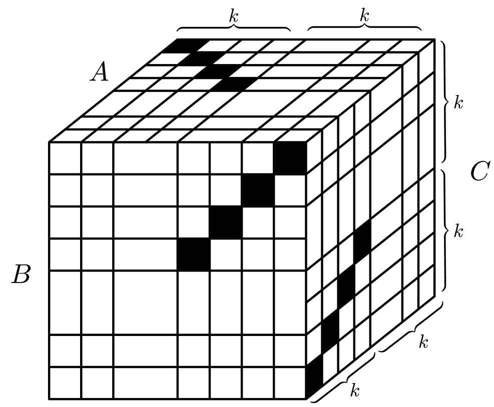


Notemos que en cualquiera de los conjuntos X, Y, Z, se pueden colocar a lo más n torres sin que se ataquen, pues si hay $n + 1$ torres, entonces por el principio de las casillas, hay al menos dos torres en la misma fila. La siguiente figura muestra las filas en el conjunto X.

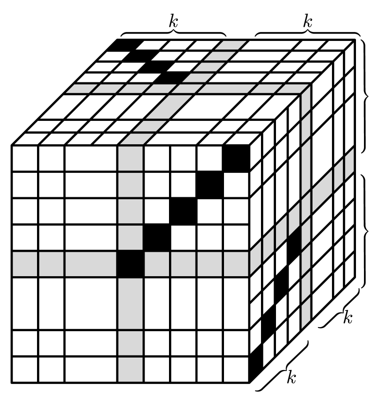


De esta manera, llegamos a que se pueden colocar a lo más $3n$ torres. Pero cada torre pertenece a exactamente dos de los conjuntos X, Y, Z, por lo que se necesitan a lo más $\frac{3n}{2}$ torres. Probaremos que es posible encontrar una solución con $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ torres.

- **Caso 1:** n es par. Si $n = 2k$ para algún entero positivo k, es posible encontrar una solución con $\frac{3n}{2} = 3k$ torres colocando k torres en la cara A, k torres en la cara B y k torres en la cara C, como se muestra en la siguiente figura.



- **Caso 2:** n es impar. Si $n = 2k + 1$ para algún entero positivo k, existe una solución con $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor = 3k + 1$ torres, colocando k torres en la cara A, $k + 1$ torres en la cara B y k torres en la cara C, como se muestra en la siguiente figura.



Problema 3. Sea $n > 1$ un entero y sea $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ la lista completa de sus divisores positivos, incluidos 1 y n. Los m instrumentos de una orquesta matemática se disponen a tocar una pieza musical de m segundos, donde el instrumento i tocará exactamente una nota de tono d_i durante s_i segundos (no necesariamente consecutivos), donde d_i y s_i son enteros positivos. Decimos que esta pieza tiene *sonoridad*

$$S = s_1 + s_2 + \cdots + s_m.$$

Un par de notas de tonos a y b son *armónicas* si $\frac{a}{b}$ o $\frac{b}{a}$ es un entero. Si cada instrumento toca al menos un segundo y cada par de notas que suenan al mismo tiempo son armónicas, demuestra que la máxima sonoridad posible de la pieza es un número compuesto.

(Problema sugerido por José Alejandro Reyes González).

Solución de Enrique Rabell Talamantes. Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la factorización en primos de n y sea $T = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + 1$. Probaremos que si la sonoridad S de una pieza es la máxima, entonces en cualquier segundo de la pieza hay T instrumentos sonando.

Primero, veamos que es posible formar una pieza con T instrumentos tocando al mismo tiempo. Nótese que si $a_1 = 1$ y $a_i = p_r a_{i-1}$ para $i > 1$, donde p_r es alguno de los factores primos de n, entonces $a_i \mid a_j$ siempre que $i < j$, por lo que todos los a_i son armónicos por pares. Formaremos la lista de instrumentos $a_1, a_2, \ldots, a_T$ en dos partes. Para la primera parte, sea d_i un divisor de n, el cual es de la forma $d_i = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ con $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$. Formaremos la primera parte de la lista $a_1, a_2, \ldots, a_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k+1}$ como sigue:

$$1,\ p_1,\ p_1^2, \ldots,\ p_1^{\beta_1},\ p_1^{\beta_1} p_2,\ p_1^{\beta_1} p_2^2,\ \ldots,\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} = d_i. \tag{24}$$

Para la segunda parte, multiplicamos a $d_i = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ por el p_i más pequeño que cumpla que $\beta_i < \alpha_i$, tantas veces como sea necesario para formar un factor de $p_i^{\alpha_i}$ y, repetimos este paso, hasta llegar a $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = n$, como se muestra a continuación (asumiendo que $\beta_i < \alpha_i$ para todo i):

$$p_1^{\beta_1+1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k},\ \ldots,\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k},\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\beta_2+1} \cdots p_k^{\beta_k},\ \ldots,\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = n. \tag{25}$$

Combinando las listas (24) y (25), formamos la lista $a(d_i)$, cuyos elementos son todos divisores de n. Nótese que esta lista es tal que $a_j = p_r a_{j-1}$ para todo $j > 1$, por lo que todos sus elementos son armónicos por pares. Más aún, dicha lista está formada por $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + 1 = T$ términos, como queríamos. Para formar una pieza con T instrumentos sonando al mismo tiempo, tocamos en el segundo i los instrumentos que tocan las notas de la lista $a(d_i)$.

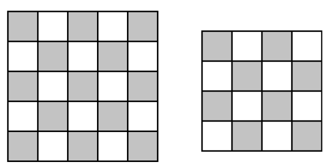
Resta probar que no es posible usar más de T instrumentos en cada momento de tal forma que todos sean armónicos por pares. Sea $b_1 < b_2 < \cdots < b_R$ la lista de instrumentos que tocan en algún segundo de la pieza. Como los b_i son armónicos por pares, tenemos en particular que, para todo i, $b_i \mid b_{i+1}$ o $b_{i+1} \mid b_i$. Pero $b_i < b_{i+1}$, por lo que se debe cumplir que $b_i \mid b_{i+1}$. Para maximizar R, se debe cumplir que $b_1 = 1$ y $b_{i+1} = b_i c$, con c primo. Sabemos que $b_R \leq n$, pues $b_R \mid n$, y que hay $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ primos (no necesariamente distintos) por los cuales podemos multiplicar para formar la lista, por lo que dicha lista tendrá $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + 1 = T$ elementos. Si $R > T$, entonces habremos multiplicado por más primos de los que dividen a n, por lo que $b_R \nmid n$, llegando a una contradicción.

Como la pieza dura m segundos y en cada segundo tocan T instrumentos, alcanzamos una sonoridad de $S = m \cdot T$, con $m > 1$ y $T > 1$, probando así que S es un número compuesto.

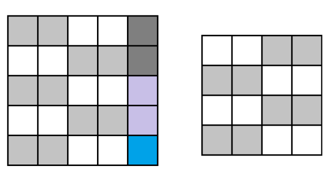
Problema 4. Sea n un entero positivo. En un jardín de $n \times n$ cuyos lados dan al Norte, Sur, Este y Oeste, se va a construir una fuente usando plataformas de 1×1 que cubran todo el jardín.
Ana colocará las plataformas todas a diferente altura. Después, Beto pondrá salidas de agua en algunas de las plataformas.
El agua de cada plataforma puede bajar a las plataformas contiguas (hacia el Norte, Sur, Este y Oeste) que tengan menor altura que la plataforma de donde viene el agua, siguiendo su flujo siempre que pueda dirigirse a plataformas de menor altura. El objetivo de Beto es que el agua llegue a todas las plataformas.
¿Cuál es el menor número de salidas de agua que Beto necesita tener disponibles a fin de garantizar que podrá lograr su objetivo, sin importar cómo Ana haya acomodado las plataformas?

(Problema sugerido por Isaías Fernando de la Fuente Jiménez).

Solución. Beto necesitará tener disponibles $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ salidas de agua para poder lograr su objetivo y esta cantidad es suficiente. Dividamos esto en dos partes.
Son necesarias $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ salidas de agua. Notemos que Ana podría primero considerar un coloreado como tablero de ajedrez sobre el jardín, como se ejemplifica a continuación con tableros de 5×5 y 4×4.



Después, Ana coloca las $\lceil \frac{n^2}{2} \rceil$ plataformas de mayor altura sobre los cuadrados sombreados, en cualquier orden, y las demás plataformas en los cuadrados sin sombrear en cualquier orden. Es claro que el flujo de una plataforma sombreada no puede llegar a ninguna otra plataforma sombreada y, por lo tanto, cada plataforma sombreada tendrá que tener su propia salida de agua. Esto muestra que Beto necesita tener disponibles $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ salidas de agua para poder lograr su objetivo.
Son suficientes $\lceil \frac{n^2}{2} \rceil$ salidas de agua. Para mostrar que ningún otro acomodo necesita más salidas de agua, Beto cubre el tablero de ajedrez usando $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ dominós (posiblemente dejando una casilla vacía), como se muestra a continuación con tableros de 5×5 y 4×4.



Luego, Beto puede poner una salida de agua en la plataforma de cada dominó que tenga mayor altura, así como en la casilla que queda vacía en el caso de jardines de tamaño impar. El flujo del agua de cada una de estas plataformas llegará a la otra plataforma del mismo dominó y, por lo tanto, a toda la fuente. Esto muestra que son suficientes tener disponibles $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ salidas de agua para que Beto logre su objetivo en cualquier tablero.

Problema 5. Sea $n > 1$ un entero positivo y sean $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ sus m divisores positivos de manera que $d_1 = 1$ y $d_m = n$. Lalo escribe los siguientes $2m$ números en un pizarrón:

$$d_1,\ d_2, \ldots, d_m,\ d_1 + d_2,\ d_2 + d_3, \ldots, d_{m-1} + d_m,\ N,$$

donde N es un entero positivo. Después Lalo borra los números repetidos (por ejemplo, si un número aparece dos veces, él borrará uno de los dos). Después de esto, Lalo nota que los números en el pizarrón son precisamente la lista completa de divisores positivos de N. Encuentra todos los posibles valores del entero positivo n.

(Problema sugerido por José Alejandro Reyes González).

Solución de Diego Caballero Ricaurte. Notemos que $d_{m-1} + d_m > d_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y, que $d_{m-1} + d_m > d_{i-1} + d_i$, para todo $i \in \{2, \ldots, m-1\}$. Como todos los números en la lista son divisores de N, entonces $d_{m-1} + d_m$ es el segundo término más grande de la lista, pues d_m divide a N y no divide a $d_{m-1} + d_m$. Similarmente, notemos que d_2 es el divisor de N más pequeño que es distinto de 1.
Es bien sabido que si los divisores de n son $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_m = n$, entonces $n = d_k d_{m-k+1}$, por lo que $d_2(d_{m-1} + d_m) = N$. Pero $d_m = n$ y $d_2 d_{m-1} = n$, así que

$$N = d_2(d_{m-1} + d_m) = d_2 d_{m-1} + d_2 d_m = n + d_2 n = n(d_2 + 1).$$

Por otra parte, todo divisor de d_2 divide también a n, pero no existen divisores de n entre $d_1 = 1$ y d_2, por lo que el único divisor propio de d_2 es 1, llegando así a que d_2 es primo. Más aún, d_2 es el menor primo que divide a n. Como la lista

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_m,\ d_1 + d_2,\ d_2 + d_3,\ \ldots,\ d_{m-1} + d_m,\ N,$$

tiene $2m$ números, al eliminar los números repetidos, habrá a lo más $2m$ números, por lo que N tiene a lo más $2m$ divisores. Se probará que $d_2 = 2$.
Supongamos que $d_2 + 1$ es compuesto. Si existen primos distintos p y q que dividen a $d_2 + 1$, como d_2 es primo relativo con $d_2 + 1$, tenemos que p y q son menores que d_2. Como no existen divisores de n menores que d_2 y distintos de 1, tenemos que p y q no dividen a n, así que npq tiene al menos $4m$ divisores. Pero N tiene a lo más $2m$ divisores y $npq \mid n(d_2 + 1) = N$, llegando así a una contradicción. Esto significa que $d_2 + 1$ es potencia de un primo, esto es, si $d_2 + 1$ es compuesto, entonces $d_2 + 1 = p^\alpha$ para algún primo p y $\alpha \geq 2$. Nuevamente, $p < d_2$ así que $p \nmid n$, pero en este caso, $N = p^\alpha n$ tiene $(\alpha + 1)m \geq 3m$ divisores, llegando a una contradicción, por lo que $d_2 + 1$ es primo y, como la única posibilidad es $d_2 = 2$, se sigue que

$N = n(d_2 + 1) = 3n$.
Supongamos que $3 \mid n$, así que $d_3 = 3$. Luego, $\frac{n}{2} = d_{m-1}$ y $\frac{n}{3} = d_{m-2}$ son divisores consecutivos de n, así que $\frac{n}{2} + \frac{n}{3} \mid N$ y, como $3n = N$, llegamos a que $\frac{5n}{6} \mid 3n$, esto es, $5 \mid 18$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $3 \nmid n$.
Como $3 \nmid n$, 3 no es un factor primo de n, y como n tiene m divisores, entonces $3n$ tiene $2m$ divisores. Como la lista originalmente tenía $2m$ números, entonces no se borró ningún número y, como los divisores de $3n$ son los m divisores de n y los números de la forma $3d$ con d divisor de n, llegamos a que $d_1 + d_2, d_2 + d_3, \ldots, d_{m-1} + d_m$, son todos múltiplos de 3. Además, como $d_1 + d_2 < d_2 + d_3 < \cdots < d_{m-1} + d_m$, sucede que

$$\begin{aligned}
3d_2 = d_2 + d_3 &\Rightarrow 2d_2 = d_3 \Rightarrow d_3 = 2^2,\\
3d_3 = d_3 + d_4 &\Rightarrow 2d_3 = d_4 \Rightarrow d_4 = 2^3,\\
&\vdots\\
3d_{m-1} = d_{m-1} + d_m &\Rightarrow 2d_{m-1} = d_m \Rightarrow n = d_m = 2^{m-1}.
\end{aligned}$$

Llegando así a que los posibles valores de n son las potencias de 2. En efecto, dado $n = 2^k$, los números de la lista

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^k,\ 3,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 2^2,\ \ldots,\ 3\cdot 2^{k-1},\ 3\cdot 2^k,$$

satisfacen las condiciones del problema.

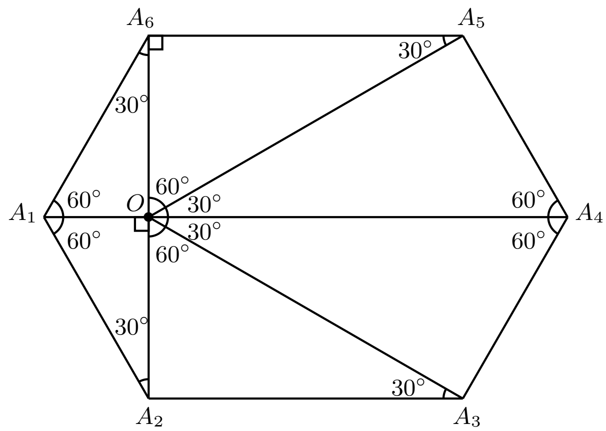
Problema 6. Encuentra todos los enteros $n \geq 3$, tales que existe un polígono convexo de n lados $A_1A_2\ldots A_n$, que tenga las siguientes características:

- todos los ángulos internos de $A_1A_2\ldots A_n$ son iguales,
- no todos los lados de $A_1A_2\ldots A_n$ son iguales y,
- existe un triángulo T y un punto O en el interior de $A_1A_2\ldots A_n$ tal que los n triángulos $OA_1A_2, OA_2A_3, \ldots, OA_{n-1}A_n, OA_nA_1$, son todos semejantes a T.

Notas: 1. Un polígono es convexo si todos sus ángulos internos son menores a $180°$ y sus lados no se intersecan entre sí. **2**. Los triángulos $OA_1A_2, OA_2A_3, \ldots, OA_{n-1}A_n$ y OA_nA_1 no necesariamente son semejantes a T con sus vértices en el mismo orden. Por ejemplo, podría ser que OA_1A_2 fuera directamente semejante a A_2A_3O pero no a OA_2A_3 y la condición se seguiría cumpliendo.

(Problema sugerido por José Alejandro Reyes González).

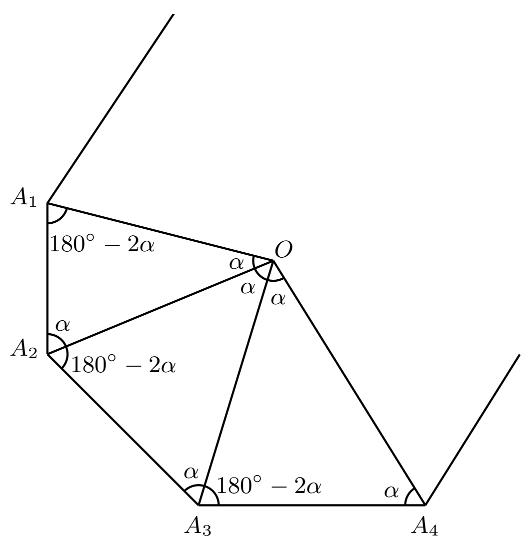
Solución de Luis Eduardo Martínez Aguirre. Para $n = 6$, la siguiente figura satisface las condiciones del problema, pues si $A_2A_3 = a$, tenemos que $OA_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ y $A_1A_2 = \frac{2a}{3} = A_1A_6$.



Supongamos que existe un polígono de $n \neq 6$ lados que satisface las condiciones del problema. Como todos los ángulos internos son iguales, cada uno mide

$$k = \frac{180°(n-2)}{n} \neq 120°.$$

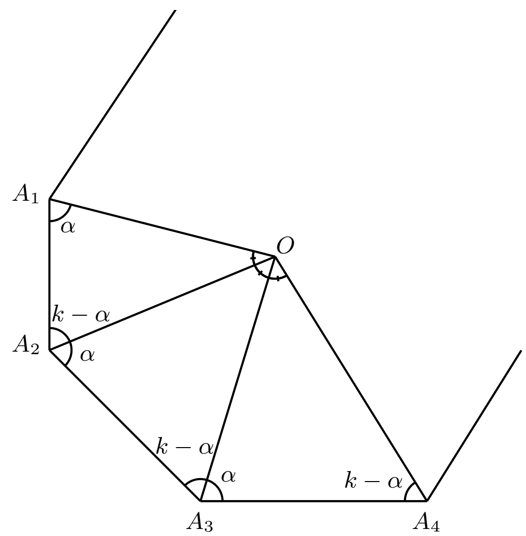
Lema 1. Los ángulos internos de T no pueden ser de la forma α, α, $180° - 2\alpha$ con $\angle A_iOA_{i+1} \neq 180° - 2\alpha$ para todo i (considerando los índices i módulo n).



Demostración. Supongamos, por contradicción, que los ángulos internos de T son de la forma α, α, $180° - 2\alpha$ con $\angle A_iOA_{i+1} \neq 180° - 2\alpha$ para todo i. Entonces, todos los triángulos deben ser semejantes en ese orden, esto es, $\angle OA_iA_{i+1} = 180° - 2\alpha$ y $\angle OA_{i+1}A_i = \alpha$. Sean $A_1A_2 = a$ y $\frac{OA_2}{A_1A_2} = r$, es decir, $OA_2 = ar$. Como los triángulos A_iOA_{i+1} son semejantes a T y $OA_i = A_iA_{i+1}$, tenemos que $OA_{i+1} = ar^i$

y $A_iA_{i+1} = ar^{i-1}$. En particular, tenemos que $OA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2} = ar^i$, de donde se sigue que $A_{n-1}A_n = ar^{n-2}$, $A_nA_1 = ar^{n-1}$ y $A_1A_2 = ar^n$. Pero $A_1A_2 = a$, por lo que $r = 1$, en cuyo caso T es equilátero y $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$, lo que es una contradicción. $\square$

Lema 2. Los ángulos internos internos de T no pueden ser de la forma α, $k-\alpha$, $180-k$ y $\angle A_iOA_{i+1} = 180° - k$ con $x \neq k-x$ para todo i (considerando los índices i módulo n).



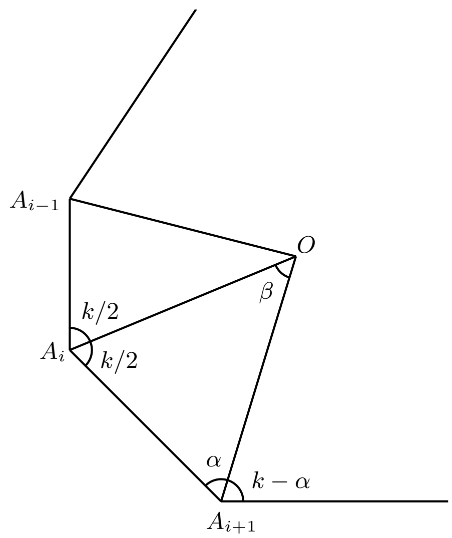
Demostración. Sean $OA_1 = a$ y $\frac{OA_2}{OA_1} = r$, es decir, $OA_2 = ar$. Como los triángulos A_iOA_{i+1} son semejantes a T, tenemos que $\frac{OA_i}{OA_{i+1}} = r$, por lo que $OA_i = ar^{i-1}$. En particular, tenemos que $OA_n = ar^{n-1}$ y $OA_1 = ar^n = a$. Pero $x \neq k-x$, por lo que T no es isósceles y $r \neq 1$, lo que es una contradicción. $\square$

Para cada i, supongamos que OA_i es bisectriz del ángulo $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, esto es, $\angle A_{i-1}A_iO = \angle OA_iA_{i+1} = \frac{k}{2}$. Sean $\alpha = \angle A_iA_{i+1}O$ y $\beta = \angle A_iOA_{i+1}$. Tenemos que $\angle OA_{i+1}A_{i+2} = k - \alpha$, por lo que $k - \alpha$ es un ángulo interno de T. Tenemos tres casos.

a) $k - \alpha = \alpha$, esto es, $\alpha = \frac{k}{2}$. Supongamos, por contradicción, que $\angle A_jOA_{j+1} = \frac{k}{2}$ para algún j. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\angle A_2OA_3 = \frac{k}{2}$. Entonces, $\angle OA_3A_2 = 180° - k$ y $\angle OA_3A_4 = 2k - 180°$. Recordemos que los ángulos internos de T miden $\frac{k}{2}$, $\frac{k}{2}$ y $180° - k$. Si $2k - 180° = \frac{k}{2}$, entonces $k = 120°$, lo cual es imposible, pues $n \neq 6$. Análogamente, si $2k - 180° = 180° - k$, obtenemos que $k = 120°$, lo cual es imposible. De esta forma, todos los triángulos son isósceles con $OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n$ y $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$, por lo que no se satisface la segunda condición del problema.

b) Si $k-\alpha=\frac{k}{2}$, obtenemos nuevamente que $\alpha=\frac{k}{2}$, lo que es una contradicción.

c) Si $k-\alpha=\beta$, obtenemos que $\alpha+\beta=k$. Como $\frac{k}{2}+\alpha+\beta=180^\circ$ por ser ángulos internos del triángulo A_iOA_{i+1}, resulta que $\frac{3k}{2}=180^\circ$, lo que es una contradicción, pues $n\neq 6$.



Como OA_i no es bisectriz del ángulo $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ para todo i, existe j tal que $\angle A_{j-1}A_jO=x$ y $\angle OA_jA_{j+1}=k-x$, con $x\neq k-x$. Luego, el triángulo T tiene ángulos internos iguales a x, $k-x$ y $180^\circ-x-(k-x)=180-k$. Supongamos que $\angle A_jA_{j+1}O=180^\circ-k$. Entonces, $\angle OA_{j+1}A_{j+2}=2k-180^\circ$, por lo que $2k-180^\circ$ es un ángulo interno de T. Si $2k-180^\circ=180^\circ-k$, entonces $k=120^\circ$, lo que es una contradicción, por lo que $2k-180^\circ\in\{x,k-x\}$. En cualquier caso, los ángulos internos de T miden $180^\circ-k$, $180^\circ-k$ y $2k-180^\circ$. Sea $\alpha=180^\circ-k$ y observemos que $180^\circ-2\alpha=2k-180^\circ$. Por el Lema 1, llegamos a una contradicción, por lo que $\angle A_jA_{j+1}O=x$ y $\angle OA_{j+1}A_{i+2}=k-x$. Por el Lema 2, llegamos a una contradicción, probando así que no existen polígonos de n lados que satisfagan las condiciones del problema para $n\neq 6$.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (Virtual)

Del 25 de noviembre al 2 de diciembre de 2022 se llevó a cabo la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC) organizada desde Costa Rica de forma virtual, en la que participaron 12 países y un total de 46 estudiantes. Una vez más y por catorce años consecutivos, México se ha posicionado como el líder indiscutible de esta competencia, obteniendo el primer lugar por países. En esta ocasión, México obtuvo 113 puntos quedando por encima de Colombia (72 puntos), Cuba (61 puntos) y Puerto Rico (61 puntos), quienes ocuparon el segundo y tercer lugar por países, respectivamente.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Emiliano Hernández Barranco (Ciudad de México),
- Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur),
- Luis Veudi Vivas Pérez (Quintana Roo),
- Alan Alejandro López Grajales (Chiapas).

Emiliano, Alonso y Luis Veudi obtuvieron medallas de oro, mientras que Alan obtuvo medalla de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Antonio Gómez Ortega (líder) y Sergio Guzmán Sánchez (tutor).

A continuación, presentamos los problemas de la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Se tiene un montón con 2022 piedras. Ana y Beto juegan por turnos al siguiente juego, comenzando por Ana: en cada turno, si hay n piedras en el montón, se pueden retirar $S(n)$ piedras o bien $n - S(n)$ piedras, donde $S(n)$ denota la suma de los dígitos del número n. La persona que retire la última piedra gana. Determine cuál de las dos personas tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

Problema 2. Ana, Beto, Carlos, Diana, Elena y Fabián se encuentran en un círculo, ubicados en ese orden. Cada uno de Ana, Beto, Carlos, Diana, Elena y Fabián tiene un papel, en los cuales están escritos inicialmente los números reales a, b, c, d, e, f, respectivamente. Al final de cada minuto, todas las personas reemplazan simultáneamente el número de su papel por la suma de tres números: los que había al principio del minuto en su papel y en los papeles de sus dos vecinos, el de la derecha y el de la izquierda. Al final del minuto 2022 se han hecho 2022 reemplazos y cada persona tiene escrito en su papel su número inicial. Determine todos los posibles valores de $abc + def$.
Nota: *Si al inicio del minuto N, Ana, Beto y Carlos tienen los números x, y, z, respectivamente, entonces al final del minuto N, Beto va a tener el número $x + y + z$.*

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H y circuncentro O. Sea D la intersección de las rectas AO y BH. Sea P el punto del segmento AB tal que $PH = PD$. Demuestre que los puntos B, D, O y P están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Sea $A_1A_2A_3A_4$ un rectángulo y sean S_1, S_2, S_3, S_4 cuatro circunferencias dentro del rectángulo tales que S_k y S_{k+1} son tangente externamente entre sí y ambas son tangentes al lado A_kA_{k+1} para $k = 1, 2, 3, 4$ donde $A_5 = A_1$ y $S_5 = S_1$. Demuestre que $A_1A_2A_3A_4$ es un cuadrado.

Problema 5. Esteban el alquimista tiene 8088 piezas de cobre, 6066 piezas de bronce, 4044 piezas de plata y 2022 piezas de oro. Él puede tomar dos piezas de metales distintos y usar un martillo mágico para convertirlas en dos piezas de metales distintos a los que tomó y distintos entre sí. Determine el mayor número de piezas de oro que puede obtener Esteban después de haber usado el martillo mágico un número finito de veces.
Nota: *Si Esteban toma una pieza de cobre y una de bronce, entonces las convierte en una pieza de plata y una de oro.*

Problema 6. Un entero positivo n es *inverosímil* si existen n enteros no necesariamente distintos tales que la suma y el producto de estos sean iguales a n. ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales a 2022 son inverosímiles?

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

Solución del problema 1. (Solución de Alan Alejandro López Grajales). La estrategia ganadora la tiene Ana. Sea k el número de piedras que hay en algún momento, después de algún número de jugadas. Veamos cuándo k es posición perdedora o ganadora.
Claramente, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, son posiciones ganadoras dado que $k - S(k) = k - k = 0$. Por otro lado, para $k = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$ son posiciones perdedoras ya que $k - S(k) \leq 9$ y el otro jugador tiene la estrategia ganadora. Además, tenemos que para $k = 19, 20, \ldots, 28, 29$, son posiciones ganadoras, ya que para $k = 19$ se pueden retirar $19 - (1 + 9) = 9$ piedras y el otro jugador tiene una posición perdedora. Mientras que para $k = 20, \ldots, 28, 29$, tenemos que $k - S(k) = 18$, que es una posición perdedora. En particular, tenemos que 6, 9 y 27 son posiciones ganadoras y 18 es posición perdedora. Veamos las opciones de movimientos partiendo desde 2022.
Si Ana comienza en 2022, puede retirar $2022 - S(2022) = 2022 - 6 = 2016$ piedras, lo que dejaría el montón con 6 piedras que es una posición ganadora para Beto. Por lo que Ana deberá elegir retirar $S(2022) = 6$ piedras, dejando el montón con 2016 piedras. Luego, Beto puede elegir retirar del montón $2016 - S(2016) = 2007$ piedras dejando el montón con 9 piedras, lo cual es una posición ganadora para Ana. Por lo que Beto debe elegir retirar $S(2016) = 9$ piedras, dejando el montón con 2007 piedras.
En el siguiente paso, Ana puede elegir retirar del montón $2007 - S(2007) = 1998$ piedras, lo cual deja el montón con 9 piedras, que es una posición ganadora para Beto.

Por lo que Ana elegirá retirar del montón $S(2007) = 9$ piedras, dejando el montón con 1998 piedras.
En su siguiente movimiento, Beto puede elegir retirar $1998 - S(1998) = 1971$ piedras, dejando al montón con 27 piedras, lo cual deja a Ana en una posición ganadora. Por lo que Beto deberá elegir retirar del montón $S(1998) = 27$ piedras, dejando el montón con 1971 piedras.
En su siguiente movimiento, Ana elegirá quitar del montón $1971 - S(1971) = 1953$ piedras, lo cual deja al montón con 18 piedras, de modo que esto deja en una posición perdedora a Beto.
Por lo tanto, Ana tiene estrategia ganadora.

Solución del problema 2. (Solución de Emiliano Hernández Barranco). Sean x_1, $x_2, \ldots, x_6$ los números de Ana, Beto, Carlos, Diana, Elena y Fabián en el minuto i, respectivamente. Al final del minuto i, los números que tiene cada uno son los siguientes:

Ana: $x_1 + x_2 + x_6$,	Diana: $x_3 + x_4 + x_5$,
Beto: $x_1 + x_2 + x_3$,	Elena: $x_4 + x_5 + x_6$,
Carlos: $x_2 + x_3 + x_4$,	Fabián: $x_5 + x_6 + x_1$.

Al inicio, la suma de los 6 números es $x_1 + x_2 + \cdots + x_6$, mientras que al final, la suma es $3x_1 + 3x_2 + \cdots + 3x_6$. Esto quiere decir que en cada reemplazo, la suma total de los 6 números se triplica. Como los números del inicio y del final después de los 2022 reemplazos son exactamente los mismos, su suma es la misma que la de los números iniciales $a + b + c + d + e + f$, pero también sabemos que la suma total inicial de los 6 números se triplicó un total de 2022 veces. Por lo que tenemos la siguiente ecuación

$$a + b + c + d + e + f = 3^{2022}(a + b + c + d + e + f).$$

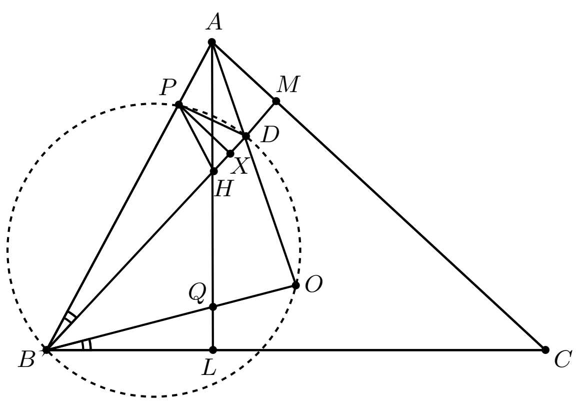
Si $a + b + c + d + e + f \neq 0$, entonces $3^{2022} = 1$, lo cual es un absurdo. Por lo que $a+b+c+d+e+f = 0$. Esto quiere decir que, en cualquier minuto dado, la suma total de los 6 números es cero, ya que se va triplicando en cada reemplazo y originalmente era 0.
Notemos que en cualquier momento si tenemos los números $x_1, x_2, \ldots, x_6$ asignados como al principio, al realizar el reemplazo se va a cumplir que el número de Ana más el número de Diana sumarán cero. Ya que Ana tendrá $x_1+x_2+x_6$, mientras que Diana tendrá $x_3+x_4+x_5$ y sumados dan $x_1+x_2+\cdots+x_6 = 0$. Análogamente, los números de Beto y Elena sumarán cero, así como los números de Carlos y Fabián.
Luego, como la suma total de los 6 números después de cada reemplazo es 0, en particular en el reemplazo número 2021 la suma de los seis números da cero y, por lo tanto, en el reemplazo 2022 se debe cumplir que los números originales a, b, c, d, e, f de Ana y Diana, Beto y Elena, Carlos y Fabián, sumen cero por parejas, esto es, $a + d = 0$, $b + e = 0$ y $c + f = 0$, de donde obtenemos que $a = -d$, $b = -e$ y $c = -f$, lo cual implica que $abc = -def$, esto es, $abc + def = 0$.
Es claro que esta suma se puede obtener si todos los números al inicio son iguales a cero, pues después de 2022 reemplazos todos los números seguirán siendo 0, que es la

condición del problema.
Concluimos que el único valor posible de $abc + def$ es cero.

Solución del problema 3. (Solución de Alonso Baeza Quevedo). Sean $\angle ABC = \beta$ y $\angle ACB = \theta$. Si nos fijamos en el circuncírculo del triángulo ABC, el ángulo $\angle ACB$ es inscrito y subtiende el mismo arco que el ángulo central $\angle AOB$, por lo que $\angle AOB = 2\theta$. Además, tenemos que $AO = BO = CO$, por lo que el triángulo AOB es isósceles. Así que

$$\angle BAO = \frac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta = \angle OBA.$$

Sean L y M los pies de las alturas desde A y B, respectivamente. Entonces, $\angle BMA = 90^\circ = \angle ALC$, lo cual implica que $\angle CAL = 90^\circ - \angle LCA = 90^\circ - \theta$.
Como $PH = PD$, resulta que $\angle PHD = \angle HDP$. Además, sabemos que P está sobre la mediatriz de HD. Sea X el punto medio de HD. Entonces, $\angle PXH = 90^\circ$ y, por ende, $PX \parallel AM$. Como $\angle BMC = 90^\circ$, tenemos que $\angle CBM = 90^\circ - \theta$, lo cual implica que $\angle ABO = 90^\circ - \theta = \angle MBC$.
Además, tenemos que $\angle ABO = \angle ABM + \angle MBO$ y $\angle MBC = \angle MBO + \angle OBC$. Luego, $\angle ABM + \angle MBO = \angle MBO + \angle OBC$, de donde obtenemos que $\angle ABM = \angle OBC$.



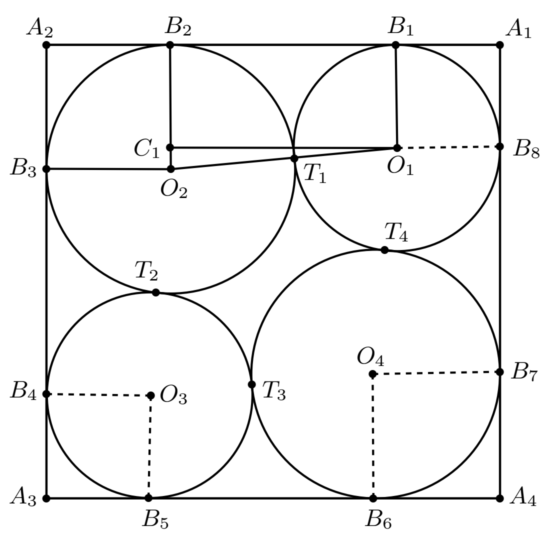
Sea $\angle BAC = \alpha = \angle BPX$. En el triángulo BPX tenemos que

$$\angle ABM = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha = \angle OBC.$$

Sea Q la intersección de AL con BO. Como $\angle BLQ = 90^\circ$ y $\angle QBL = 90^\circ - \alpha$, tenemos que $\angle LQB = \alpha$ y, por consiguiente, $\angle OQA = \alpha$ ya que es opuesto por el vértice a $\angle LQB$. Luego, $\angle BQA = 180^\circ - \alpha = \beta + \theta$. Además $\angle QAO = 180^\circ - \alpha - 2\theta$, de donde $\angle QAO = \beta - \theta$ y $\angle DAM = \angle LAM - \angle LAD = 90^\circ - \theta - (\beta - \theta) = 90^\circ - \beta$. Análogamente, obtenemos que $\angle BAD = \angle BAL + \angle LAD$, lo cual implica que $\angle BAL = 90^\circ - \beta$ y $\angle BDO = \angle ADM$, ya que son opuestos por el vértice. Además,

$\angle DBO = 180^\circ - \beta - 2\theta = \alpha - \theta$, de donde $\angle BHQ = 180^\circ - (\alpha - \theta) - (\beta + \theta)$ y, por lo tanto, $\angle BHQ = \theta = \angle AHD$ por ser opuestos por el vértice.
Ahora, en el triángulo HPD sea Y la intersección de PX con AH. Ya que Y está sobre PX, que es la mediatriz de HD, tenemos que $HY = DY$, de donde se sigue que $\angle YHD = \angle HDY = \theta$ y $\angle ADM = \beta$. Luego, $\angle YDA = 180^\circ - \theta - \beta = \alpha$. Por otro lado, tenemos que $\angle BPX = \alpha$, lo cual implica que $\angle XPA = 180^\circ - \alpha$ y, como $\angle XPA + \angle YDA = 180^\circ$, concluimos que $YPAD$ es un cuadrilátero cíclico.
Luego, como $\angle YPD = \angle YAD = \beta - \theta$, obtenemos que $\angle BPD = \angle BPX + \angle XPD = \alpha + (\beta - \theta)$. Así, $\angle BPD + BOD = (\alpha + \beta - \theta) + 2\theta = \alpha + \beta + \theta = 180^\circ$, lo que significa que el cuadrilátero $BODP$ es cíclico.

Solución del problema 4. (Solución de Emiliano Hernández Barranco). Sean O_1, O_2, O_3 y O_4 los centros de S_1, S_2, S_3 y S_4, respectivamente. Sean B_1 y B_2 los puntos de tangencia de S_1 y S_2 con A_1A_2, respectivamente. Sean B_3 y B_4 los puntos de tangencia de S_2 y S_3 con A_2A_3, respectivamente. Sean B_5 y B_6 los puntos de tangencia de S_3 y S_4 con A_3A_4, respectivamente. Finalmente, sean B_7 y B_8 los puntos de tangencia de S_4 y S_1 con A_1A_4, respectivamente. Sean C_1 el pie de la perpendicular de O_1 a B_2O_2, C_2 el pie de la perpendicular de O_2 a B_4O_3, C_3 el pie de la perpendicular de O_3 a B_6O_4 y C_4 el pie de la perpendicular de O_4 a B_8O_1. Para cada $1 \leq i \leq 4$, sea T_i el punto de tangencia entre S_i y S_{i+1}, donde $S_5 = S_1$ y, sea r_i el radio de S_i.
Mostraremos que $A_2B_2O_2B_3$ es un cuadrado. Como O_2B_2 y O_2B_3 son radios a los puntos de tangencia, tenemos que $\angle O_2B_3A_2 = \angle O_2B_2A_2 = 90^\circ$. También, $\angle B_3A_2B_2 = 90^\circ$, porque $A_1A_2A_3A_4$ es un rectángulo. Ahora, por suma de ángulos, $\angle B_2O_2B_3 = 90^\circ$, por lo que $A_2B_2O_2B_3$ es un rectángulo y, como $O_2B_2 = O_2B_3$, concluimos que $A_2B_2O_2B_3$ es un cuadrado de lado r_2.



Análogamente, obtenemos que $O_1B_1A_1B_8$, $O_4B_7A_4B_6$ y $O_3B_5A_3B_4$, son cuadrados de lados r_1, r_4 y r_3, respectivamente.

Más aún, $O_2B_2B_1O_1$ es un trapecio ya que $O_2B_2 \parallel O_1B_1$, pues el ángulo que hacen con respecto a A_1A_2 es de $90°$. Como $O_1C_1 \parallel B_1B_2$, ya que hacen el mismo ángulo de $90°$ con respecto a O_2B_2, tenemos que $O_1B_1B_2C_1$ es un paralelogramo, por lo que $B_2C_1 = B_1O_1 = r_1$. Luego, la longitud de C_1O_2 es la diferencia de las longitudes de los segmentos O_2B_2 y O_1B_1, esto es, $C_1O_2 = |r_1 - r_2|$.
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $O_1C_1O_2$, obtenemos que $(O_1O_2)^2 = (O_1C_1)^2 + (C_1O_2)^2$. Como T_1 es punto de tangencia, tenemos que O_1, T_1 y O_2 son colineales, lo cual implica que $O_2T_1 = r_2$ y $T_1O_1 = r_1$. Así, tenemos que $O_1O_2 = T_1O_1 + O_2T_1 = r_1 + r_2$. De este modo, $(C_1O_2)^2 = |r_1 - r_2|^2 = (r_1 - r_2)^2$ y $(O_1O_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$, por lo que

$$(O_1C_1)^2 = (O_1O_2)^2 - (C_1O_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2,$$

de donde obtenemos que $O_1C_1 = 2\sqrt{r_1r_2}$.
También tenemos que $A_2B_2 = r_2$ (por el cuadrado $A_2B_2O_2B_3$) y $B_1A_1 = r_1$ (por el cuadrado $B_1A_1B_8O_1$), lo cual implica que

$$A_1A_2 = r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + r_2 = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2.$$

Análogamente, obtenemos que

$$\begin{aligned} A_1A_4 &= (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_4})^2, \\ A_3A_4 &= (\sqrt{r_4} + \sqrt{r_3})^2, \\ A_2A_3 &= (\sqrt{r_3} + \sqrt{r_2})^2. \end{aligned}$$

Como $A_1A_2A_3A_4$ es un rectángulo, tenemos que $A_1A_4 = A_2A_3$ y $A_1A_2 = A_4A_3$, esto es, $(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_4})^2 = (\sqrt{r_3} + \sqrt{r_2})^2$ y $(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 = (\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4})^2$. Como cada $\sqrt{r_i} > 0$, se sigue que

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_4} = \sqrt{r_3} + \sqrt{r_2} \quad \text{y} \quad \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = \sqrt{r_3} + \sqrt{r_4}.$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$2\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_4} = 2\sqrt{r_3} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_4},$$

de donde $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_3}$ y $A_1A_4 = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_4})^2 = (\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4})^2 = A_4A_3$. Por lo tanto, $A_2A_3 = A_1A_4 = A_4A_3 = A_1A_2$, lo que significa que $A_1A_2A_3A_4$ es un cuadrado.

Solución del problema 5. (Solución de Luis Veudi Vivas Pérez). Debido a que para obtener 2 metales utilizamos otros 2 metales, la suma total de los metales siempre será la misma. Intentaremos convertir los otros metales a oro con la siguiente secuencia.

Cobre	Bronce	Plata	Oro	
8088	6066	4044	2022	
6066	4044	6066	4044	2022 martillazos
5055	5055	5055	5055	1011 martillazos
3033	3033	7077	7077	2022 martillazos
5055	1011	5055	9099	2022 martillazos
3033	3033	3033	11121	2022 martillazos
2022	2022	4044	12132	1011 martillazos
3033	1011	3033	13143	1011 martillazos
2022	2022	2022	14154	1011 martillazos
2048	2048	1996	14128	26 martillazos
2074	2022	2022	14102	26 martillazos
2048	2048	2048	14076	26 martillazos

Estando en esta posición podemos reducir a la mitad cada uno de los metales que no son oro. En general, podemos hacer este movimiento de la siguiente manera.

Cobre	Bronce	Plata	Oro
$2k$	$2k$	$2k$	O
k	k	$3k$	$O+k$
0	$2k$	$2k$	$O+2k$
k	k	k	$O+3k$

Al comenzar en una potencia de 2, podemos llegar a

Cobre	Bronce	Plata	Oro
1	1	1	20217
0	0	2	20218

Notemos que 20218 es el máximo número de piezas de oro que podemos tener. Primero, es fácil ver que $C + B + P \neq 0$. Supongamos que el número de piezas de cobre, plata y bronce es igual a cero y que hay 20220 piezas de oro. Es imposible haber llegado a este punto, pues el último martillazo habría añadido otro metal que no sea oro. Por último, $C + B + P \neq 1$, dado que cada martillazo cambia la paridad del número de piezas de cada metal y todos los metales comenzaron con la misma paridad, en cada movimiento las cuatro cantidades tendrán siempre la misma paridad. Por lo que no es posible que dos de los metales terminen en cero y alguno tenga una pieza. Concluimos que la mayor cantidad es 20218.

Solución del problema 6. Vamos a demostrar que un número es inverosímil si y solo si es de la forma $4k$ o $4k + 1$, con la excepción de $n = 4$ (que no es inverosímil).
Cuando $n = 4k + 1$, podemos elegir una n-tupla con $2k$ enteros iguales a -1, $2k$ enteros iguales a 1 y un entero igual a n. Con esto tenemos

$$\begin{aligned}2k + 2k + 1 = 4k + 1 &= n,\\ 2k(-1) + 2k(1) + 1(n) = (-2k) + 2k + n &= n,\\ (-1)^{2k}(1^{2k})(n) = (1)(1)(n) &= n.\end{aligned}$$

Cuando $n = 4k$, hay dos configuraciones posibles dependiendo de la paridad de k.

a) Si k es par, podemos elegir una n-tupla con k enteros iguales a -1, $3k-2$ enteros iguales a 1, un entero igual a 2 y otro entero igual a $2k$. Con esto tenemos

$$\begin{aligned} k + (3k-2) + 1 + 1 = 4k = n, \\ k(-1) + (3k-2)(1) + 1(2) + 1(2k) = (-k) + (3k-2) + 2 + 2k = 4k = n, \\ (-1)^k(1^{3k-2})(2)(2k) = 1(1)(2)(2k) = 4k = n. \end{aligned}$$

b) Si $k \geq 3$ es impar, podemos elegir una n-tupla con $k-2$ enteros iguales a -1, $3k$ enteros iguales a 1, un entero igual a -2 y otro entero igual a $2k$. Con esto tenemos

$$\begin{aligned} (k-2) + 3k + 1 + 1 = 4k = n, \\ (k-2)(-1) + 3k(1) + 1(-2) + 1(2k) = -k + 2 + 3k - 2 + 2k = 4k = n, \\ (-1)^{k-2}(1^{3k})(-2)(2k) = (-1)(1)(-2)(2k) = 4k = n. \end{aligned}$$

Notemos que cuando $n = 4$, para que el producto sea igual a 4, hay dos formas de distribuir los factores en la tupla: $\{\pm 4, a_1, a_2, a_3\}$ o $\{\pm 2, \pm 2, a_1, a_2\}$. En el primer caso, la suma va a ser impar; en el segundo caso, la única forma de que la suma sea igual a 4 es mediante $2 + 2 + 1 + (-1)$, con lo cual el producto no es igual a 4.
Vamos a demostrar que no existen números inverosímiles de la forma $n = 4k + 2$. En este caso, n es un múltiplo de 2 pero no de 4, por lo que solo tiene un factor 2. Esto implica que, independientemente de cómo se distribuyan los factores de n en la tupla, su suma será impar. Como n es par, esto es una contradicción.
Por último demostraremos que no hay números inverosímiles de la forma $n = 4k+3$. Si hubiera, entonces todos los elementos de la n-tupla serían impares y un número impar de ellos, digamos $2c + 1$, es congruente con 3 módulo 4. Entonces, hay $n - (2c + 1)$ números congruentes con 1 módulo 4. Considerando la suma de estos factores, tenemos que

$$(n - (2c+1)) \times 1 + (2c+1) \times 3 \equiv n - 2(2c+1) \equiv n - 2 \pmod 4.$$

Con esto obtenemos que no es posible que la suma sea igual a n, por lo que no hay números inverosímiles de la forma $4k + 3$.
Por lo tanto, los números inverosímiles son de la forma $4k$ o de la forma $4k + 1$, con la excepción de $n = 4$. De la forma $4k$ hay 505 números y de la forma $4k + 1$ hay 506. Quitando al 4, concluimos que la cantidad de números inverosímiles menores o iguales que 2022 es $504 + 506 = 1010$.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \ (mod\ m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$ y $c \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $a \equiv d \ (mod\ m)$.*
2. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$ y $b \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $ab \equiv cd \ (mod\ m)$.*
3. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$, entonces $a^n \equiv c^n \ (mod\ m)$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \ (mod\ m)$, entonces $a \equiv c \ (mod\ \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez