SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Información Legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS, Año 15, No. 3, agosto - octubre 2023, es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México. Tel. 55-5849-6709, smm@smm.org.mx, http://www.smm.org.mx, www.ommenlinea.org. Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2023, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Agosto de 2023

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2023, Número 3

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Una introducción a la teoría de números probabilística*, de nuestro amigo Enrique Treviño. En él, se da una introducción a la teoría de números probabilística, iniciando con el problema de la tabla de multiplicación como motivación para aprender técnicas y teoremas de teoría de números analítica y de teoría de números probabilística. Uno de los principales objetivos de este artículo, es

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

demostrar un teorema clásico de Hardy y Ramanujan usando técnicas probabilísticas, basadas en ideas de Turán. A lo largo del artículo, se dejan algunos ejercicios para el lector.

De especial interés para todos incluimos los problemas y soluciones del examen semifinal estatal de la 37^a OMM, propuesto por el Comité Organizador. También incluimos los exámenes selectivos que sirvieron para elegir a la delegación de la Ciudad de México para la 2^a Olimpiada Nacional Femenil de Matemáticas.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la XXXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico y de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2023, así como los resultados de los equipos mexicanos que participaron en ambas competencias.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2004. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2023-2024 y, para el 1° de julio de 2024, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana de noviembre de 2023. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2023 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXVI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 65^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2024) y a la XXXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2024).

De entre los concursantes nacidos en 2007 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2024).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2024.

7ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2023, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Séptima Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de quinto y sexto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto de 2023.

Nivel II. Estudiantes de primero y segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2023.

Nivel III. Estudiantes de tercer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2023.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 7^a OMMEB se realizará del 21 al 24 de septiembre de 2023, de forma virtual. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2024.

Una introducción a la teoría de números probabilística

Por Enrique Treviño López

Introducción

Considera la tabla de multiplicación de 10×10. Varios números entre 1 y 100 aparecen en la tabla, pero algunos se repiten. En la tabla hay 42 números distintos. ¿Qué tal si consideramos una tabla de 100×100? Entonces tenemos 2906 números distintos. Y en la tabla de 1000×1000 tenemos 248083. Llamemos $N(n)$ al número de números distintos que aparecen en la tabla de multiplicación de $n \times n$. ¿Cuál es el límite de $\frac{N(n)}{n^2}$ cuando $n \to \infty$? Resulta que la respuesta es 0.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 1: *Tabla de multiplicación de* 10×10*. Consiste de 42 números distintos.*

Teorema 1 (Teorema de la Tabla de Multiplicación)**.** *Para cada entero positivo* n*, sea*

$N(n) = \#\{ij \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n^2} = 0.$$

En este artículo daremos una introdución a la teoría de números probabilística. Usaremos el problema de la tabla de multiplicación como motivación para aprender técnicas y teoremas de teoría de números analítica y de teoría de números probabilística.
Uno de nuestros objetivos principales es demostrar un teorema clásico de Hardy y Ramanujan [6] usando técnicas probabilísticas basadas en ideas de Turán [11]. El teorema es el siguiente.

Teorema 2 (Hardy-Ramanujan)**.** *Sea $\omega(n)$ el número de divisores primos de n. Por ejemplo $\omega(30) = 3$ y $\omega(8) = 1$. Entonces casi todos los enteros satisfacen que $\omega(n) \approx \log\log n$. Para ser más precisos. Digamos que $\varepsilon > 0$. Consideremos la desigualdad*

$$|\omega(n) - \log\log n| < \varepsilon \log\log n. \tag{1}$$

Sea x un número real positivo suficientemente grande. Consideremos el conjunto $S(x)$ de números $n \leq x$ que no satisfacen (1)*, entonces $|S(x)| < \varepsilon\, x$.*

Para poder demostrar este teorema, daremos un paseo por teoremas clásicos de teoría de números analítica, como el teorema de Mertens. Explicaremos algunas técnicas muy útiles que se usaron en el siglo XX y terminaremos dando la demostración ingeniosa que hizo Erdős, en [3], para demostrar el Teorema de la Tabla Multiplicativa.

Notación

En teoría de números analítica, uno trabaja en estimar ciertas funciones. A diferencia de álgebra donde se acostumbra tener fórmulas exactas, en lo que estudiaremos aproximaremos funciones. Al aproximar, es importante tener una idea de qué tan grande es el error. Para medir el tamaño de errores, tenemos dos tipos de notación muy comunes. El primero se llama notación “O grande” (o notación de Landau) y la segunda se llama notación de Vinogradov. La definición es la siguiente:

Definición 1 (Notación de Landau y de Vinogradov)**.** *Sean f y g dos funciones reales. Entonces decimos que $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ si existe un real positivo k tal que $|f(n)| \leq k|g(n)|$ para todo n. En lugar de $\mathcal{O}$, la notación de Vinogradov usa el símbolo $\ll$. Es decir, si $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ entonces podemos escribir $f(n) \ll g(n)$.*

En algunos casos en lugar de querer acotar con un múltiplo de $g(n)$, queremos demostrar que $f(n)$ es mucho más chica asintóticamente. Tenemos la siguiente definición para esos casos.

Definición 2. *Sean f y g funciones. Decimos que $f(n) = o(g(n))$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

En el caso que el límite de la proporción es 1 (en lugar de 0), decimos que f es asintótico a g y escribimos $f(n) \sim g(n)$.

Algunos ejemplos para hacer la notación más clara.

Ejemplo 1. *Sabemos que* $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. *Podemos reescribir esto como*

$$1+2+\cdots+n=\frac{n^2}{2}+\mathcal{O}(n).$$

Con esta notación estamos indicando que una buena aproximación para la suma $1+2+\cdots+n$ es $\frac{n^2}{2}$. Esto sirve más cuando las fórmulas son más complicadas. Por ejemplo, la fórmula para $1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ es muy complicada en términos de k (por ejemplo, véase [7]), pero podemos aproximarla muy bien. Primero, demos una cota superior usando integrales. Como x^k es creciente, tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} j^k \leq n^k+\int_1^n t^k \,\mathrm{d}t=\frac{n^{k+1}}{k+1}-1+n^k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\mathcal{O}(n^k),$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} j^k \geq 1+\int_2^n t^k \,\mathrm{d}t=1+\frac{n^{k+1}}{k+1}-\frac{2^{k+1}}{k+1}=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\mathcal{O}(1).$$

Entonces tenemos que la suma $1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\mathcal{O}(n^k)$. Es decir, la aproximamos por $\frac{n^{k+1}}{k+1}$ y tendríamos un error con orden de magnitud n^k. Si n es muy grande, el error es mucho más chico que el término principal.
Para el resto del artículo, las letras n y m se usarán solo con enteros positivos y, las letras p y q, se usarán solo para números primos.

Ejemplo 2. *La función $\omega(n)$ determina el número de divisores primos del número n. Con la convención de que p es primo, podemos escribir $\omega(n)$ de la siguiente manera:*

$$\omega(n)=\sum_{p\mid n} 1. \tag{2}$$

En el ejemplo anterior además de fijar la idea de que p es primo, podemos ver como lo usamos en una suma. Una suma se hace para todos los números que satisfagan cierta condición. En el caso de (2), la condición para ser un sumando es $p \mid n$.
Siguiendo la convención de teoría de números analítica, usaremos $\log(n)$ para el logaritmo natural de n. Es decir $\log(e^x)=x$. Otra función que usaremos es la función parte entera: $\lfloor x\rfloor$ es el entero menor o igual a x más cercano a x. Por ejemplo, $\lfloor 3.1\rfloor=3$ y $\left\lfloor \frac{1}{7}\right\rfloor=0$.

Resultados Preliminares

Un resultado que necesitaremos es una versión logarítmica de la fórmula de Stirling. La fórmula de Stirling dice que $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. Esta fórmula es un poco difícil de demostrar y no necesitamos algo tan fuerte para este artículo, pero podemos demostrar la siguiente versión más sencilla.

Lema 1 (Stirling Logarítmico)**.** *Sea n un entero positivo. Entonces*

$$\log(n!) = n\log n - n + \mathcal{O}(\log(n)). \tag{3}$$

Demostración. Primero notemos que $\log(n!) = \sum_{j\leq n}\log(j)$. Como $\log$ es una función creciente, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j\leq n}\log(j) \leq \int_1^n \log(t)\,\mathrm{d}t + \log(n) &= n\log(n) - n + 1 + \log(n)\\ &= n\log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n)).\end{aligned}$$

Por otro lado, también tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j\leq n}\log(j) \geq 1 + \int_2^n \log(t)\,\mathrm{d}t &= (n\log(n) - n) - (2\log(2) - 2) + 1\\ &= n\log(n) - n + \mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

Entonces acotamos a $\log(n!)$ por arriba por $n\log(n) - n$ más un error de magnitud $\mathcal{O}(\log(n))$, y lo acotamos por abajo con $n\log(n) - n$ y un error de magnitud constante. Entonces, $\log(n!)$ debe ser $n\log n - n$ con un error $\mathcal{O}(\log(n))$. □

Una fórmula increíblemente útil que usaremos varias veces, y que es una de las herramientas más usadas en teoría de números analítica es la siguiente.

Teorema 3 (Fórmula de Sumación de Abel)**.** *Sea $\{a_n\}$ una secuencia y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Define $A(x)$ como*

$$A(x) = \sum_{n\leq x} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{\lfloor x\rfloor}.$$

La sumación de Abel o "Suma Parcial" es (para $b \geq a \geq 0$):

$$\sum_{a<n\leq b} a_n f(n) = A(b)f(b) - A(a)f(a) - \int_a^b A(t)f'(t)\,dt. \tag{4}$$

Demostración. Primero lo demostraremos para a y b enteros. Supongamos que $a \geq 0$. Calculemos la integral en intervalos:

$$\int_a^b A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{b-a-1}\int_{a+i}^{a+i+1} A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $A(t)$ es constante entre dos enteros, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{b-a-1}\int_{a+i}^{a+i+1} A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{b-a-1} A(a+i)\int_{a+i}^{a+i+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i=0}^{b-a-1} A(a+i)(f(a+i+1) - f(a+i)).\end{aligned}$$

Pero ahora podemos cambiar el orden de la suma y cambiar las variables para obtener:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{b-a-1} A(a+i)(f(a+i+1)-f(a+i)) \\
&= \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j)(A(j-1)-A(j)) + A(b-1)f(b) - A(a)f(a) \\
&= A(b)f(b) - a_b f(b) - A(a)f(a) - \sum_{a+1}^{b-1} a_j f(j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = A(b)f(b) - A(a)f(a) - \sum_{a<n\leq b} a_n f(n).$$

Queda demostrado para a y b enteros. Hagámoslo para a y b reales. Usando lo demostrado para enteros, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leq b} a_n f(n) &= \sum_{\lfloor a\rfloor<n\leq\lfloor b\rfloor} a_n f(n) \\
&= A(\lfloor b\rfloor)f(\lfloor b\rfloor) - A(\lfloor a\rfloor)f(\lfloor a\rfloor) - \int_{\lfloor a\rfloor}^{\lfloor b\rfloor} A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Queremos demostrar que el lado derecho de (5) es el mismo que el lado derecho de (4). Restemos las dos expresiones, tomando en cuenta que $A(x) = A(\lfloor x\rfloor)$,

$$A(b)(f(b)-f(\lfloor b\rfloor)) - A(a)(f(a)-f(\lfloor a\rfloor)) + \int_{\lfloor a\rfloor}^{\lfloor b\rfloor} A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Esto nos da

$$A(b)(f(b)-f(\lfloor b\rfloor)) - A(a)(f(a)-f(\lfloor a\rfloor)) + \int_{\lfloor a\rfloor}^{a} A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\lfloor b\rfloor}^b A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pero como $A(t)$ es $A(\lfloor a\rfloor)$ para $t\in(\lfloor a\rfloor, a)$ y $A(t) = A(\lfloor b\rfloor)$ para $t\in(\lfloor b\rfloor, b)$, tenemos que esta diferencia es

$$A(b)(f(b)-f(\lfloor b\rfloor)) - A(a)(f(a)-f(\lfloor a\rfloor)) + A(\lfloor a\rfloor)\int_{\lfloor a\rfloor}^{a} f'(t)\,\mathrm{d}t - A(\lfloor b\rfloor)\int_{\lfloor b\rfloor}^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Usando que $\int_c^d f'(t)\,\mathrm{d}t = f(d)-f(c)$, terminamos demostrando que la diferencia es igual a 0, que es lo que queríamos demostrar. □

El Teorema de Mertens

El Teorema de Mertens establece lo siguiente.

Teorema 4 (Mertens)**.** *Sea $x \geq 3$. Entonces,*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + \mathcal{O}(1).$$

Este teorema nos da una muy buena aproximación para la suma de los recíprocos de los números primos. Para poder demostrarlo, tendremos que demostrar primero algunos lemas. El primero, un lema demostrado por Erdős [2], nos da una cota superior para el producto de primos.

Lema 2. *Sea $x \geq 2$.*

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^x. \tag{6}$$

Demostración. Como $\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq \lfloor x \rfloor} p$ y $4^{\lfloor x \rfloor} \leq 4^x$, basta hacer la prueba en el caso en que x es un entero. Si $x = 2$, el lado izquierdo de (6) es 2, mientras que el lado derecho es $4^2 = 16$. Así que podemos suponer que $x \geq 3$. Si $x = 3$, tenemos la desigualdad $6 \leq 64$, la cual es verdadera. Demostraremos el lema por inducción fuerte. Supongamos que para cualquier entero positivo $x \leq 2k - 1$, la desigualdad (6) se sostiene. Como $x = 2, 3$ cumplen, entonces podemos asumir que $k \geq 2$. Si $x = 2k$, entonces $2k \geq 4$ no es primo y

$$\prod_{p \leq 2k} p = \prod_{p \leq 2k-1} p \leq 4^{2k-1} < 4^{2k}.$$

Por lo tanto, (6) se cumple para $x = 2k$ y basta demostrar que (6) se cumple para $x = 2k + 1$ para terminar la inducción. Notemos que si $k + 1 < p \leq 2k + 1$, entonces $p \mid \binom{2k+1}{k}$. Esto es porque $p \mid (2k + 1)!$, pero $p \nmid k!$ y $p \nmid (k + 1)!$ Por lo tanto,

$$\prod_{k+1 < p \leq 2k+1} p \leq \binom{2k+1}{k+1}.$$

Ahora, por el teorema del binomio tenemos que

$$\binom{2k+1}{0} + \binom{2k+1}{1} + \cdots + \binom{2k+1}{2k+1} = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k. \tag{7}$$

Pero el lado izquierdo de (7) es mayor o igual a $\binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} = 2\binom{2k+1}{k+1}$. Por lo tanto, $\binom{2k+1}{k+1} \leq 4^k$. Como $k + 1 \leq 2k - 1$, podemos usar la hipótesis de inducción para obtener

$$\prod_{p \leq x} p = \left(\prod_{p \leq k+1} p \right) \left(\prod_{k+1 < p \leq 2k+1} p \right) \leq 4^{k+1} \cdot \binom{2k+1}{k+1} \leq 4^{k+1} \cdot 4^k = 4^{2k+1}.$$

$\square$

Con este lema podemos probar el siguiente lema.

Lema 3. *Para $x > 0$, sea $\pi(x)$ el número de primos menores o iguales a x. Entonces,*

$$\pi(x) = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

Demostración. Usando el Lema 2 y tomando logaritmos en (6) obtemos que

$$\sum_{p \leq x} \log(p) \leq \log(4)x. \tag{8}$$

Ahora, definamos la sucesión a_n definida por $\log(p)$ cuando $n = p$ es primo, y $a_n = 0$ cuando n no es primo. Definamos $f(n) = \frac{1}{\log(n)}$. Entonces, usando el Teorema de Abel (Teorema 3), obtenemos

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \frac{\sum_{p \leq x} \log(p)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\sum_{p \leq t} \log(p)}{t \log^2(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Usando que $\sum_{p \leq t} \log(p) \leq \log(4)t$, llegamos a que

$$\pi(x) \leq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log(x)}\right) + \log(4) \int_2^x \frac{1}{\log^2(t)} \, \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Notemos que si $\sqrt{x} < t \leq x$, entonces $\log(t) \geq \frac{1}{2}\log(x)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{\log^2(t)} \, \mathrm{d}t &\leq \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log^2(t)} \, \mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{4}{\log^2(x)} \, \mathrm{d}t \\ &\leq \sqrt{x} + \frac{4(x - \sqrt{x})}{\log^2 x} = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Usando (10) en (9) concluimos que $\pi(x) = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log(x)}\right)$. □

El siguiente lema es casi el Teorema de Mertens.

Lema 4. *Sea $x \geq 1$.*

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + \mathcal{O}(1).$$

Demostración. Sea n un entero positivo. Factoricemos $n!$ como $n! = 2^{v_2} \cdot 3^{v_3} \cdot 5^{v_5} \cdots$ Entonces,

$$\log(n!) = v_2 \log(2) + v_3 \log(3) + v_5 \log(5) + \cdots = \sum_{p \leq n} v_p \log(p). \tag{11}$$

Como $n!$ no tiene divisores primos mayores a n, solo necesitamos considerar los sumandos con $p \leq n$ (con $p > n$, $v_p = 0$). Ahora, es fácil calcular v_p. La idea es que el exponente más grande de p que divide a $n!$ es el número de p's que aparecen en el producto $n(n-1)\cdots(1)$. Tenemos una p por cada múltiplo de p, luego otra por cada múltiplo de p^2 y así sucesivamente. Entonces,

$$v_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\log(n)/\log p} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor. \tag{12}$$

La razón por la que cortamos la suma con el término $k = \log(n)/\log(p)$ es que si $k > \log(n)/\log(p)$ entonces $\frac{n}{p^k} < 1$ y, por lo tanto, $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$. Combinando (11) con (12) llegamos a que

$$\log(n!) = \sum_{p \le n} \log(p) \sum_{k \le \frac{\log(n)}{\log(p)}} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor. \tag{13}$$

Ahora, $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \frac{n}{p^k} + \mathcal{O}(1)$. Usando el Lema 1 en (13), tenemos

$$\begin{aligned} n\log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n)) &= \sum_{p \le n} \log p \sum_{k \le \frac{\log(n)}{\log(p)}} \left(\frac{n}{p^k} \right) + \sum_{p \le n} \log(p) \sum_{k \le \frac{\log(n)}{\log(p)}} \mathcal{O}(1) \\ n\log(n) + \mathcal{O}(n) &= n \sum_{p \le n} \frac{\log(p)}{p} + n \sum_{p \le n} \sum_{k=2}^{\frac{\log(n)}{\log(p)}} \frac{\log p}{p^k} + \sum_{p \le n} \mathcal{O}(\log(n)). \end{aligned} \tag{14}$$

Tenemos que

$$\sum_{p \le n} \sum_{k=2}^{\frac{\log(n)}{\log(p)}} \frac{\log(p)}{p^k} \le \sum_{p} \sum_{k \ge 2} \frac{\log(p)}{p^k} = \sum_{p} \frac{\log(p)}{p(p-1)}. \tag{15}$$

Esta suma converge, así que es $\mathcal{O}(1)$. Usando el Lema 3 podemos ver que

$$\sum_{p \le n} \mathcal{O}(\log(n)) = \mathcal{O}(\pi(n)\log(n)) = \mathcal{O}(n). \tag{16}$$

Finalmente, aplicando (15) y (16) a (14) llegamos a

$$\begin{aligned} n\log(n) + \mathcal{O}(n) &= n \sum_{p \le n} \frac{\log(p)}{p} + \mathcal{O}(n) \\ \log(n) + \mathcal{O}(1) &= \sum_{p \le n} \frac{\log(p)}{p}. \end{aligned}$$

Esto es lo que queríamos demostrar en el caso $x = n$, un número natural. Si x no es natural, tenemos

$$\sum_{p \le x} \frac{\log(p)}{p} = \sum_{p \le \lfloor x \rfloor} \frac{\log(p)}{p} = \log(\lfloor x \rfloor) + \mathcal{O}(1).$$

Como $\log(\lfloor x \rfloor) = \log(x) + \mathcal{O}(1)$, terminamos la demostración. $\square$

Finalmente, estamos listos para demostrar el Teorema de Mertens.

Demostración del Teorema de Mertens. Usaremos el Teorema de Abel y el Lema 4.

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} &= \sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{p}\left(\frac{1}{\log(p)}\right) = \frac{\sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{p}}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\sum_{p\leq t}\frac{\log(p)}{p}}{t\log^2(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\log(x)+\mathcal{O}(1)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{1}{t\log(t)}\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\int_2^x \frac{1}{t\log^2(t)}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= 1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right) + \log\log(x) - \log\log(2) + \mathcal{O}(1)\\ &= \log\log(x) + \mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

□

Notas Históricas

Los resultados demostrados en este artículo han sido mejorados. El Teorema de Mertens se puede escribir como

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log(x) + B_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right),$$

donde B_1 es una constante (véase [9] para una demostración).
Cabe notar, que el Teorema de Mertens implica que hay infinitos números primos, ya que $\log\log(x)$ crece indefinidamente. La demostración de que toda progresión aritmética $a, a+b, a+2b, \ldots$, con a y b primos relativos, contiene infinitos números primos (llamado el Teorema de Dirichlet) prueba algo más fuerte: la suma de los recíprocos de tales primos diverge (es decir, se va al infinito). Es sorprendente que no hay una demostración general que no pruebe ese resultado más fuerte.[2] Una de las razones por las que es difícil demostrar que hay infinitos primos gemelos (primos p tales que $p+2$ o $p-2$ es primo) es que Brun (en [1]) demostró que la suma de los recíprocos de los primos gemelos converge.
El Lema 3 fue demostrado por primera vez por Chebyshev en 1848 con el objetivo de demostrar el postulado de Bertrand.[3] En 1859, Riemann en uno de los artículos más famosos de la historia de las matemáticas ([10]), explicó una estrategia para demostrar el teorema de los números primos que dice que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$. El teorema fue demostrado en 1896 por Hadamard y Vallée-Poussin, de manera independiente.

Ejercicio 1. *Sea $x \geq 1$. Demuestra que existe una constante B_1 tal que*

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log(x) + B_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right).$$

[2] La demostración clásica de que hay infinitos primos, no implica que la suma de los recíprocos de los primos diverge.

[3] Para todo entero positivo n, existe un primo p que satisface $n < p \leq 2n$.

De hecho, podemos calcular que

$$B_1 = 1 - \log\log(2) + \int_2^\infty \frac{\sum_{p\le t} \frac{\log(p)}{p} - \log(t)}{t\log^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ejercicio 2 (Segundo Teorema de Mertens)**.** *Sea $x \ge 1$. Demuestra que existe una constante B_2 tal que*

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-B_1-B_2}}{\log(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log^2(x)}\right).$$

Podemos calcular que

$$B_2 = \sum_p \sum_{k\ge 2} \frac{1}{k\cdot p^k}.$$

Ejercicio 3. *Demuestra que $B_1 + B_2$ de los ejercicios anteriores es igual a γ, la constante Euler-Mascheroni:*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k\le n}\frac{1}{k} - \log(n)\right).$$

El promedio y la varianza de $\omega(n)$

Dado un x real positivo, el promedio de una función aritmética $f(n)$ es $\mu_f(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n)$ y la varianza es

$$\sigma_f(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left(f(n) - \mu_f(x)\right)^2.$$

Teorema 5. *Sea $x \ge 2$. El promedio de $\omega(n)$ es $\sim \log\log(x)$. Para ser más específicos:*

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\omega(n) = \log\log(x) + \mathcal{O}(1). \tag{17}$$

Demostración. Empecemos escribiendo $\omega(n)$ como suma:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = \sum_{n\le x}\sum_{p\mid n} 1.$$

Ahora, cambiaremos el orden de la suma. En lugar de fijar n y ver cuantos primos p dividen a n, lo podemos pensar como fijar un primo p y ver cuantos n son múltiplos de p, es decir $n = pm$ para algún entero m. Tomando en cuenta que $\lfloor x \rfloor = x + \mathcal{O}(1)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\sum_{p\mid n} 1 &= \sum_{p\le x}\sum_{pm\le x} 1 = \sum_{p\le x}\sum_{m\le \frac{x}{p}} 1 = \sum_{p\le x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor = \sum_{p\le x}\frac{x}{p} + \sum_{p\le x}\mathcal{O}(1)\\ &= x\sum_{p\le x}\frac{1}{p} + \mathcal{O}(\pi(x)) = x\log\log(x) + \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log(x)}\right)\\ &= x\log\log(x) + \mathcal{O}(x).\end{aligned}$$

En las igualdades anteriores usamos el Teorema de Mertens y el Lema 3. Para concluir, basta dividir por x. $\square$

Teorema 6. *Sea $x \geq 2$. La varianza de $\omega(n)$ es $\mathcal{O}(\log\log(x))$. Para ser más específicos:*

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}(\omega(n)-\log\log x)^2 = \mathcal{O}(\log\log(x)). \tag{18}$$

Demostración. Dividamos el problema en tres partes, separando la suma en tres sumas:

$$\sum_{n\leq x}(\omega(n)-\log\log(x))^2 = \sum_{n\leq x}\omega^2(n) - 2\log\log(x)\sum_{n\leq x}\omega(n) + (\log\log(x))^2\sum_{n\leq x}1. \tag{19}$$

Sean

$$S_1 = \sum_{n\leq x}\omega^2(n), \quad S_2 = 2\log\log(x)\sum_{n\leq x}\omega(n), \quad S_3 = (\log\log(x))^2\sum_{n\leq x}1.$$

Por el Teorema 5, tenemos que

$$S_2 = 2\log\log(x)(x\log\log(x)+\mathcal{O}(x)) = 2x(\log\log(x))^2 + \mathcal{O}(x\log\log(x)). \tag{20}$$

S_3 es fácil de calcular, ya que es simplemente $S_3 = \lfloor x\rfloor(\log\log(x))^2$. Nos falta calcular S_1.

$$S_1 = \sum_{n\leq x}\omega^2(n) = \sum_{n\leq x}\left(\sum_{p\mid n}1\right)\left(\sum_{q\mid n}1\right) = \sum_{n\leq x}\sum_{\substack{p\mid n\\ q\mid n\\ p\neq q}}1 + \sum_{n\leq x}\sum_{p\mid n}1.$$

Esta última igualdad se obtiene separando en los casos donde tenemos primos iguales y en los que no. En la primera suma, cambiamos el orden de los sumandos, tomando en cuenta que podemos tomar $p\leq x$, $q\leq x$ con $p\neq q$ y $pq\mid n$. En la segunda suma podemos usar el Teorema 5. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{p\leq x}\sum_{\substack{q\leq x\\ q\neq p}}\sum_{n\leq \frac{x}{pq}}1 + \sum_{n\leq x}\sum_{p\mid n}1 \\ &= \sum_{p\leq x}\sum_{\substack{q\leq x\\ q\neq p}}\left\lfloor\frac{x}{pq}\right\rfloor + x\log\log(x) + \mathcal{O}(x) \\ &= \sum_{p\leq x}\sum_{\substack{q\leq x\\ q\neq p}}\frac{x}{pq} + \sum_{pq\leq x}\mathcal{O}(1) + x\log\log(x) + \mathcal{O}(x). \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad, usamos que $\left\lfloor\frac{x}{pq}\right\rfloor = 0$ si $pq > x$. Entonces, el error sucede solo en los casos $pq\leq x$. Queremos contar todas las parejas (p,q) tales que

$pq \leq x$. Pero entonces queremos los números menores a x que son producto de dos primos. Por cada uno de estos números, tenemos dos parejas (por el orden de p y q). Entonces, hay a los más $2x$ parejas. Por lo tanto, $\sum_{pq \leq x} \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(x)$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{p \leq x} \sum_{\substack{q \leq x \\ q \neq p}} \frac{x}{pq} + x \log\log(x) + \mathcal{O}(x) = x \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sum_{\substack{q \leq x \\ q \neq p}} \frac{1}{q} + \mathcal{O}(x \log\log(x)) \\
&= x \sum_{p \leq x} \frac{\log\log x + \mathcal{O}(1)}{p} + \mathcal{O}(x \log\log(x)) \\
&= x \log\log(x) \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + \mathcal{O}(x \log\log(x)) \\
&= x(\log\log(x))^2 + \mathcal{O}(x \log\log(x)) + \mathcal{O}(x \log\log(x)) \\
&= x(\log\log(x))^2 + \mathcal{O}(x \log\log(x)). \qquad (21)
\end{aligned}$$

Usamos el Teorema de Mertens varias veces para llegar a esta conclusión. Ahora, combinando (20) con (21) y el valor de S_3 obtenemos que

$$\begin{aligned}
&S_1 - S_2 + S_3 \\
&= \big(x(\log\log(x))^2 + \mathcal{O}(x \log\log(x)\big) - \big(2x(\log\log(x))^2 + \mathcal{O}(x \log\log(x))\big) \\
&\quad + \big(x(\log\log(x))^2\big) \\
&= \mathcal{O}(x \log\log(x)).
\end{aligned}$$

Al dividir por x, tenemos lo que queríamos demostrar. $\square$

Observación 1. *Se puede demostrar que la varianza de $\omega(n)$ es asintótica a $\log\log(n)$, pero requiere de más trabajo y de tener la versión de Mertens mencionada en el Ejercicio 1.*

Ejercicio 4. *Demuestra que para $x \geq 2$,*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) = \log\log(x) + B_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right),$$

donde B_1 es la misma constante que en el Ejercicio 1.

Ejercicio 5. *Demuestra que para $x \geq 2$,*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \log\log(x))^2 = \log\log(x) + \mathcal{O}(1).$$

Ejercicio 6. *Demuestra que para $x \geq 2$,*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\omega(n) - \log\log(x))^2 = \log\log(x) + \mathcal{O}\left(\frac{\log\log(x)}{\log(x)}\right).$$

Casi todo n satisface que $\omega(n) \approx \log\log(n)$

Estamos listos para demostrar nuestro teorema principal.

Demostración del Teorema 2. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $m_\varepsilon(x)$ el número de enteros n que satisfacen $\sqrt{x} \leq n \leq x$ y que $|\omega(n) - \log\log(n)| \geq \varepsilon \log\log n$. Como $n \geq \sqrt{x}$, entonces

$$\log\log(n) \geq \log\log(\sqrt{x}) = \log(1/2) + \log\log x = \log\log(x) - \log(2).$$

Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned}|\omega(n) - \log\log(x)| &\geq ||\omega(n) - \log\log(n)| - (\log\log(x) - \log\log(n))| \\ &\geq |\,\varepsilon(\log\log(x) - \log(2)) - \log(2)| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2}\log\log x.\end{aligned}$$

La última desigualdad es cierta para x suficientemente grande, en particular para x que satisface $\log\log(x) > \log(2)\left(2 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$.
Por lo tanto, si n es uno de los enteros que contamos en $m_\varepsilon(x)$, entonces

$$|\omega(n) - \log\log(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\log\log(x),$$

lo cual implica que

$$\sum_{n \leq x} (\omega(n) - \log\log(x))^2 \geq m_\varepsilon(x)\frac{\varepsilon^2}{4}(\log\log(x))^2. \tag{22}$$

Por otro lado, el lado izquierdo de (22) es $\mathcal{O}(x\log\log(x))$. Esto implica que

$$m_\varepsilon(x) = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\varepsilon^2 \log\log x}\right).$$

Para x suficientemente grande, $m_\varepsilon(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}x$ porque $\log\log(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Ahora los n que pueden ser excepción a (1), son los que están en $m_\varepsilon(x)$ o los números $n \leq \sqrt{x}$. Como $\sqrt{x} < \frac{\varepsilon}{2}x$ para x grande, entonces el número de n's que no satisfacen (1) es menor a $\varepsilon\, x$. □

Observación 2. *La demostración se ve un poco fea por la parte técnica de trabajar con ε. Pero la filosofía detrás de la solución no es tan complicada. La idea es pensar como si fuera probabilidad. Tenemos una distribución ω cuyo promedio es $\log\log n$ ($\log\log n$ y $\log\log x$ son prácticamente lo mismo porque $\log$ crece muy lentamente) y cuya varianza es $\log\log n$. Entonces, por el teorema de Chebyshev[4] de probabilidad, tenemos que la probabilidad de que $|\omega(n) - \log\log n| \geq \varepsilon\log\log n$ es menor o igual a $\frac{K^2}{\varepsilon^2\log\log(n)}$ para alguna constante K. Es decir se va a cero cuando $n \to \infty$.*

[4] El teorema de Chebyshev dice que si μ es el promedio de una distribución X y σ^2 es la varianza, entonces la probabilidad de que $|X - \mu| \geq k\sigma^2$ es a lo más $\frac{1}{k^2}$.

Erdős–Kac

Mencionamos antes que la varianza de $\omega(n)$ se puede calcular como $\log\log(n)$ más un error pequeño, pero demostrar eso conlleva más trabajo. En particular, se pueden calcular varios momentos de la distribución y ver que siguen una distribución normal con promedio $\log\log n$ y varianza $\log\log n$ (véase [5], por ejemplo). Esta propiedad la conjeturó Mark Kac en una plática en los años treintas. Para fortuna de las matemáticas, Paul Erdős estaba en la plática y cuando Kac terminó la plática, Erdős le mencionó una idea para demostrar la propiedad. Este resultado se llama el Teorema Erdős–Kac y es donde nació la teoría de números probabilística.

Teorema 7 (Erdős–Kac)**.** *Sean a y b números reales tales que $a \leq b$. Para $x \geq 3$, sea $S_x(a,b)$ el número de enteros n tal que $3 \leq n \leq x$ que satisfacen*

$$\log\log(n) + a\sqrt{\log\log(n)} \leq \omega(n) \leq \log\log(n) + b\sqrt{\log\log(n)}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S_x(a,b)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Ejercicio 7. *Sea $\Omega(n)$ el número de divisores primos de n contando multiplicidades. Por ejemplo, $\Omega(8) = 3$ porque el primo 2 aparece 3 veces, $\Omega(24) = 4$ porque $24 = 2^3 \cdot 3^1$. Demuestra que el Teorema 2 es cierto con Ω reemplazando a ω.*

Conclusiones

Después de nuestro paseo por algunos resultados importantes de la teoría de números analítica, estamos listos para dar un bosquejo de la demostración del Teorema de la Tabla Multiplicativa de Erdős. No daremos la solución completa, para invitar al lector a usar lo que ha aprendido para completar los argumentos.

Bosquejo de Demostración del Teorema 1. Casi todos los números $j \leq n$ cumplen que $\Omega(j) \approx \log\log n$. Lo mismo para los números $i \leq n$. Entonces, casi todos los productos ij cumplen que

$$\Omega(ij) = \Omega(i) + \Omega(j) \approx 2\log\log(n).$$

Pero entonces, los números que forman parte de $N(n)$ son "raros". Para ser más específicos, casi todos los números menores o iguales a n^2 cumplen que

$$\Omega(n) \approx \log\log(n^2) = \log(2\log(n) = \log(2) + \log\log(n) \approx \log\log(n).$$

Como casi todos tienen $\log\log(n)$ divisores primos (con multiplicidad), y los que están en la tabla de multiplicación tienen $2\log\log(n)$, entonces son muy raros, es decir,

$$\lim_{n\to} \frac{N(n)}{n^2} = 0.$$

□

Observación 3. *Erdős demostró que* $N(n) = \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{(\log(n))^{1+\varepsilon}}\right)$. *Luego Ford en [4] describió* ε *con más precisión calculando* $N(n) = \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{(\log(n))^K(\log\log(n))^{3/2}}\right)$, *donde* $K = 1 - \frac{1+\log\log 2}{\log 2} = 0.0860713320\ldots$. *Koukoulopoulos en [8] generalizó el problema a tablas multiplicativas en más dimensiones.*

Ejercicio 8. *Completa la demostración del Teorema de la Tabla de Multiplicación.*

Bibliografía

1) V. Brun. *La série* $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{59}+\frac{1}{61}+\cdots$ *oú les dénominateurs sont "nombres premiers jumeaux" est convergente ou finite*, Bull. Sci. Math. 43 (1919), 100-104, 124-128.

2) P. Erdős. *Beweis eines satzes von tschebyshef*. Acta Litt. Sci. Szeged, 5 (1932), 194-198.

3) P. Erdős. *Some remarks on number theory*. Riveon Lematematika, 9 (1955), 45-48.

4) K. Ford. *The distribution of integers with a divisor in a given interval*. Ann. of Math. (2) 168 (2008), no. 2, 367-433.

5) A. Granville, K. Soundararajan. *Sieving and the Erdos-Kac theorem*. Equidistribution in number theory, an introduction. NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 237, Springer, Dordrecht, 2007, pp. 15-27.

6) G. H. Hardy, S. Ramanujan. *The normal number of prime factors of a number* n *[Quart. J. Math. 48 (1917), 76-92]*. Collected papers of Srinivasa Ramanujan, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000, pp. 262-275.

7) D. E. Knuth. *Johann Faulhaber and sums of powers*. Math. Comp. 61 (1993), no. 203, 277-294.

8) D. Koukoulopoulos. *On the number of integers in a generalized multiplication table*. J. Reine Angew. Math. 689 (2014), 33-99.

9) P. Pollack. *Not always buried deep*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. A second course in elementary number theory.

10) B. Riemann. *Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie (1859), 671-680.

11) P. Turán. *On a Theorem of Hardy and Ramanujan*. J. London Math. Soc. S1-9 (1934), no. 4, 274.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2023. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. En el interior de un triángulo isósceles ABC con $AB = BC$, se ubica el punto T tal que $\angle BAT = 40°$, $\angle TAC = 30°$ y $\angle BCT = 20°$. Determina la medida del ángulo $\angle CBT$.

Problema 2. Sea $a \neq 1$ un número real positivo. Demuestra que

$$\frac{a^{2n+1} - 1}{a^n(a-1)} > 2n + 1$$

para todo entero positivo n.

Problema 3. Determina la suma de los dígitos del número 1001^{10}.

Problema 4. Una urna tiene 5 pelotas rojas idénticas y 8 pelotas azules idénticas. Ana repetidamente saca una pelota al azar de la urna hasta que no queden pelotas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna queden 2 pelotas azules?

Problema 5. Dado un 2007-ágono regular, encuentra el menor entero k tal que entre cualesquiera k vértices del polígono, hay 4 de ellos tales que el cuadrilátero convexo que forman comparte 3 lados con el polígono.

Problema 6. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo con $AB = AE = CD = 1$, $\angle ABC = \angle DEA = 90°$ y $BC + DE = 1$. Determina el área del pentágono.

Problema 7. Sean a, b y c, las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x - 1$. Determina el valor de

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}.$$

Problema 8. Sea ABC un triángulo escaleno con gravicentro G y circuncentro O. La extensión de AG interseca al circuncírculo en M, las rectas AB y CM se intersecan en P y las rectas AC y BM se intersecan en Q. El circuncentro S del triángulo APQ está en el circuncírculo de ABC. Si A, O y S son colineales, demuestra que $\angle AGO = 90^\circ$.

Problema 9. Supongamos que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1998\}$ tiene una partición en pares $\{a_i, b_i\}$, con $1 \leq i \leq 999$, tales que $|a_i - b_i|$ es igual a 1 o a 6. Demuestra que el dígito de las unidades de la suma $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{999} - b_{999}|$ es 9.

Problema 10. El punto $P = (x_0, y_0)$ con coordenadas racionales es tal que P está en la elipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + By^2 = 1\}$, donde A y B son números racionales fijos. Demuestra que hay una infinidad de puntos en E de coordenadas racionales.

Problema 11. Se tienen diez números reales distintos y distintos de cero, tales que la suma o el producto de cualesquiera dos de ellos da como resultado un número racional. Demuestra que el cuadrado de cada uno de los diez números es un número racional.

Problema 12. a) Factoriza el número $7^{2^{k+1}} + 7^{2^k} + 1$, donde k es cualquier entero positivo.
b) Prueba que el número $7^{2^5} + 7^{2^4} + 1$ tiene al menos 6 divisores primos distintos.

Problema 13. Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(c+1)^2 + a^2 + 1} \leq 1.$$

Problema 14. En el cuadrilátero convexo $ABCD$, el ángulo en A mide lo mismo que el ángulo en C, $AB = CD = 180$ cm y $AD \neq BC$. Si el perímetro de $ABCD$ es 640 cm, determina el valor de $\lfloor 1000 \cos \alpha \rfloor$, donde α es la medida del ángulo en A.
(Nota. Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 15. Nora lanza una moneda 10 veces y anota el valor absoluto de la diferencia entre la cantidad de caras y cruces que obtuvo. Luego, lanza la moneda una vez más y anota el valor absoluto de la diferencia entre la cantidad de caras y cruces obtenidas. Determina la probabilidad de que el segundo número que anotó Nora sea mayor que el primero que anotó.

Problema 16. Determina todos los enteros $n > 1$ tales que, para cada divisor $d > 1$ de n, los números $d^2 - d + 1$ y $d^2 + d + 1$ son números primos.

Problema 17. Sean $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $d > 0$ números reales tales que $abcd = 1$ y $a + b + c + d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$. Demuestra que

$$a + b + c + d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Problema 18. Sean ABC un triángulo equilátero y P un punto en su interior tal que $\angle APC = 120°$. Las rectas AB y PC se intersecan en M y las rectas AP y BC se intersecan en N. Sea Q el circuncentro del triángulo MNB. Determina el lugar geométrico de Q conforme el punto P varía dentro del triángulo ABC.

Problema 19. Sea n un entero positivo. ¿De cuántas formas se puede llenar un tablero de $n \times n$ con los enteros del 0 al 5, de tal manera que la suma de los números de cada renglón sea divisible por 2 y la suma de los números de cada columna sea divisible por 3?

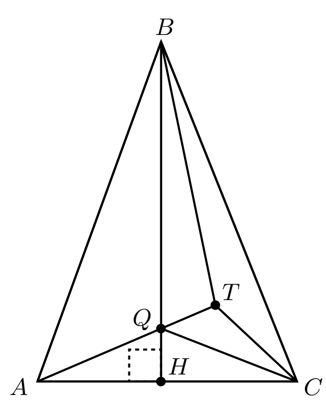
Problema 20. Determina el valor del entero positivo n que satisface la igualdad

$$n^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Como el triángulo ABC es isósceles con $AB = BC$, tenemos que $\angle BAC = \angle BAT + \angle TAC = 40° + 30° = 70° = \angle BCA$, lo cual implica que $\angle ABC = 180° - 2(70°) = 40°$.
Sean H el pie de altura desde B y Q la intersección de AT con BH. Como BH es bisectriz del ángulo $\angle ABC$, tenemos que $\angle ABH = \angle HBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20°$.



Por otro lado, en el triángulo rectángulo AHQ con ángulo recto en H, tenemos que $\angle AQH = 90^\circ - \angle QAH = 90^\circ - \angle TAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, por lo que $\angle BQT = \angle AQH = 60^\circ$. Además, por el criterio LAL, los triángulos rectángulos AQH y CQH son congruentes (pues comparten el lado QH, tienen un ángulo recto y H es punto medio de AC) lo que significa que $\angle CQH = \angle AQH = 60^\circ$. Luego, $\angle TQC = 180^\circ - \angle AQH - \angle CQH = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. Por lo tanto, QT es bisectriz del ángulo $\angle BQC$.
Ahora, como $\angle QCH = \angle QAH = 30^\circ$, $\angle BCT = 20^\circ$ y $\angle BCA = 70^\circ$, se sigue que $\angle QCT = 70^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 20^\circ$. Esto significa que CT es bisectriz del ángulo $\angle QCB$.
Por lo tanto, T es el incentro del triángulo QBC, por lo que $\angle QBT = \angle CBT$. Como $\angle QBT + \angle CBT = \angle HBC = 20^\circ$, concluimos que $\angle CBT = 10^\circ$.

Solución del problema 2. Sea $a \neq 1$ un número real positivo y sea n un entero positivo. Factorizando $a^{2n+1} - 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a^{2n+1}-1}{a^n(a-1)} &= \frac{(a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{2n})}{a^n(a-1)} = \frac{1+a+a^2+\cdots+a^{2n}}{a^n}\\ &= a^{-n}+a^{1-n}+a^{2-n}+\cdots+a^{n-2}+a^{n-1}+a^n.\end{aligned}$$

Por otro lado, por la desigualdad MA-MG, tenemos que $a^{-k} + a^k \geq 2$ para cada entero positivo k, con la igualdad si y solo si $a^{-k} = a^k$. Aplicando esta desigualdad en la suma anterior, obtenemos que

$$a^{-n}+a^{1-n}+a^{2-n}+\cdots+a^{n-2}+a^{n-1}+a^n = (a^{-n}+a^n)+\cdots+(a^{-1}+a^1)+a^0 \geq 2n+1.$$

Sin embargo, es fácil ver que $a^{-k} = a^k$ si y solo si $a = 1$. Como $a \neq 1$, la desigualdad anterior es estricta, esto es, $a^{-n} + a^{1-n} + a^{2-n} + \cdots + a^{n-2} + a^{n-1} + a^n > 2n + 1$.

Solución del problema 3. Tenemos que $1001 = 1000+1$ y, por el teorema del binomio, tenemos que

$$(1000+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 1000^k.$$

Es fácil ver que los valores de $\binom{10}{k}$ para $0 \leq k \leq 10$ son:

$$1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.$$

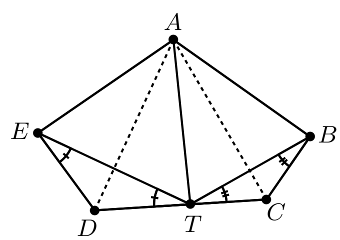
Como todos estos números tienen menos de 4 dígitos, la expansión decimal de 1001^{10} se obtiene agregando al menos tres ceros al final de cada uno de estos números y concatenarlos. Por lo tanto, la suma de los dígitos de 1001^{10} es la misma que la suma de los dígitos de los 11 números de la lista anterior, la cual es igual a 43.

Solución del problema 4. Denotemos con R a cada pelota roja y con A a cada pelota azul. Hay $\binom{13}{5}$ formas en las que Ana podría quitar todas las pelotas de la urna. Entre estas, las formas en las que se detiene al quedar dos pelotas azules son las que terminan en RAA, de las cuales hay $\binom{10}{4}$ posibilidades. Esto nos da una probabilidad de

$$\frac{\binom{10}{4}}{\binom{13}{5}} = \frac{\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}}{\frac{13\times12\times11\times10\times9}{5\times4\times3\times2\times1}} = \frac{8\times7\times5}{13\times12\times11} = \frac{70}{429}.$$

Solución del problema 5. Numeremos a los vértices del polígono del 1 al 2007. Lo que buscamos es que entre cualesquiera k vértices haya 4 vértices consecutivos. Cada vértice está en exactamente 4 de estas cuartetas, por lo que, si $4k > 3\times 2007$ hay una cuarteta con 4 vértices consecutivos. Es decir, si $k \geq 1506$ se cumple la condición del problema. Para ver que $k = 1506$ es el mínimo, tomemos todos los vértices que no sean múltiplos de 4 excepto el vértice 2007. Entonces, tenemos 1505 vértices que no cumplen la condición.

Solución del problema 6. Sea T un punto sobre CD tal que $DT = DE$ y $CT = CB$. Tenemos que los triángulos CTB y DTE son isósceles con $\angle DTE = \angle DET$ y $\angle CTB = \angle CBT$. Luego, $\angle ETB = \angle AET + \angle ABT$, lo cual implica que $\angle BAE = 360° - 2\angle ETB$. Como $AB = AE$, entonces A es el circuncentro del triángulo BTE, por lo que $AB = AE = AT = 1$.



Los triángulos AED y ATD son congruentes porque $DE = DT$, $AE = AT$ y comparten el lado AD. Luego, $\angle ATD = \angle AED = 90°$. Por lo tanto, el área del triángulo ACD es $\frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$ y la suma de las áreas de los triángulos ABC y ADE es igual a

$$\frac{BC\cdot AB}{2} + \frac{DE\cdot AE}{2} = \frac{BC}{2} + \frac{DE}{2} = \frac{BC+DE}{2} = \frac{1}{2},$$

de donde se sigue que el área del pentágono $ABCDE$ es igual a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Solución del problema 7. Sea $S = \frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$. Observemos que

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{2-(1+y)}{1+y} = \frac{2}{1+y} - 1$$

para todo número $y \neq -1$, por lo que

$$\begin{aligned} S &= \frac{2-(1+a)}{1+a} + \frac{2-(1+b)}{1+b} + \frac{2-(1+c)}{1+c} = 2\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) - 3 \\ &= 2\left(\frac{(1+b)(1+c)+(1+a)(1+c)+(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)}\right) - 3. \end{aligned}$$

Como las raíces de $p(x)$ son a, b y c, se sigue que las raíces de $q(x) = p(x-1)$ son $a+1$, $b+1$ y $c+1$. Tenemos que

$$q(x) = p(x-1) = (x-1)^3 - (x-1) - 1 = x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

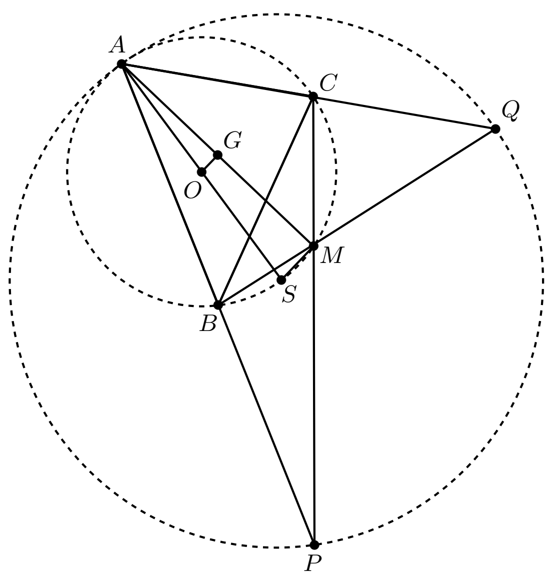
Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$\begin{aligned}(1+b)(1+c) + (1+a)(1+c) + (1+a)(1+b) &= 2,\\ (1+a)(1+b)(1+c) &= 1,\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$S = 2\left(\frac{(1+b)(1+c) + (1+a)(1+c) + (1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)}\right) - 3 = 2(2) - 3 = 1.$$

Solución del problema 8. Como los triángulos AOB y ASP son isósceles y comparten el ángulo en A, resulta que son semejantes. Como $AS = 2AO$, se sigue que $AP = 2AB$. De manera análoga obtenemos que $AQ = 2AC$. Esto significa que el triángulo APQ se obtiene tras reescalar el triángulo ABC por un factor de 2, con centro en A.



Como B es punto medio de AP y C es punto medio de AQ, tenemos que M es el gravicentro del triángulo APQ. Por otra parte, por el reescalamiento, este gravicentro M satisface que $AM = 2AG$. Por el criterio LAL, los triángulos AGO y AMS son semejantes. Como AS es un diámetro del circuncírculo del triángulo ABC, tenemos que $\angle AMS = 90°$ y, por lo tanto, $\angle AGO = 90°$.

Solución del problema 9. Sea $S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{999} - b_{999}|$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a_i > b_i$, por lo que la suma S puede expresarse como

$$S = \sum_{i=1}^{999} a_i - \sum_{i=1}^{999} b_i.$$

Como $\sum_{i=1}^{999} a_i + \sum_{i=1}^{999} b_i = \frac{1998 \cdot 1999}{2} = 999 \cdot 1999$ es impar, $\sum_{i=1}^{999} a_i - \sum_{i=1}^{999} b_i$ también es impar. Pero, como $\sum_{i=1}^{999} a_i - \sum_{i=1}^{999} b_i$ es una suma de 1's y 6's, entonces una cantidad impar de los $|a_i - b_i|$ es 1 y, por lo tanto, una cantidad par de ellos es 6. Si $2x$ es la cantidad de términos $|a_i - b_i|$ que son 6, entonces

$$\sum_{i=1}^{999} a_i - \sum_{i=1}^{999} b_i = 6(2x) + 1 \cdot (999 - 2x) = 10x + 999.$$

Como $10x + 999 \equiv 9 \pmod{10}$, concluimos que el dígito de las unidades de S es 9.

Solución del problema 10. Consideremos una recta $L : y - y_0 = m(x - x_0)$ que pasa por P. Como $y = m(x - x_0) + y_0$, sustituyendo en la ecuación de la elipse tenemos que

$$\begin{aligned} Ax^2 + B\left(m(x - x_0) + y_0\right)^2 = 1 \\ (A + Bm^2)x^2 + (2Bmy_0 - 2Bm^2x_0)x + (Bm^2x_0^2 - 2Bmx_0y_0 + By_0^2 - 1) = 0, \end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática en x. Si r_1, r_2 son las soluciones de esta ecuación, entonces $r_1 = x_0$ y, por las fórmulas de Vieta,

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{2Bm^2x_0 - 2Bmy_0}{A + Bm^2}, \\ r_2 &= \frac{2Bm^2x_0 - 2Bmy_0}{A + Bm^2} - x_0 = \frac{2Bm^2x_0 - 2Bmy_0 - Ax_0 - Bm^2x_0}{A + Bm^2} \\ &= \frac{Bm^2x_0 - 2Bmy_0 - Ax_0}{A + Bm^2}. \end{aligned}$$

La coordenada en y asociada a r_2 en la recta L es

$$\begin{aligned} y &= m(r_2 - x_0) + y_0 \\ &= m\left(\frac{Bm^2x_0 - 2Bmy_0 - Ax_0}{A + Bm^2} - x_0\right) + y_0 \\ &= m\left(\frac{Bm^2x_0 - 2Bmy_0 - Ax_0 - Ax_0 - Bm^2x_0}{A + Bm^2}\right) + y_0 \\ &= m\left(\frac{-2Bmy_0 - 2Ax_0}{A + Bm^2}\right) + y_0 \\ &= \frac{-2Bm^2y_0 - 2Amx_0 + Ay_0 + Bm^2y_0}{A + Bm^2} \\ &= \frac{-Bm^2y_0 - 2Amx_0 + Ay_0}{A + Bm^2}. \end{aligned}$$

De esta manera, llegamos a que L interseca a E en (x_0, y_0) y en

$$(x,y) = \left(\frac{Bm^2x_0 - 2Bmy_0 - Ax_0}{A + Bm^2}, \frac{-Bm^2y_0 - 2Amx_0 + Ay_0}{A + Bm^2}\right).$$

Luego, si m es racional, entonces (x, y) tiene coordenadas racionales y, como hay una infinidad de números racionales, hay una infinidad de puntos (x, y) de coordenadas racionales.

Solución del problema 11. Comenzamos demostrando el siguiente lema.

Lema. *Considera seis puntos en el plano y colorea cada segmento entre cualesquera dos de esos puntos de blanco o de negro. Entonces, hay un triángulo con todos sus lados del mismo color.*

Demostración. Sean P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 los seis puntos. Si nos fijamos en P_1, por el principio de casillas, al menos tres de los segmentos que unen a P_1 con los otros cinco puntos deben ser del mismo color. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que hay al menos 3 segmentos blancos que llegan a P_1 y que son P_1P_2, P_1P_3 y P_1P_4. Si alguno de los segmentos entre P_2, P_3 y P_4 es blanco, digamos P_2P_3, entonces el triángulo $P_1P_2P_3$ tiene sus tres lados blancos, si no, el triángulo $P_2P_3P_4$ tiene sus tres lados negros. $\square$

Volviendo al problema, sean $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ los diez números reales. Consideremos un punto por cada uno de esos números y pintemos el segmento que une dos de esos puntos de blanco si los números asociados a los puntos cumplen que su suma es racional y pintemos el segmento de negro si el producto de dichos números es racional. Por las hipótesis del problema y el lema anterior, debe haber un triángulo con sus tres lados del mismo color entre los puntos que estamos considerando. Esto se traduce a que existen tres números a_i, a_j, a_k tales que la suma de cualquier par de ellos es racional o la multiplicación de cualquier par de ellos es racional. Podemos suponer que esos números son a_1, a_2 y a_3.

a) Si a_1+a_2, a_1+a_3 y a_2+a_3 son racionales, entonces $a_1+a_2+a_1+a_3-(a_2+a_3) = 2a_1$ es racional, pero esto implica que a_1 es racional y, como su suma o producto con cualquiera de los otros 9 números es racional, los diez números son racionales.

b) Si a_1a_2, a_1a_3 y a_2a_3 son racionales, entonces la multiplicación de estos tres números es racional, esto es, $a_1^2a_2^2a_3^2$ es un número racional. Si dividimos entre $a_2^2a_3^2$, que también es racional, obtenemos nuevamente un racional, pero a la vez obtenemos $\frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{a_2^2a_3^2} = a_1^2$, por lo que tenemos que a_1 es la raíz cuadrada de un racional. Lo mismo sucede para a_2 y a_3. Para cualquier otro número a_j tenemos que si a_1a_j es racional, entonces $\frac{a_1^2a_j^2}{a_1^2} = a_j^2$ es un número racional porque es la división entre racionales. Lo anterior implica que a_j es el cuadrado de un racional. Si niguno de a_1a_j, a_2a_j, es racional, entonces $a_1 + a_j$ y $a_2 + a_j$ deben ser ambos racionales, pero entonces $a_1 + a_j - a_2 - a_j = a_1 - a_2$, también es racional. De la igualdad $a_1^2 - a_2^2 = (a_1 + a_2)(a_1 - a_2)$, se tiene que $a_1 + a_2$ es racional, porque $a_1^2, a_2^2, a_1 - a_2$, son todos racionales. Pero, en ese caso, llegamos a una situación equivalente al primer caso porque $a_1 + a_j, a_2 + a_j$ y $a_1 + a_2$ son todos racionales.

Solución del problema 12. a) Observando que $7^{2^{k+1}} = (7^{2^k})^2$, tenemos que

$$7^{2^{k+1}} + 7^{2^k} + 1 = (7^{2^k} + 1)^2 - 7^{2^k}.$$

Ahora es fácil factorizar esta diferencia de cuadrados:

$$(7^{2^k} + 1)^2 - 7^{2^k} = (7^{2^k} + 1 + 7^{2^{k-1}})(7^{2^k} + 1 - 7^{2^{k-1}}),$$

de donde, obtenemos que $7^{2^{k+1}} + 7^{2^k} + 1 = (7^{2^k} + 1 + 7^{2^{k-1}})(7^{2^k} + 1 - 7^{2^{k-1}})$.
b) Sea k un entero positivo. Demostraremos, más generalmente, que $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ es múltiplo de al menos $k+1$ primos distintos. La prueba la haremos por inducción en k. Para esto, demostraremos primero el siguiente lema.

Lema. *Para cada entero positivo k, $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ y $7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1$ son primos relativos.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que p es un divisor primo de ambos números. Como cada número es impar (por ser suma de tres impares), p también es impar. Además, p divide a la resta de ambos números, que es igual a

$$(7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1) - (7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1) = 2 \cdot 7^{2^{k-1}}$$

y, como $p \nmid 2$, necesariamente debemos tener que $p \mid 7^{2^{k-1}}$, lo cual implica que $p = 7$. Pero claramente 7 no divide a $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ (pues 7 no divide a 1). Por lo tanto, $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ y $7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1$ son primos relativos. $\square$

Si $k = 1$, tenemos que $7^{2^1} + 7^{2^0} + 1 = 7^2 + 7^1 + 1 = 49 + 7 + 1 = 57 = 3 \cdot 19$ es el producto de $k + 1 = 2$ primos distintos. Supongamos que existe un entero positivo k, tal que $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ es múltiplo de al menos $k + 1$ primos distintos. Por lo demostrado en el inciso a), tenemos que

$$7^{2^{k+1}} + 7^{2^k} + 1 = (7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1)(7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1),$$

y, como $7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1$ y $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ son primos relativos (por el lema), necesariamente $7^{2^{k+1}} + 7^{2^k} + 1$ debe ser divisible por al menos un primo más que $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$, esto es, por al menos $k + 2$ primos distintos.
En particular, $7^{2^5} + 7^{2^4} + 1$ es divisible por al menos 6 primos distintos.

Solución del problema 13. Usando la desigualdad conocida[5] $a^2 + b^2 \geq 2ab$, tenemos que

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} = \frac{2}{a^2 + b^2 + 2a + 2} \leq \frac{2}{2ab + 2a + 2} = \frac{1}{ab + a + 1}.$$

[5]La desigualdad $(a - b)^2 \geq 0$ es equivalente a la desigualdad $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Como $abc = 1$, podemos hacer la sustitución $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ y $c = \frac{z}{x}$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos que

$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1} \leq \frac{1}{ab+a+1} = \frac{1}{\frac{x}{z}+\frac{x}{y}+1} = \frac{yz}{xy+yz+zx}.$$

De manera análoga, obtenemos que

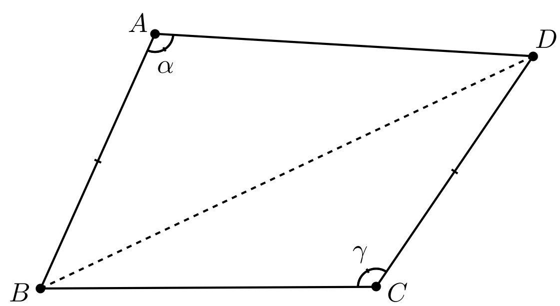
$$\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1} \leq \frac{1}{bc+b+1} = \frac{xz}{xy+yz+xz},$$
$$\frac{2}{(c+1)^2+a^2+1} \leq \frac{1}{ca+c+1} = \frac{xy}{xz+yz+xy}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1} + \frac{2}{(b+1)^2+c^2+1} + \frac{2}{(c+1)^2+a^2+1} \leq \frac{yz+xz+xy}{xy+yz+zx} = 1.$$

Solución del problema 14. Aplicando la ley de cosenos en el triángulo ABD, tenemos que

$$BD^2 = 180^2 + AD^2 - 2 \cdot 180 \cdot AD \cos\alpha. \qquad (23)$$



Análogamente, si γ es la medida del ángulo en C, entonces por la ley de cosenos en el triángulo CBD, tenemos que

$$BD^2 = 180^2 + BC^2 - 2 \cdot 180 \cdot BC \cos\gamma. \qquad (24)$$

Como $\alpha = \gamma$, sea $x = \cos\alpha = \cos\gamma$. De las relaciones (23) y (24), tenemos que

$$180^2 + AD^2 - 2 \cdot 180 \cdot AD \cdot x = 180^2 + BC^2 - 2 \cdot 180 \cdot BC \cdot x,$$

esto es, $(AD - BC)(AD + BC) = 360x(AD - BC)$, de donde se sigue que

$$AD + BC = 360x.$$

Como $AB = CD = 180$ cm y, el perímetro de $ABCD$ es 640 cm, obtenemos que $AD + BC = 640 - 2 \cdot 180 = 280$ cm, esto es, $360x = 280$, de donde $x = \frac{280}{360} = \frac{7}{9} = 0.777\ldots$, por lo que $\lfloor 1000\cos(\alpha) \rfloor = 777$.

Solución del problema 15. Sean a el número de caras y b el número de cruces en los primeros 10 lanzamientos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a > b$. Entonces, la diferencia incrementará cuando el número de caras incremente, así que, en este caso, la probabilidad de que la diferencia incremente es $\frac{1}{2}$. Análogamente, cuando $b < a$, la probabilidad es $\frac{1}{2}$. Luego, la probabilidad en el caso $b > a$ o $b < a$ es

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}}{2^{10}} \\ &= \frac{2^{10} - \binom{10}{5}}{2^{11}} = \frac{772}{2^{11}} = \frac{193}{512}.\end{aligned}$$

En el caso $a = b$, no importa qué se obtenga en el siguiente lanzamiento, la segunda diferencia será mayor que la primera. Luego, en este caso, se tiene una probabilidad de

$$1 \cdot \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{126}{512}.$$

Por lo tanto, la probabilidad buscada es igual a

$$\frac{193}{512} + \frac{126}{512} = \frac{319}{512}.$$

Solución del problema 16. Primero demostraremos que n es libre de cuadrados. Si d^2 divide a n para algún entero $d > 1$, entonces $(d^2)^2 + d^2 + 1$ sería un número primo. Sin embargo, es fácil ver que $d^4 + d^2 + 1 = (d^2 - d + 1)(d^2 + d + 1)$ con ambos factores mayores que 1, lo que es una contradicción. Por lo tanto, n es producto de primos distintos. Sea $p \geq 5$ un divisor primo de n. Entonces, $p \equiv 1 \pmod 6$ o $p \equiv 5 \pmod 6$.
Si $p \equiv 1 \pmod 6$, entonces $p^2 + p + 1 \equiv 3 \pmod 6$ y $p^2 + p + 1 > 3$ no es primo.
Si $p \equiv 5 \pmod 6$, entonces $p^2 - p + 1 \equiv 3 \pmod 6$ y $p^2 - p + 1 > 3$ no es primo.
Por lo tanto, los factores primos de n pueden ser 2 y 3, esto es, $n = 2, 3$ o 6. Es fácil verificar que estos tres enteros satisfacen la condición del problema y, por consiguiente, son todas las soluciones.

Solución del problema 17. Tenemos que

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)(ab+bc+cd+da) &> \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right)(ab+bc+cd+da) \\ &\geq (a+b+c+d)^2,\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz[6].
Dividiendo entre $a+b+c+d$, se sigue que $ab+bc+cd+da > a+b+c+d$.

[6]**Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** Para cualesquiera números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, se cumple que,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y solo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Por otro lado, por la desigualdad MA-MG tenemos que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{b}+\frac{d}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{d}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{d}{a}+\frac{c}{b}\right)\\ \geq{}& 2\left(\sqrt{\frac{ad}{bc}}+\sqrt{\frac{ba}{cd}}+\sqrt{\frac{cb}{da}}+\sqrt{\frac{dc}{ab}}\right)\end{aligned}$$

y, usando que $abcd = 1$, lo anterior implica que

$$\begin{aligned}2\left(\sqrt{\frac{ad}{bc}}+\sqrt{\frac{ba}{cd}}+\sqrt{\frac{cb}{da}}+\sqrt{\frac{dc}{ab}}\right) &= 2(ab+bc+cd+da)\\ &> (ab+bc+cd+da)+(a+b+c+d)\\ &> (ab+bc+cd+da)+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.\end{aligned}$$

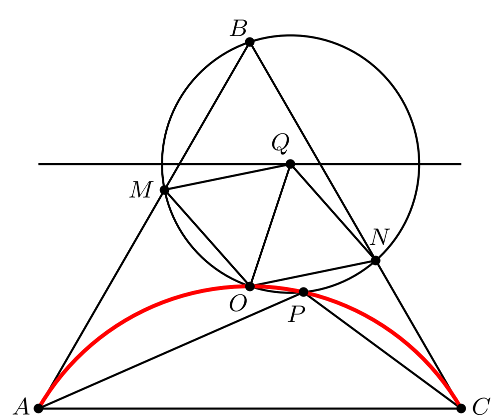
De las dos desigualdades anteriores concluimos que

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{d}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{d}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{d}{a}+\frac{c}{b}\right) > (ab+bc+cd+da)+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.$$

Finalmente, restando $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ de ambos lados y usando que $ab+bc+cd+da > a+b+c+d$, obtenemos que

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d} > ab+bc+cd+da > a+b+c+d.$$

Solución del problema 18. Observemos que $\angle MPN = \angle APC = 120°$ al ser ángulos opuestos por el vértice y, que $\angle MBN = 60°$, por ser equilátero el triángulo ABC. Entonces, el cuadrilátero $BMPN$ es cíclico, por lo que $\angle BMC = 180° - \angle BNA = \angle CNA$. Además, $\angle MBC = \angle NCA = 60°$, por lo que los triángulos BMC y CNA son semejantes. Más aún, como $AC = BC$, tenemos que BMC y CNA son congruentes.



Por otra parte, si O es el centro del triángulo ABC, entonces el triángulo CNA es una rotación de 120° del triángulo BMC respecto a O, por lo que $\angle MON = 120°$, lo que significa que O se encuentra en el circuncírculo del triángulo BMN. Como Q es el circuncentro del triángulo MNB, tenemos que $\angle MQN = 2\angle MBN = 120°$. Además, $OM = ON$, por lo que O es el punto medio del arco $\widehat{MN}$ y, en consecuencia, $\angle MQO = \angle NQO = 60°$. Por otra parte, $QM = QO = QN$, por lo que los triángulos QMO y QNO son equiláteros, esto es, Q es una rotación de 60° de M respecto a O.
El lugar geométrico de los puntos P dentro del triángulo ABC tales que $\angle APC = 120°$, es un arco de círculo. Conforme P traza este arco, M traza el segmento AB y, por lo tanto, el lugar geométrico de Q es una rotación de 60° del segmento AB respecto a O.

Solución del problema 19. El subtablero superior izquierdo de $(n-1)\times(n-1)$ se puede llenar arbitrariamente de $6^{(n-1)^2}$ formas. Ahora, hay 3 formas de llenar cada una de las $n-1$ casillas superiores de la columna de más a la derecha y hay 2 formas de llenar cada una de las $n-1$ casillas del renglón inferior. El número de la última casilla vacía abajo a la derecha, está determinado de manera única (módulo 2 por el renglón inferior y módulo 3 por la columna de más a la derecha). Por lo tanto, hay $6^{(n-1)^2}\cdot 3^{n-1}\cdot 2^{n-1} = 6^{n^2-n}$ formas de llenar el tablero.

Solución del problema 20. Primero, como $n^5 > 133^5$, tenemos que $n > 133$. Además, $133^5 < 135^5$, $110^5 < 135^5$ y $84^5 < 108^5$, por lo que

$$\begin{aligned}133^5+110^5+84^5+27^5 &< 135^5+135^5+108^5+27^5\\ &= 27^5\left(5^5+5^5+4^5+1\right) = 27^5\,(7275)\\ &< 27^5\left(6^5\right),\end{aligned}$$

esto es, $n^5 < (27\cdot 6)^5 = 162^5$, por lo que $133 < n < 162$.
Por otra parte, como n^5 es la suma de dos pares y de dos impares, necesariamente n^5 es par, esto es, $n \equiv 0 \pmod 2$. Luego, $133 \equiv 1 \pmod 3$, $110 \equiv 2 \pmod 3$ y $84 \equiv 27 \equiv 0 \pmod 3$, por lo que

$$n^5 \equiv 1^5+2^5+0^5+0^5 \equiv 0 \pmod 3,$$

esto es, $n \equiv 0 \pmod 3$.
Análogamente, como $133 \equiv 3 \pmod 5$, $110 \equiv 0 \pmod 5$, $84 \equiv 4 \pmod 5$ y $27 \equiv 2 \pmod 5$, tenemos que

$$n^5 \equiv 3^5+0^5+4^5+2^5 \equiv 4 \pmod 5,$$

lo cual implica que $n \equiv 4 \pmod 5$. Por el teorema chino del residuo, n está completamente determinado por su residuo módulo 30. Como $6 \mid n$, los posibles residuos son 0, 6, 12, 18 y 24, de los cuales el único que es congruente con 4 módulo 5 es 24. En otras palabras, $n \equiv 24 \pmod{30}$. Como $120 \equiv 0 \pmod{30}$, obtenemos que $120+24 = 144 \equiv 24 \pmod{30}$. Más aún, como $133 < n < 162$ y $144+30 > 162$, concluimos que $n = 144$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2023 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este tercer número del año 2023 de tu revista. En esta ocasión, queremos agradecer a José Hernández Santiago, por habernos enviado dos problemas para esta sección, los problemas 2 y 5. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Considera $n > 2$ enteros distintos de cero, tales que cada uno de ellos es divisible por la suma de los otros $n - 1$ enteros. Demuestra que la suma de los n enteros es igual a cero.

Problema 2. Sean a y b enteros positivos primos relativos. Demuestra que para cada entero c, la recta $ax + by = c$ pasa por un punto de coordenadas enteras (X, Y) donde $0 \leq Y \leq a - 1$.

Problema 3. Para cada entero positivo n, sea $f(n)$ el número de enteros positivos con exactamente $2n$ dígitos, de los cuales n son iguales a 1 y n son iguales a 2. Sea $g(n)$ el número de enteros positivos de n dígitos, todos entre 1 y 4 inclusive, tales que el número de 1's es igual al número de 2's. Demuestra que $f(n) = g(n)$.

Problema 4. Sean a, b y c números reales tales que

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc,$$
$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3.$$

Demuestra que $abc = 0$.

Problema 5. Determina el valor de la suma

$$\sum_{k=2}^{1000} \left\lfloor \frac{1}{k-\varphi(k)} \right\rfloor,$$

donde $\varphi(k)$ denota el número de enteros positivos menores o iguales que k y primos relativos con k.
(Nota: Para cada número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 6. Alicia escribe los números del 1 al 2023 en el pizarrón. Repetidamente, borra dos números x, y y los reemplaza por $\sqrt{x+y}$. Alicia hace esto hasta que queda un solo número. Si M es el número más grande que puede quedar al final, demuestra que $M < \frac{91}{2}$.

Problema 7. Dos carros A y B viajan a través de dos avenidas rectas a la misma velocidad. Sea C el punto de intersección de ambas avenidas. Supón que ambos carros nunca chocan.

a) Prueba que existe un punto D que equidista de ambos carros.

b) Muestra que A, B, C y D son concíclicos.

Problema 8. Demuestra que hay una infinidad de números enteros positivos a, b y c, tales que $\text{mcd}(a,b,c) = 1$ y los números

$$\frac{a^3-b^3-c^3}{3}, \quad \frac{a^5-b^5-c^5}{5}, \quad \frac{a^7-b^7-c^7}{7},$$

están en progresión geométrica en ese orden.

Problema 9. Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ una función tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\left| f(n) - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) n \right| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Demuestra que $f(f(n)) = f(n) + n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Problema 10. Determina todos los enteros positivos n que satisfacen la ecuación

$$\sigma(n) = \tau(n) \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil,$$

donde $\sigma(n)$ denota a la suma de los divisores positivos de n y $\tau(n)$ denota al número de divisores positivos de n.
Nota: Para cada número real x, $\lceil x \rceil$ denota el menor entero que es mayor o igual que x.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2022 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2022. Recuerda que en el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2023, por lo que aún tienes tiempo de mandar las tuyas.

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea X un punto en el lado BC. Sea Y un punto en la recta CD tal que $BX = YD$ y D se encuentra entre C y Y. Demuestra que el punto medio de XY se encuentra sobre la diagonal BD.

Solución. Denotemos a los puntos A, B, C y D con las coordenadas $(0, a)$, $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (a, a), respectivamente. Denotemos por $(b, 0)$ a las coordenadas del punto X, con $0 \leq b \leq a$ (para que esté en el lado BC). Como $BX = YD$, las coordenadas de Y son $(a, a + b)$. Por lo tanto, el punto medio, M, de XY tiene coordenadas

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Esto significa que M está en la recta con ecuación $y = x$. Como la recta BD tiene también esta ecuación y $0 \leq \frac{a+b}{2} \leq a$, concluimos que el punto M está sobre la diagonal BD.

Problema 2. Sea n un entero positivo y supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son enteros (no necesariamente distintos). Demuestra que existen índices $i_1, i_2, \ldots, i_r$ tales que n divide a la suma $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_r}$.

Solución. Sean $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_n = x_1 + x_2 + \cdots x_n$. Si $s_i \not\equiv 0 \pmod{n}$ para cada i, entonces s_i tiene $n - 1$ posibilidades módulo n. Luego, por el principio de las casillas, existe $i < j$ tal que $s_i \equiv s_j \pmod{n}$. Por lo tanto,

$$s_j - s_i = x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_j \equiv 0 \pmod{n}.$$

Problema 3. Zeus y Hades juegan a construir un número real α entre 0 y 1. En el turno n se decide un dígito entre 0 y 9 en la posición n después del punto decimal, con Zeus decidiendo en turnos impares y Hades decidiendo en turnos pares. Después de que todos los turnos se hayan jugado, se decide el ganador.
Zeus gana si α es racional, mientras que Hades gana si α es irracional. Determina si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y, en caso de tenerla, quién la tiene.

Solución. Hades tiene una estrategia ganadora. En turnos de la forma $2k^2$ colocará un 1, mientras que en todos los demás turnos colocará un 0. Probaremos que, independientemente de lo que juegue Zeus, el número α formado será irracional.

Sea α_n el n-ésimo dígito de α después del punto decimal. Supongamos, por contradicción, que α es racional. Esto implica que su expansión decimal es eventualmente periódica, en el sentido de que existe una posición N y un periodo p tal que para todo entero $n \geq N$, $\alpha_{n+p} = \alpha_n$. Sea $M = \text{máx}\{N, p\}$ y consideremos los dígitos α_{2M^2} y α_{2M^2+2p}. Como $2M^2 \geq M \geq N$, estos dígitos deben ser iguales. Sin embargo, debido a la desigualdad

$$2M^2 < 2M^2 + 2p \leq 2M^2 + 2M < 2M^2 + 4M + 2 = 2(M+1)^2$$

y la forma en la que Hades jugó, tenemos que $\alpha_{2M^2} = 1$ y $\alpha_{2M^2+2p} = 0$, lo que es un absurdo. Esto implica que α es irracional.

Problema 4. Determina todas las parejas (n, m) de enteros positivos tales que

$$(n+1)^m - 1 = n!$$

Solución. Si $n = 1$, tenemos la ecuación $2^m - 1 = 1$, esto es, $2^m = 2$, cuya única solución es $m = 1$. Si $n = 2$, tenemos la ecuación $3^m - 1 = 2$, esto es, $3^m = 3$, cuya única solución es $m = 1$. Si $n = 3$, tenemos la ecuación $4^m - 1 = 6$, esto es, $4^m = 7$ que no tiene soluciones. Si $n = 4$, tenemos la ecuación $5^m - 1 = 24$, esto es, $5^m = 25$, cuya única solución es $m = 2$. Probaremos que no existen soluciones para $n \geq 5$.
Como $(n+1)^m \equiv 0 \pmod{n+1}$ para todo $m \geq 0$, entonces, si existe una solución con $n \geq 5$, se debe cumplir que $n! = (n+1)^m - 1 \equiv -1 \pmod{n+1}$. Por el teorema de Wilson, $n+1$ debe ser primo y, como $n+1 \geq 6 > 2$, debe ser un primo impar, lo cual implica que n y $n+2$ son pares. Por otra parte, el lado izquierdo de la ecuación se puede factorizar como

$$(n+1)^m - 1 = [(n+1) - 1] \sum_{i=0}^{m-1} (n+1)^i = n \sum_{i=0}^{m-1} (n+1)^i,$$

por lo que la ecuación a resolver es equivalente a la ecuación

$$n \sum_{i=0}^{m-1} (n+1)^i = n!$$

Dividiendo entre n cada lado de esta ecuación, obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{m-1} (n+1)^i = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots \tfrac{n}{2} \cdots (n-1),$$

en particular, tenemos que $n \mid (n-1)!$, es decir, $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$, por lo que $\sum_{i=0}^{m-1} (n+1)^i \equiv 0 \pmod{n}$. Pero $n+1 \equiv 1 \pmod{n}$, así que:

$$0 \equiv \sum_{i=0}^{m-1} (n+1)^i \equiv \sum_{i=0}^{m-1} 1 = m \pmod{n},$$

lo que equivale a que $m = nk$ para algún entero positivo k. Este hecho implica que $(n+1)^m - 1 = ((n+1)^n)^k - 1 \geq (n+1)^n - 1$. Luego, por el teorema del binomio, tenemos que:

$$(n+1)^n - 1 = \left[n^n + \binom{n}{1}n^{n-1} + \binom{n}{2}n^{n-2} + \cdots + 1\right] - 1 > n^n > n!$$

si $n \geq 5$. Llegando así a que $(n+1)^m - 1 > n!$, lo que es una contradicción.
Por lo tanto, las únicas soluciones son $(n, m) = (1, 1)$, $(2, 1)$ y $(4, 2)$.

Problema 5. Determina el número de triángulos de lados de longitudes números enteros tales que su perímetro es igual a su área.

Solución. Supongamos que el triángulo con lados a, b y c satisface las condiciones del problema. Entonces, por la fórmula de Herón[7], tenemos que

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2s, \tag{25}$$

donde s es el semiperímetro del triángulo. Sean $x = s - a$, $y = s - b$ y $z = s - c$.

Lema. *Si s no es entero, entonces el producto xyz tampoco es entero.*

Demostración. Como $s = \frac{a+b+c}{2}$, tenemos que $x = s - a = \frac{b+c-a}{2}$, $y = s - b = \frac{a+c-b}{2}$ y $z = s - c = \frac{a+b-c}{2}$. Si s no es entero, entonces $a + b + c$ es impar. Luego, $(a + b + c) - 2a = b + c - a$ es impar también (por ser suma de un impar y un par), esto es, $2x$ es impar. De manera análoga, tenemos que $(a + b + c) - 2b = a + c - b$ es impar, esto es, $2y$ es impar. Finalmente, tenemos que $(a + b + c) - 2c = a + b - c$ es impar, esto es, $2z$ es impar. Por lo tanto, $x = \frac{2k+1}{2}$, $y = \frac{2i+1}{2}$ y $z = \frac{2j+1}{2}$, con k, i, j enteros, por lo que $xyz = \frac{(2k+1)(2i+1)(2j+1)}{8}$. Si xyz es un entero, entonces 2 tendría que dividir a alguno de los números impares $2k + 1$, $2i + 1$ o $2j + 1$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, xyz no es entero. □

Sustituyendo $x = s - a$, $y = s - b$ y $z = s - c$ en (25) y simplificando obtenemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+y+z)xyz} &= 2(x+y+z), \\ (x+y+z)xyz &= 4(x+y+z)^2, \\ xyz &= 4(x+y+z). \end{aligned}$$

Notemos que $x + y + z = s$, lo cual implica que $4(x + y + z)$ es entero. Si s no es entero, entonces xyz tampoco es entero por el lema anterior, esto es, $4(x + y + z)$ no es entero, lo que es una contradicción. Por lo tanto, s es entero y, por consiguiente, $x = s - a$, $y = s - b$ y $z = s - c$ son también enteros. Despejando x obtenemos que

$$x = \frac{4y + 4z}{yz - 4}.$$

[7]**Fórmula de Herón.** El área de un triángulo de lados a, b y c, es igual a $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s denota al semiperímetro del triángulo.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \geq y \geq z$. Entonces: $\frac{4y+4z}{yz-4} \geq y$, esto es, $y^2z - 8y - 4z \leq 0$. Si y_1 y y_2 son las raíces del polinomio $y^2z - 8y - 4z$ en y, tenemos que

$$y_1 = \frac{4 + \sqrt{16 + 4z^2}}{z}, \qquad y_2 = \frac{4 - \sqrt{16 + 4z^2}}{z}.$$

Así que la desigualdad $y^2z - 8y - 4z \leq 0$ se puede expresar como $(y - y_1)(y - y_2) \leq 0$. Pero $y_2 < 0$, así que, como y es positivo, $y - y_2 > 0$ y la desigualdad se satisface solo si $y - y_1 \leq 0$, esto es,

$$y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 4z^2}}{z}.$$

Como $z \leq y$, tenemos que $z^2 \leq yz \leq 4 + \sqrt{16 + 4z^2}$, o bien, $z^2 - 4 \leq \sqrt{16 + 4z^2}$. Elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad obtenemos que $z^4 - 8z^2 + 16 \leq 16 + 4z^2$, esto es, $z^4 \leq 12z^2$, lo cual implica que $z \leq 3$, pues $z \neq 0$. Analicemos los tres casos:

- Si $z = 1$, entonces $y < 9$ y $x = \frac{4y+4}{y-4}$, por lo que las únicas soluciones son $(x, y, z) = (24, 5, 1)$, $(14, 6, 1)$ y $(9, 8, 1)$.
- Si $z = 2$, entonces $y < 5$ y $x = \frac{2y+4}{y-2}$, por lo que las únicas soluciones son $(x, y, z) = (10, 3, 2)$ y $(6, 4, 2)$.
- Si $z = 3$, entonces $y < 4$, pero supusimos $y \geq z = 3$, así que $y = 3$. Pero $x = \frac{4y+4z}{yz-4}$ no es entero en el caso $y = z = 3$, así que no existen soluciones en este caso.

Como existen tres casos cuando $z = 1$ y dos casos cuando $z = 2$, concluimos que existen cinco triángulos que satisfacen las condiciones del problema.

Problema 6. Sofía tiene n naranjas y a cada una le escribe un número del 1 a n sin repetir. Si quiere guardarlas en cajas de manera tal que la suma de los números escritos en las naranjas sea la misma para cada caja, ¿cuál es el máximo número de cajas que Sofía puede usar?

Solución. Sea k el número de cajas usadas y sea s la suma de los números que hay en cada caja.
Como la suma de los números en cada caja es igual a s, entonces la suma de los números en todas las cajas debe ser sk. Pero entre todas las cajas se juntan los números del 1 al n sin repetir, por lo que la suma de los números en todas las cajas también debe ser $1 + 2 + \cdots + n$. Luego, tenemos que $sk = \frac{n(n+1)}{2}$. Ahora, como la naranja con el número n debe estar en alguna de las cajas, necesariamente $s \geq n$ y, por lo tanto, $nk \leq \frac{n(n+1)}{2}$, esto es, $k \leq \frac{n+1}{2}$. De aquí tenemos dos casos:

- Si $n = 2m$, entonces $k \leq \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}$. Pero k es entero positivo, así que $k \leq m = \frac{n}{2}$.
- Si $n = 2m + 1$, entonces $k \leq \frac{2m+2}{2}$, esto es, $k \leq m + 1 = \frac{n+1}{2}$.

Veamos que en efecto es posible la igualdad. Sea C_i el conjunto de números en las naranjas de la caja i para $1 \leq i \leq k$.

- Si $n = 2m$, consideremos $C_i = \{i, 2m - i + 1\}$ para $1 \leq i \leq m$.
- Si $n = 2m + 1$, consideremos $C_i = \{i, 2m - i + 1\}$ para $1 \leq i \leq m$ y $C_{m+1} = \{2m + 1\}$.

En ambos casos, la unión de todos los C_i es igual a $\{1, 2, \ldots, n\}$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y, la suma de los elementos de cada C_i, es $2m + 1$. Por lo tanto, el máximo número de cajas que puede usar Sofía es $\frac{n}{2}$ si n es par y es $\frac{n+1}{2}$ si n es impar.

Problema 7. Sea Ω el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano cartesiano que satisfacen la ecuación $x^3 + 3xy + y^3 = 1$.
Demuestra que existe un único subconjunto de Ω que consiste de tres puntos A, B y C los cuales forman un triángulo equilátero.

Solución. Factoricemos primero la expresión $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.
Por diferencia de cubos:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 - 1 &= (x + y - 1)\left[(x + y)^2 + (x + y) + 1\right] \\ &= (x + y - 1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1).\end{aligned}$$

Pero $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, así que:

$$\begin{aligned}x^3 + 3xy + y^3 &= (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 3xy \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y - 1).\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}&x^3 + 3xy + y^3 - 1 \\ &= (x + y - 1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1) - 3xy(x + y - 1) \\ &= (x + y - 1)\left(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1) = 0$.
Más aún, la igualdad $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, implica que

$$\begin{aligned}x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 &= \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x + y + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left[(x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2\right],\end{aligned}$$

de donde se sigue que:

$$(x + y - 1)\left[(x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2\right] = 0.$$

Como $(x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$ si y solo si $(x, y) = (-1, -1)$, tenemos que Ω consiste de $(-1, -1)$ y la recta $y = 1 - x$ (nótese que $(-1, -1)$ no es un punto en dicha recta). Como no es posible formar un triángulo con puntos en una recta, el conjunto $\{A, B, C\}$ está conformado por $(-1,-1)$ y dos puntos en la recta $y = 1 - x$, que solo se pueden escoger de una manera para que el triángulo ABC sea equilátero.

Problema 8. La sucesión infinita $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de enteros no necesariamente distintos tiene las siguientes propiedades: $0 \leq a_i \leq i$ para todo entero $i \geq 0$ y,

$$\binom{k}{a_0} + \binom{k}{a_1} + \cdots + \binom{k}{a_k} = 2^k$$

para todo entero $k \geq 0$.
Demuestra que cada entero $N \geq 0$ ocurre en esta sucesión, esto es, para cada entero $N \geq 0$, existe $i \geq 0$ tal que $a_i = N$.

Solución. Demostraremos por inducción en k, que cualquier segmento inicial de la sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_k$ consiste en los siguientes elementos (contados con multiplicidad y no necesariamente en orden):

$$0, 1, \ldots, \ell - 1, \quad 0, 1, \ldots, k - \ell,$$

para algún $\ell \geq 0$ con $2\ell \leq k + 1$.
Para $k = 0$, tenemos $a_0 = 0$, el cual es de esta forma. Ahora supongamos que para $k = m$ los elementos $a_0, a_1, \ldots, a_m$ son de esta forma. Dado que

$$\binom{m+1}{a_0} + \binom{m+1}{a_1} + \cdots + \binom{m+1}{a_m} + \binom{m+1}{a_{m+1}} = 2^{m+1},$$

tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{m+1}{i} + \sum_{i=0}^{m-\ell} \binom{m+1}{i} + \binom{m+1}{a_{m+1}} = 2^{m+1}$$

y, usando que $\binom{m+1}{i} = \binom{m+1}{m+1-i}$, obtenemos que

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} \binom{m+1}{i} + \sum_{i=0}^{m-\ell} \binom{m+1}{m+1-i} + \binom{m+1}{a_{m+1}} = 2^{m+1}. \tag{26}$$

Por otra parte, tenemos que $(1+1)^{m+1} = 2^{m+1}$ y, por el teorema del binomio, esta igualdad es equivalente a la igualdad

$$\binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{1} + \cdots + \binom{m+1}{m+1} = 2^{m+1}. \tag{27}$$

Restando, la igualdad (27) de la igualdad (26), obtenemos que

$$\binom{m+1}{a_{m+1}} = \binom{m+1}{\ell}.$$

De aquí, usando que los coeficientes binomiales $\binom{m+1}{i}$ son crecientes para $i \leq \frac{m+1}{2}$ y decrecientes para $i \geq \frac{m+1}{2}$, concluimos que $a_{m+1} = \ell$ o $a_{m+1} = m - \ell + 1$. En cualquier caso, $a_0, a_1, \ldots, a_{m+1}$ es de nuevo de la forma deseada, lo cual concluye la inducción.
Como consecuencia de esta descripción, cada entero $N \geq 0$ aparece como un término de la sucesión a_i para algún $0 \leq i \leq 2N$.

Problema 9. Gabriel juega a un juego de máquina, que consiste en un tablero con tres números enteros acomodados en círculo. Repetidamente, Gabriel puede sumar 2 a un número y restar 1 al siguiente en sentido horario. De forma alterna, puede restar 2 a un número y sumar 1 al siguiente en sentido horario.
El juego tiene siete posiciones ganadoras. Estas consisten en la posición donde todos los números en el tablero son 0, y las seis posiciones donde dos de los números en el tablero son 0 y el número restante es 1 o -1.
Muestra que independientemente de la configuración inicial, Gabriel puede llegar a una posición ganadora y que esta es única.

Solución. Representamos a la máquina por una tupla (a, b, c) donde los números están en orden de las manecillas del reloj. Consideramos la suma y resta de tuplas entrada por entrada. Así, las jugadas posibles de Gabriel son sumar o restar $(2, -1, 0)$, $(0, 2, -1)$, $(-1, 0, 2)$ a la máquina. En particular notamos que cada jugada es reversible.
Primero demostramos que a partir de cualquier posición (a, b, c), Gabriel puede llegar a una posición $(0, 0, k)$ con $-3 \leq k \leq 3$. Si b es impar, comienza sumando $(2, -1, 0)$ para hacerlo par. Luego, suma o resta $(-1, 0, 2)$ repetidamente hasta que la primera entrada sea 0, manteniendo la segunda fija. De aquí, suma o resta $(0, 2, -1)$ repetidamente hasta que la segunda entrada sea 0, manteniendo la primera fija. Así llega a una posición de la forma $(0, 0, k)$ con k arbitrario. Finalmente, Gabriel hace uso de la identidad

$$4 \cdot (-1, 0, 2) + 2 \cdot (2, -1, 0) + (0, 2, -1) = (0, 0, 7),$$

donde la multiplicación abrevia a una suma repetida. Esto implica que Gabriel puede repetidamente sumar o restar 7 a la última entrada, y por lo tanto puede asegurar que quede entre -3 y 3.
Para demostrar que Gabriel puede llegar de cualquiera de estas posiciones a una posición ganadora, hacemos los casos:

$$\begin{aligned}
(0,0,-3) + (2,-1,0) + (0,2,-1) + 2 \cdot (-1,0,2) &= (0,1,0),\\
(0,0,-2) + (-1,0,2) &= (-1,0,0),\\
(0,0,-1) &= (0,0,-1),\\
(0,0,0) &= (0,0,0),\\
(0,0,1) &= (0,0,1),\\
(0,0,2) - (-1,0,2) &= (1,0,0),\\
(0,0,3) - (2,-1,0) - (0,2,-1) - 2 \cdot (-1,0,2) &= (0,-1,0).
\end{aligned}$$

Ahora, podemos verificar directamente que para una posición (a, b, c), el valor de $a + 2b + 4c$ módulo 7 es invariante bajo cualquiera de los movimientos válidos. Además, todas las posiciones ganadoras tienen un valor distinto. Esto implica que la posición ganadora a la que Gabriel llega es única.

Problema 10. Determina todos los enteros positivos n tales que

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \frac{n}{2},$$

donde $\sigma(n)$ denota a la suma de los divisores positivos de n y $\tau(n)$ denota al número de tales divisores.

Solución. Demostraremos que la única solución es $n = 6$.
Sea $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con $2 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ números primos, $\alpha \geq 0$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, k$. Es bien conocido que[8],

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= (2^{\alpha+1} - 1)\left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right) \cdots \left(\frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\right),\\
\tau(n) &= (\alpha + 1)(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original, obtenemos la ecuación equivalente

$$\begin{aligned}
&2(2^{\alpha+1} - 1)(p_1^{\alpha_1+1} - 1) \cdots (p_k^{\alpha_k+1} - 1)\\
&= 2^\alpha(\alpha + 1)\left[p_1^{\alpha_1}(p_1 - 1)(\alpha_1 + 1)\right] \cdots \left[p_k^{\alpha_k}(p_k - 1)(\alpha_k + 1)\right]. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Observemos que para cada $i = 1, \ldots, k$, tenemos que

$$p_i^{\alpha_i+1} - 1 \leq p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)(\alpha_i + 1), \qquad (29)$$

con la igualdad si y solo si $\alpha_i = 0$. En efecto, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $-1 \leq p_i^{\alpha_i}[\alpha_i(p_i - 1) - 1]$, la cual es claramente verdadera pues $\alpha_i \geq 0$ y $p_i \geq 3$. También es claro que la igualdad se da si y solo si $\alpha_i = 0$.
Por lo tanto, para que se de la igualdad en (28), necesariamente debemos tener que

$$2(2^{\alpha+1} - 1) \geq 2^\alpha(\alpha + 1),$$

esto es, $2^\alpha(3 - \alpha) \geq 2$. Por lo tanto, $\alpha = 0, 1$ o 2.

Caso 1. $\alpha = 0$. En este caso, la ecuación (28) es

$$2(p_1^{\alpha_1+1} - 1) \cdots (p_k^{\alpha_k+1} - 1) = p_1^{\alpha_1}(p_1 - 1)(\alpha_1 + 1) \cdots p_k^{\alpha_k}(p_k - 1)(\alpha_k + 1). \qquad (30)$$

Notemos que si $\alpha_i > 1$, entonces

$$2(p_i^{\alpha_i+1} - 1) < p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)(\alpha_i + 1). \qquad (31)$$

[8] Ver el artículo *"El teorema fundamental de la Aritmética"* de Tzaloa No. 1, año 2013.

En efecto, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$p_i^{\alpha_i}(\alpha_i + 1 + p_i - \alpha_i p_i) < 2,$$

la cual demostraremos por inducción en α_i. Si $\alpha_i = 2$, la desigualdad es $p_i^2(3 - p_i) \leq 0 < 2$, pues $p_i \geq 3$. Supongamos que la desigualdad es verdadera para cierto entero $\alpha_i \geq 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} p_i^{\alpha_i+1}(\alpha_i + 2 + p_i - (\alpha_i + 1)p_i) &= p_i^{\alpha_i+1}(\alpha_i + 1 + p_i - \alpha_i p_i + 1 - p_i) \\ &< p_i^{\alpha_i+1}\left(\frac{2}{p_i^{\alpha_i}} + 1 - p_i\right) \\ &= 2p_i + p_i^{\alpha_i+1}(1 - p_i) \\ &< 0 < 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si algún α_i es mayor que 1, las relaciones (29) y (31) implican que el lado izquierdo de la ecuación (30) es estrictamente menor que el lado derecho. Luego, $\alpha_i = 0$ o 1 para cada $i = 1, \ldots, k$. Así, $n = p_{\beta_1} \cdots p_{\beta_\ell}$ con $\{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\} \subset \{1, \ldots, k\}$. Ahora, la relación (30) es

$$2(p_{\beta_1}^2 - 1) \cdots (p_{\beta_\ell}^2 - 1) = [p_{\beta_1}(p_{\beta_1} - 1) \cdot 2] \cdots [p_{\beta_\ell}(p_{\beta_\ell} - 1) \cdot 2],$$

esto es,

$$2(p_{\beta_1} + 1) \cdots (p_{\beta_\ell} + 1) = 2^\ell p_{\beta_1} \cdots p_{\beta_\ell}.$$

Como los primos $p_{\beta_1}, \ldots, p_{\beta_\ell}$ son impares, el lado izquierdo de esta ecuación es divisible por $2^{\ell+1}$ y, por lo tanto, $2 \mid p_{\beta_1} \cdots p_{\beta_\ell}$, lo cual es un absurdo.

Caso 2. $\alpha = 1$. En este caso, la ecuación (28) es

$$3(p_1^{\alpha_1+1} - 1) \cdots (p_k^{\alpha_k+1} - 1) = 2p_1^{\alpha_1}(p_1 - 1)(\alpha_1 + 1) \cdots p_k^{\alpha_k}(p_k - 1)(\alpha_k + 1). \tag{32}$$

Observemos que si $\alpha_i > 1$, entonces

$$3(p_i^{\alpha_i+1} - 1) < 2p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)(\alpha_i + 1). \tag{33}$$

En efecto, si $\alpha_i = 2$ la desigualdad es $p_i^3 - 2p_i^2 + 1 > 0$, esto es, $p_i^2(p_i - 2) + 1 > 0$, la cual es evidentemente verdadera ya que $p_i \geq 3$. Supongamos que la desigualdad (33) es verdadera para algún entero $\alpha_i > 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} &2p_i^{\alpha_i+1}(p_i - 1)(\alpha_i + 2) - 3(p_i^{\alpha_i+2} - 1) \\ &= p_i(2p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)(\alpha_i + 1)) + 2p_i^{\alpha_1+1}(p_i - 1) - 3(p_i^{\alpha_i+2} - 1) \\ &> 3(p_i^{\alpha_i+1} - 1)p_i + 2p_i^{\alpha_i+1}(p_i - 1) - 3(p_i^{\alpha_i+2} - 1) \\ &= 2p_i^{\alpha_i+2} - 2p_i^{\alpha_1+1} - 3p_i + 3 \\ &= (p_i - 1)(2p_i^{\alpha_i+1} - 3) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\alpha_1 > 1$, las relaciones (29) y (33) implican que el lado izquierdo de (32) es estrictamente menor que el lado derecho. Luego, $\alpha_1 = 0$ o 1.
Si $\alpha_1 = 1$, la ecuación (32) es

$$\begin{aligned} &3(p_1+1)(p_2^{\alpha_2+1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k+1}-1)\\ &= 4p_1p_2^{\alpha_2}(p_2-1)(\alpha_2+1)\cdots p^{\alpha_k}(p_k-1)(\alpha_k+1). \end{aligned} \tag{34}$$

Observemos que si $p_1 > 3$, entonces

$$3(p_1+1) < 4p_1. \tag{35}$$

Luego, si $p_1 > 3$, las relaciones (29) y (35) implican que el lado izquierdo de (34) es estrictamente menor que el lado derecho. Por lo tanto, $p_1 = 3$ y, en este caso, la ecuación (34) es

$$(p_2^{\alpha_2+1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k+1}-1) = p_2^{\alpha_2}(p_2-1)(\alpha_2+1)\cdots p_k^{\alpha_k}(p_k-1)(\alpha_k+1). \tag{36}$$

Si algún $\alpha_i > 0$, con $2 \leq i \leq k$, la ecuación (29) implica que el lado izquierdo de (36) es estrictamente menor que el lado derecho. Luego, $\alpha_i = 0$ para cada $i = 2, \ldots, k$. Por lo tanto, $n = 2 \cdot 3 = 6$ que claramente es solución de la ecuación original.
Ahora, si $\alpha_1 = 0$, entonces la ecuación (32) es

$$3(p_2^{\alpha_2+1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k+1}-1) = 2p_2^{\alpha_2}(p_2-1)(\alpha_2+1)\cdots p_k^{\alpha_k}(p_k-1)(\alpha_k+1). \tag{37}$$

Si $\alpha_2 > 1$, las relaciones (29) y (33) implican que el lado izquierdo de la ecuación (37) es estrictamente menor que el lado derecho. Luego, $\alpha_2 = 1$ o 0. Si $\alpha_2 = 1$, concluimos como en el caso $\alpha_1 = 1$.
Si $\alpha_2 = 0$, la ecuación (37) es

$$3(p_3^{\alpha_3+1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k+1}-1) = 2p_3^{\alpha_3}(p_3-1)(\alpha_3+1)\cdots p_k^{\alpha_k}(p_k-1)(\alpha_k+1). \tag{38}$$

Continuando de esta forma, concluimos como en el caso $\alpha_1 = 1$ o bien $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. En este último caso, la relación (38) es $3 = 2$, lo que es un absurdo.

Caso 3. $\alpha = 2$. En este caso, la ecuación (28) es

$$7(p^{\alpha_1+1}-1)\cdots(p^{\alpha_k+1}-1) = 6p_1^{\alpha_1}(p_1-1)(\alpha_1+1)\cdots p_k^{\alpha_k}(p_k-1)(\alpha_k+1). \tag{39}$$

Observemos que para cualquier $i \in \{1, \ldots, k\}$, si $\alpha_i > 0$, entonces

$$7(p_i^{\alpha_i+1}-1) < 6p_i^{\alpha_i}(p_i-1)(\alpha_i+1). \tag{40}$$

En efecto, si $\alpha_i = 1$, la desigualdad (40) es $5p_i^2 - 12p_i + 7 > 0$, esto es, $(2p_i-3)^2 + p_i^2 - 2 > 0$, lo cual es evidente ya que $p_i \geq 3$. Supongamos que la desigualdad (40) es verdadera para cierto entero $\alpha_i > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&6p_i^{\alpha_i+1}(p_i-1)(\alpha_i+2) - 7p_i^{\alpha_i+2} + 7 \\
&= p_i(6p_i^{\alpha_i}(p_i-1)(\alpha_i+1)) + 6p_i^{\alpha_i+1}(p_i-1) - 7p_i^{\alpha_i+2} + 7 \\
&> 7(p_i^{\alpha_i+1}-1)p_i + 6p_i^{\alpha_i+1}(p_i-1) - 7p_i^{\alpha_i+2} + 7 \\
&= (6p_i^{\alpha_i+1} - 7)(p_i-1) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 > 0$, las ecuaciones (29) y (40) implican que el lado izquierdo de la ecuación (39) es estrictamente menor que el lado derecho. Por lo tanto, $\alpha_1 = 0$. En este caso, la ecuación (39) es

$$7(p_2^{\alpha_2+1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k+1}-1) = 6p_2^{\alpha_2}(p_2-1)(\alpha_2+1)\cdots p_k^{\alpha_k}(p_k-1)(\alpha_k+1). \tag{41}$$

Usando nuevamente las relaciones (29) y (40), obtenemos que la ecuación (41) no es posible si $\alpha_2 > 0$. Por lo tanto, $\alpha_2 = 0$ y la ecuación (41) es

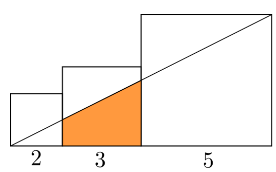
$$7(p_3^{\alpha_3+1}-1)\cdots(p_k^{\alpha_k+1}-1) = 6p_3^{\alpha_3}(p_3-1)(\alpha_3+1)\cdots p_k^{\alpha_k}(p_k-1)(\alpha_k+1).$$

Continuando de esta forma, obtenemos que o bien $\alpha_i > 0$ para cada $i = 1, \ldots, k$, en cuyo caso no hay soluciones de (39), o $\alpha_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, k$ en cuyo caso, la ecuación (39) se reduce a la igualdad $7 = 6$, que es un absurdo.

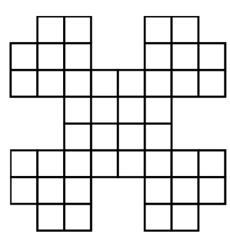
Examen Semifinal Estatal de la 37ª OMM

A continuación presentamos los problemas y soluciones del examen semifinal estatal de la 37^a OMM propuesto por el Comité Organizador.

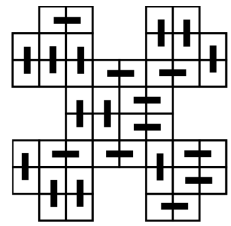
Problema 1. La figura muestra tres cuadrados de lados 2, 3 y 5. ¿Cuánto vale el área sombreada?



Problema 2. La cuadrícula que se muestra está formada por cuadritos de 1×1. ¿De cuántas formas se puede cubrir con fichas de 2×1?



Por ejemplo, abajo de muestra una forma de cubrirla, simbolizando por una línea gruesa los cuadritos que comprendería cada ficha de 2×1.



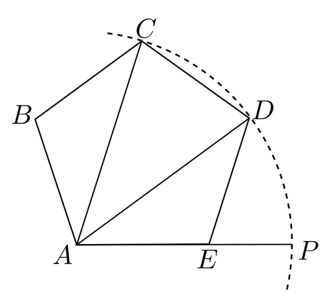
Problema 3. El producto de 6 números enteros positivos consecutivos es un número n de 12 dígitos de la forma

$$n = abbcddcddabb,$$

donde los dígitos a, b, c y d son consecutivos en algún orden.
Determinar los valores de a, b, c y d.

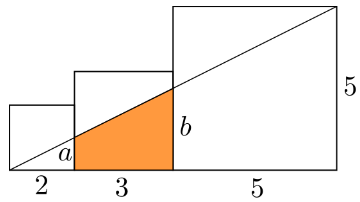
Problema 4. Cada una de 8 tarjetas tiene escrito uno de dos números enteros distintos. Se forman todas las posibles colecciones de 4 tarjetas dentro de esas 8 y se suman los 4 números de las tarjetas. Los resultados de esas sumas se repiten varias veces y son 4 números diferentes. Uno de esos resultados no se conoce. Los otros 3 resultados son: 45, que aparece exactamente 5 veces; 38, que aparece exactamente 30 veces; y 31, que aparece exactamente 30 veces. ¿Cuáles son los 8 números de las tarjetas?

Problema 5. Con centro en el vértice A de un pentágono regular $ABCDE$ se traza un círculo de radio AC hasta que corta a la prolongación del lado AE en el punto P (ver la figura). Si cada lado del pentágono mide 1, ¿cuánto mide EP?



Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 37^{a} OMM

Problema 1. Sean a y b las longitudes de los lados verticales del trapecio sombreado. Por semejanza de triángulos tenemos que $\frac{a}{2} = \frac{b}{2+3} = \frac{5}{2+3+5}$, esto es, $\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{1}{2}$.

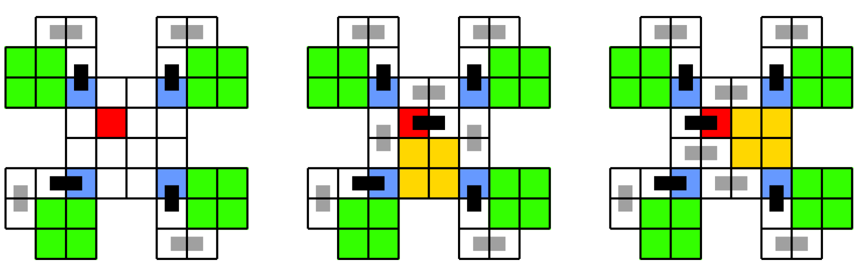


Entonces, $a = 1$ y $b = \frac{5}{2}$. Por lo tanto, el área del trapecio mide $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{21}{4}$.

Problema 2. Primero notamos que los 4 cuadritos en las esquinas del cuadrado central de 4×4 (marcados con azul en la figura de abajo) deben cubrirse con fichas de 2×1 que solo abarquen ese cuadro por fuera del cuadrado de 4×4, puesto que, de otra forma, hacia afuera quedarían 7 cuadritos y 7 es número impar. En cada uno de esos cuadraditos hay 2 posibilidades para colocar la ficha y esto nos da $2^4 = 16$ posibilidades. Una vez elegida la posición de esas fichas, algunas fichas en la parte de afuera deben colocarse forzosamente de cierta manera (marcadas con línea gris en el ejemplo abajo a la izquierda) y cada una de las figuras de las orillas tiene 2 formas de cubrirse (dependiendo de cómo se pongan las fichas en los cuadrados de 2×2 marcados con verde en la figura). Como hay 4 cuadrados verdes, hasta aquí llevamos $2^4 \cdot 2^4 = 2^8$ posibilidades.

Ahora fijémonos en las posibilidades para cubrir el cuadrito rojo de la figura. Si se cubre hacia adentro del cuadro de 2×2 central (2 posibilidades), entonces queda solo por escoger cómo se cubre el cuadrado de 2×2 que queda completo sin cubrir (2 formas) marcado en amarillo. Así que en este caso hay 4 formas. Si se cubre hacia afuera, también hay 2 posibilidades y otras 2 para completar.

En total, el número de formas de cubrir la figura es $2^8(4 + 4) = 2^{11} = 2048$.



Problema 3. Entre los 6 números consecutivos, hay 3 enteros pares y, al menos, un múltiplo de 5, de manera que $b = 0$. Entonces, a, c y d son los números 1, 2 y 3, en algún orden. También, entre los 6 números consecutivos, debe haber dos múltiplos de 3, así que n es múltiplo de 9 y, por lo tanto, también lo es la suma de sus dígitos, es decir,

$$2a + 4b + 2c + 4d = 2(a + 2 \cdot 0 + c + 2d)$$

es múltiplo de 9, de donde también lo es $a + c + 2d$. Pero este número es, a lo más, $1+2+2\cdot 3 = 9$, así que la única posibilidad es $\{a, c\} = \{1, 2\}$ y $d = 3$. Ahora, también el número n es múltiplo de 16, pues forzosamente al menos uno de los 6 números es múltiplo de 4 y otros dos son múltiplos de 2. Entonces, por el criterio de divisibilidad del[9] 16, también debe ser múltiplo de 16 el número formado por los últimos cuatro dígitos de n, esto es, el número $dabb$ debe ser múltiplo de 16. Si $a = 1$, tenemos el número 3100, que no es múltiplo de 16 y, si $a = 2$, tenemos el número 3200, que sí es múltiplo de 16. Por lo tanto, $a = 2$ y $c = 1$.

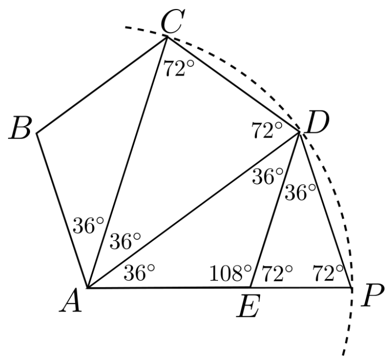
Problema 4. El número total de cuartetas es $\binom{8}{4} = 70$, así que la suma faltante aparece $70 - (30 + 30 + 5) = 5$ veces. Es claro que no todas las tarjetas pueden tener el mismo número. Supongamos que los números de las tarjetas son a y b. Veamos que alguno de a o b aparece 5 veces y el otro aparece 3 veces. Si uno de ellos, digamos a, apareciera 7 veces, entonces la suma $a + a + a + a$ aparecería $\binom{7}{4} = 35$ veces. Si a apareciera 6 veces, entonces la suma $a + a + a + a$ aparecería $\binom{6}{4} = 15$ veces. Si ambos a y b aparecieran 4 veces, entonces la suma $a + a + a + b$ aparecería $\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$ veces. En cualquier caso, tenemos un absurdo, por lo que uno de los números, digamos a, aparece 5 veces, mientras que el otro número, b, aparece 3 veces. Las cuartetas posibles son:

$$
\begin{aligned}
(a, a, a, a),\quad & \binom{5}{4} = 5 \text{ veces},\\
(a, a, a, b),\quad & \binom{5}{3}\binom{3}{1} = 30 \text{ veces},\\
(a, a, b, b),\quad & \binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30 \text{ veces},\\
(a, b, b, b),\quad & \binom{5}{1}\binom{3}{3} = 5 \text{ veces}.
\end{aligned}
$$

Tenemos dos posibilidades: $3a + b = 38$ y $2a + 2b = 31$, o bien, $3a + b = 31$ y $2a+2b = 38$. En el primer caso, restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos que $a - b = 7$, de donde $b = a - 7$. Sustituyendo b en la primera ecuación, obtenemos que $38 = 3a + a - 7$, de donde $4a = 45$, lo cual es imposible. En el otro caso, de la misma forma obtenemos $a - b = -7$, esto es, $b = a + 7$. Sustituyendo b en la primera ecuación, resulta que $31 = 3a + a + 7$, esto es, $4a = 24$, de donde $a = 6$ y, por consiguiente, $b = 6 + 7 = 13$. Por lo tanto, los números de las tarjetas son: 6, 6, 6, 6, 6, 13, 13, 13.

Problema 5. Sabemos que cada uno de los ángulos internos de un pentágono regular mide $\frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. En el triángulo isósceles ADE, los ángulos en A y en D miden $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Análogamente, el ángulo en A del triángulo ABC también mide 36°. Entonces, el ángulo en A del triángulo CAD mide $108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$.

[9]Un entero positivo n es divisible por 16 si y solo si el número formado por los últimos cuatro dígitos de n es divisible por 16.



Como los triángulos CAD y DAP son isósceles, el ángulo distinto mide $36°$ y comparten el lado AD, tenemos que estos triángulos son congruentes, $DP = CD = 1$ y $\angle APD = \angle ADC = 108° - 36° = 72°$.
También tenemos que el ángulo en E del triángulo DEP mide $180° - 108° = 72°$, de donde el triángulo EPD es isósceles y semejante al triángulo DPA. Por lo tanto, $\frac{EP}{DP} = \frac{DP}{AP}$, esto es, $EP = \frac{1}{1+EP}$, de donde obtenemos la ecuación $EP^2 + EP - 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos que la única solución positiva es $EP = \frac{-1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2^{a} Olimpiada Femenil de Matemáticas (Concurso Metropolitano, CdMx)

Los días 11 y 13 de mayo de 2023, se llevaron a cabo los exámenes selectivos para determinar al equipo que representaría a la Ciudad de México en el 2° Concurso Nacional Femenil de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los exámenes selectivos se llevaron a cabo en dos niveles distintos, en concordancia con los niveles del Concurso Nacional: el nivel 1 para alumnas de primer año de bachillerato y grados inferiores y, el nivel 2, que corresponde a las alumnas de los últimos dos años de bachillerato. Participaron 12 y 9 alumnas en los niveles 1 y 2, respectivamente. Las estudiantes finalistas fueron seleccionadas a partir de los resultados del Concurso Metropolitano 2022 que además es el concurso que selecciona a las y los participantes que representan a la Ciudad de México en el Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A continuación, presentamos los exámenes selectivos de los Niveles 1 y 2 que sirvieron para elegir a la delegación de la Ciudad de México para participar en la 2^a Olimpiada Nacional Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Nivel 1

Problema 1. 2023 números distintos de cero se escriben en una fila. La suma de dos números vecinos cualesquiera es positiva, mientras que la suma de todos los números es negativa. ¿El producto de todos estos números es negativo o positivo?

Problema 2. Aladdin tiene monedas de oro en un montón y de vez en cuando le pide más oro al Genio. Cada vez que Aladdin pide monedas, el Genio responde con tres acciones. Primero, el Genio agrega mil monedas de oro al montón de Aladdin, y después divide el montón resultante en dos montones del mismo peso sin romper monedas en

pedazos más pequeños. Finalmente, el Genio se queda con un montón y el otro se lo da a Aladdin. ¿Es posible que Aladdin haya aumentado su cantidad de monedas de oro después de pedirle al Genio monedas 10 veces?
Nota: Todas las monedas de oro pesan lo mismo.

Problema 3. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y tal que $AD = BC$. Las diagonales AC y BD se cortan en el punto P y se cumple que $\angle APD = 90°$. La perpendicular desde P hacia AD corta a BC en el punto R. La perpendicular desde P hacia BC corta AD en el punto S. Determina el valor de

$$\frac{RS}{AB + CD}.$$

Problema 4. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo con 5 lados iguales y ángulos rectos en C y D. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Demuestra que $PA = PD$.

Problema 5. Demuestra que el número $n^n - n$ es divisible por 24 para todo entero positivo impar n.

Problema 6. En un pizarrón están escritos uno o varios números. Vicky puede hacer alguno de los siguientes movimientos:

- Dado un número n en el pizarrón, borra n y escribe dos enteros no negativos a y b tales que $a + b = n$.
- Dados dos números x y y, borra ambos y escribe su diferencia $x - y$, asumiendo que esta es positiva o cero.

Si al principio está escrito únicamente el número 2023, ¿es posible que, después de varios movimientos, solo quede escrito el número 0 en el pizarrón?

Nivel 2

Problema 1. Aladdin tiene monedas de oro en un montón y de vez en cuando le pide más oro al Genio. Cada vez que Aladdin pide monedas, el Genio responde con tres acciones. Primero, el Genio agrega mil monedas de oro al montón de Aladdin, y después divide el montón resultante en dos montones del mismo peso sin romper monedas en pedazos más pequeños. Finalmente, el Genio se queda con un montón y el otro se lo da a Aladdin. ¿Es posible que Aladdin haya aumentado su cantidad de monedas de oro después de pedirle al Genio monedas 10 veces?
Nota: Todas las monedas de oro pesan lo mismo.

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ y tal que $AD = BC$. Las diagonales AC y BD se cortan en el punto P y se cumple que $\angle APD = 90°$. La perpendicular desde P hacia AD corta a BC en el punto R. La perpendicular desde P hacia BC corta AD en el punto S. Determina el valor de

$$\frac{RS}{AB + CD}.$$

Problema 3. Hay 4046 casas en una calle, que se dividen en 2023 pares. Cada par está ubicado uno frente al otro en la calle y cada casa está numerada con un número positivo. En el lado derecho de la calle, todas las casas tienen números pares, mientras que todas las casas en el lado izquierdo tienen números impares. En ambos lados de la calle, los números aumentan de un extremo a otro de la calle, pero los números no son necesariamente consecutivos (algunos números pueden omitirse). Para cada casa del lado derecho de la calle, se calcula la diferencia entre su número y el número de la casa opuesta, y resulta que todas las diferencias son distintas entre sí. Sea n el mayor número de una casa en la calle. Determina el menor valor posible de n.

Problema 4. En un tablero de 5×5, un rey puede moverse de acuerdo a las siguientes reglas:

- Se puede mover una casilla a la vez de manera horizontal, vertical o en diagonal.
- Se puede mover en cada una de las ocho direcciones permitidas a lo más tres veces durante su recorrido.

Si el rey puede comenzar en cualquier casilla del tablero, determina:

a) si el rey puede visitar todas las casillas,

b) si el rey puede visitar todas las casillas excepto la del centro.

Problema 5. Sea τ una circunferencia de radio r y sea AB una cuerda de τ tal que $AB > r$. Sea S el punto en la cuerda AB que satisface $AS = r$. La perpendicular a través del punto medio de BS interseca a τ en los puntos C y D. La recta que pasa a través de D y S, interseca a τ en E por segunda vez. Demuestra que el triángulo CSE es equilátero.

Problema 6. Sea N un entero positivo tal que N es divisible por 81 y, el número formado poniendo los dígitos de N al revés, también es divisible por 81. Demuestra que la suma de los dígitos de N también es divisible por 81.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

El 13 de marzo de 2023 se aplicó a distancia, el examen de la XXXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los participantes en el entrenamiento nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas del proceso 2023. Con base en los resultados de los concursantes, se enviaron los exámenes con las mejores diez calificaciones a los organizadores de la APMO. En esta ocasión, el país organizador fue Brasil.

En esta competencia, México obtuvo un total de 3 medallas distribuidas de la siguiente manera: una de oro, una de plata y una de bronce. Además, se obtuvieron tres menciones honoríficas. En total, México obtuvo 105 puntos quedando en el lugar número 17 de 38 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero): Medalla de oro.
- Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes): Medalla de plata.
- Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa): Medalla de bronce.
- Iker Torres Terrazas (Chihuahua).
- Eric Ransom Treviño (Nuevo León): Mención honorífica.

- Juan Alfonso Mathías Pérez Mondragón (Puebla): Mención honorífica.
- Mateo Iván Latapí Acosta (Ciudad de México): Mención honorífica.
- María Fernanda López Tuyub (Yucatán).
- Juan Luis Manríquez Sequera (Baja California Sur).
- Luis Angel Gabriel Jiménez Iturbide (Tabasco).

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Sea $n \geq 5$ un número entero. Considera n cuadrados con lados $1, 2, \ldots, n$, respectivamente (uno de cada uno). Los cuadrados están acomodados en el plano de manera que sus lados son paralelos a los ejes x y y. Supón que los cuadrados no se tocan, salvo quizás, en sus vértices. Demuestra que es posible acomodarlos de manera que cada cuadrado toque exactamente a otros dos cuadrados.

Problema 2. Encuentra todos los enteros n tales que $n \geq 2$ y $\frac{\sigma(n)}{p(n)-1} = n$, donde $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores positivos de n y $p(n)$ denota el divisor primo más grande de n.

Problema 3. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sean W, X, Y y Z puntos en los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, tales que los incentros de los triángulos AWZ, BXW, CYX y DZY formen un paralelogramo. Demuestra que $WXYZ$ es un paralelogramo.

Problema 4. Sea $c > 0$ un número real positivo dado y sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de todos los números reales positivos. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que

$$f((c+1)x + f(y)) = f(x + 2y) + 2cx$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Problema 5. En el plano hay n segmentos de línea de manera que no hay tres que tengan un punto en común y tales que cada pareja de segmentos se intersecan en sus respectivos interiores. Antonio y sus $2n-1$ amigos se acomodan cada uno en un vértice de uno de los segmentos (es decir, en los extremos). Antonio quiere enviar regalos de Navidad a cada uno de sus amigos como sigue: Primero, él elige un vértice de cada segmento para que sea un "punto atractor". Luego, él pone el regalo en un vértice del segmento en el que él está. El regalo se mueve como sigue:

- Si está en un segmento, se mueve hacia el punto atractor.
- Si llega a la intersección de dos segmentos, se moverá al nuevo segmento y empezará a moverse hacia el punto atractor del nuevo segmento.

Si el regalo llega a un vértice, el amigo que está ahí lo recibirá. Demuestra que Antonio puede enviar regalos a exactamente n de sus $2n - 1$ amigos.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2023

Del 13 al 19 de abril de 2023, se llevó a cabo la decimosegunda edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) de manera presencial en Portoroz, Eslovenia. El equipo mexicano estuvo integrado por:

- Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
- Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos).
- Ana Camila Cuevas González (Tamaulipas).
- Andrea Escalona Contreras (Morelos).

El equipo mexicano obtuvo excelentes resultados: Rosa Victoria obtuvo medalla de plata; Andrea Escalona obtuvo medalla de bronce y, Andrea Sarahí, obtuvo mención honorífica. México ocupó el lugar 29 de 55 países participantes y segundo lugar de iberoamérica. La líder del equipo mexicano fue Sofía Ortega Castillo y la tutora fue Ana Paula Jiménez Díaz.

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la décima ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2023. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

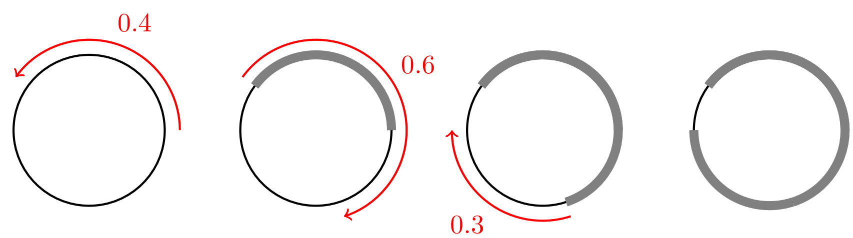
Problema 1. Se tienen $n \geq 3$ números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Para cada $1 \leq i \leq n$ se define $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$, donde $a_0 = a_n$ y $a_{n+1} = a_1$. Suponga que para cada $1 \leq i \leq n$ y cada $1 \leqslant j \leqslant n$ se tiene que $a_i \leq a_j$ si y solo si $b_i \leq b_j$. Demuestre que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea D el punto sobre su circunferencia circunscrita tal que AD sea un diámetro. Se escogen puntos K y L en los segmentos AB y AC respectivamente, tales que DK y DL son tangentes al círculo AKL. Demuestre que la recta KL pasa por el ortocentro de ABC.

Problema 3. Sea k un entero positivo. Alexa tiene un diccionario $\mathcal{D}$ que contiene algunas palabras de k letras formadas solo con las letras A y B. En cada casilla de un

tablero de tamaño $k \times k$, Alexa quiere escribir solo la letra A o la letra B, de tal manera que cada columna contenga una palabra de $\mathcal{D}$ cuando es leída de arriba a abajo y cada fila contenga una palabra de $\mathcal{D}$ cuando es leída de izquierda a derecha.
¿Cuál es el menor entero m tal que si $\mathcal{D}$ contiene por lo menos m palabras diferentes, entonces Alexa siempre puede llenar su tablero de esta manera, sin importar cuáles son las palabras que están en el diccionario $\mathcal{D}$?

Problema 4. El caracolito Turbo está sobre un punto de una circunferencia de longitud 1. Sea $c_1, c_2, c_3, \ldots$ una sucesión de números reales positivos. Turbo se arrastra sucesivamente distancias $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sobre la circunferencia, eligiendo cada vez el sentido: horario o antihorario.
Por ejemplo, si la sucesión $c_1, c_2, c_3, \ldots$ es $0.4, 0.6, 0.3, \ldots$, entonces Turbo podría haber elegido arrastrarse como a continuación:



Determine la mayor constante $C > 0$ con la propiedad siguiente: para toda sucesión de números reales positivos $c_1, c_2, c_3, \ldots$ tales que $c_i < C$ para todo i, Turbo puede asegurar (tras haber estudiado la sucesión) que hay un punto de la circunferencia al que nunca llegará ni por el que nunca se arrastrará.

Problema 5. Sea $s \geq 2$ un entero positivo. Para cada entero positivo k se define su *torcimiento* k' como sigue: si k se escribe como $as + b$, con a, b enteros no negativos y con $b < s$, entonces $k' = bs + a$. Sea n un entero positivo, considérese la sucesión infinita $d_1, d_2, \ldots$ con $d_1 = n$ y d_{i+1} el torcimiento de d_i para cada entero positivo i.
Demuestre que esta sucesión contiene a 1 si y solo si el resto (residuo) de la división de n por $s^2 - 1$ es 1 o s.

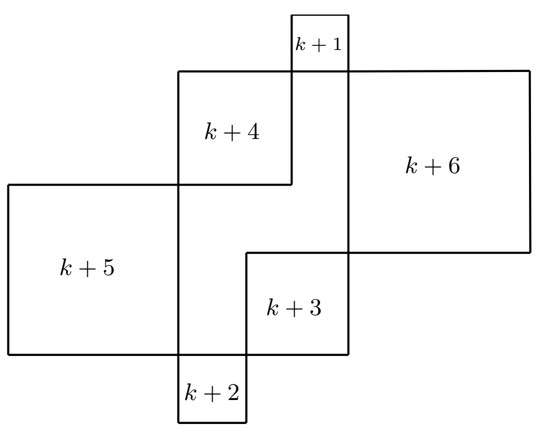
Problema 6. Sea ABC un triángulo con circunferencia circunscrita Ω. Se denota por S_b y S_c a los puntos medios de los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{AB}$ que no contienen al tercer vértice del triángulo, respectivamente. Sea N_a el punto medio del arco $\widehat{BAC}$ (el arco $\widehat{BC}$ que contiene a A). Sea I el incentro de ABC. Sea ω_b la circunferencia que es tangente a AB y es tangente internamente a Ω en S_b y, sea ω_c la circunferencia que es tangente a AC y es tangente internamente a Ω en S_c. Demuestre que la recta IN_a y la recta que pasa por las intersecciones de ω_b y ω_c, se intersecan sobre Ω.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

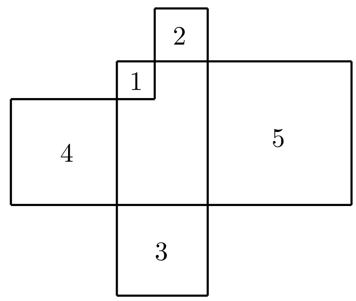
A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Solución del problema 1. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Se probará el enunciado por inducción. Supongamos que existe un acomodo de los n cuadrados para $n = k$. Entonces, existe un acomodo con $k+6$ cuadrados; para ello, consideremos la siguiente figura:

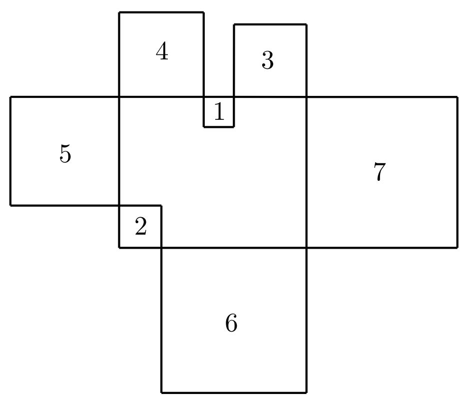


donde el número en el interior de cada cuadrado representa la longitud de su lado. Nótese que $(k+1)+(k+4) = (k+2)+(k+3)$, $(k+5)+(k+4) = (k+6)+(k+3)$ y $(k+4) - (k+3) = 1$, por lo que, en efecto, es posible realizar dicha construcción. Más aún, dicho acomodo satisface que cualquier cuadrado toca exactamente otros dos cuadrados, por lo que, junto con algún acomodo de k cuadrados, es posible encontrar un acomodo con $k+6$ cuadrados. Por lo tanto, basta con encontrar un acomodo con $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ cuadrados, los cuales se muestran a continuación (la construcción para el caso $n = 6$ es como la mostrada en la figura anterior, con $k = 0$).

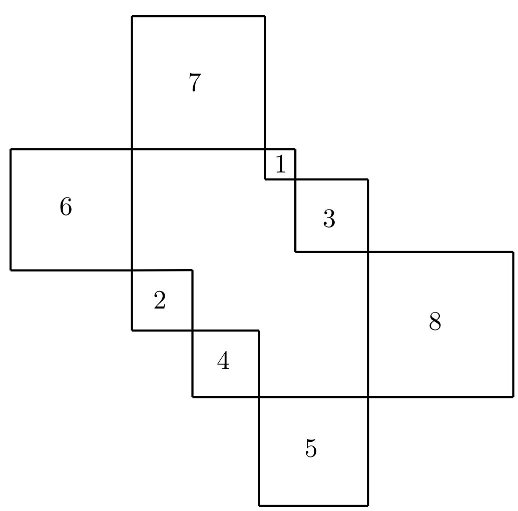
$n = 5:$



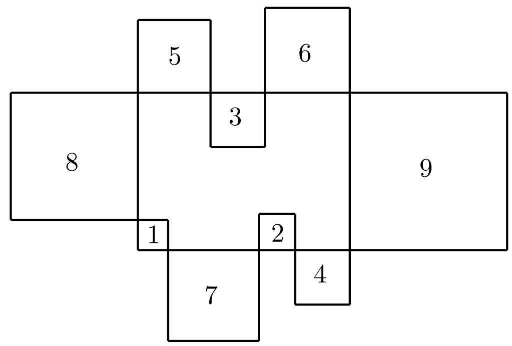
$n = 7:$



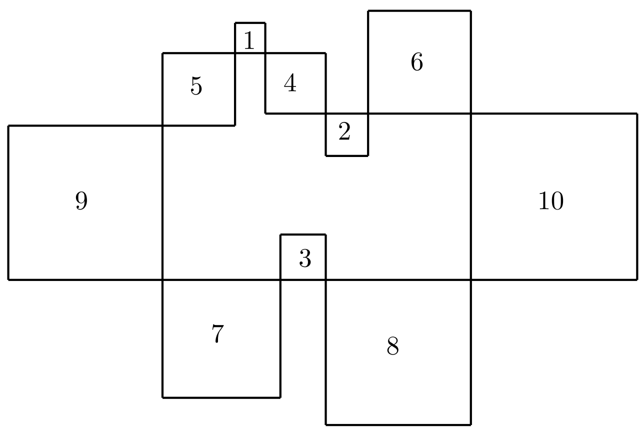
$n = 8:$



$n = 9:$



$n = 10:$



Solución del problema 2. (Solución de Mateo Iván Latapí Acosta). Sea $n \geq 2$ un entero tal que $\frac{\sigma(n)}{p(n)-1} = n$. Supongamos primero que $n = q^\alpha$ con q número primo y α entero positivo. En este caso, tenemos que $p(n) = q$ y $\sigma(n) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^\alpha$. Como $q \nmid \sigma(n)$, se sigue que $n \nmid \sigma(n)$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, n tiene al menos dos divisores primos distintos.
Supongamos que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ números primos y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ enteros positivos. Es conocido[10] que

$$\sigma(n) = (1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{\alpha_k}).$$

Observemos que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$(1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i - 1}) + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i} - 1}{p_i - 1} + p_i^{\alpha_i} < \frac{p_i^{\alpha_i}}{p_i - 1} + p_i^{\alpha_i} = p_i^{\alpha_i} \cdot \frac{p_i}{p_i - 1},$$

[10] Ver el artículo *"El teorema fundamental de la Aritmética"* de Tzaloa No. 1, año 2013.

lo cual implica que

$$\sigma(n) < p_1^{\alpha_1}\frac{p_1}{p_1-1}p_2^{\alpha_2}\frac{p_2}{p_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k}\frac{p_k}{p_k-1} = n\cdot\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}. \tag{42}$$

A continuación demostraremos el siguiente lema.

Lema. *Si $q_1 = 2$, $q_2 = 3, \ldots, q_j$, son los primeros j números primos, con $j \geq 3$, entonces*

$$\frac{q_1}{q_1-1}\cdot\frac{q_2}{q_2-1}\cdots\frac{q_j}{q_j-1} \leq q_j - 1. \tag{43}$$

Demostración. La prueba la haremos por inducción en j. Si $j = 3$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} < 4 = 5-1$, probando así el caso base. Supongamos que, para algún $j \geq 3$ se cumple la desigualdad (43). Entonces

$$\frac{q_1}{q_1-1}\cdot\frac{q_2}{q_2-1}\cdots\frac{q_j}{q_j-1}\cdot\frac{q_{j+1}}{q_{j+1}-1} \leq (q_j-1)\left(\frac{q_{j+1}}{q_{j+1}-1}\right).$$

Pero $(q_j-1)\left(\frac{q_{j+1}}{q_{j+1}-1}\right) \leq q_{j+1}-1$ si y solo si $(q_j-1)(q_{j+1}) \leq (q_{j+1}-1)^2$, esto es,

$$q_{j+1}(q_j+2) \leq q_{j+1}^2 + q_{j+1} + 1.$$

Como $q_j + 2$ y q_{j+1} son primos impares con $j \geq 3$, tenemos que $q_j + 2 \leq q_{j+1}$, por lo que $(q_j+2)(q_{j+1}) \leq q_{j+1}^2$, probando así el resultado. □

Continuando con la solución del problema, tenemos que $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ donde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ son números primos. Si $k \geq 3$, entonces aplicando la desigualdad (42) y el Lema obtenemos que

$$\sigma(n) < n\cdot\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1} \leq n(p_k-1),$$

esto es, $\frac{\sigma(n)}{p_k-1} < n$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $k < 3$ y $n = p^\alpha q^\beta$ con $p < q$ números primos. Si $q > 3$, entonces $\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} \leq 2$ y, por la desigualdad (42), obtenemos que

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1} \leq 2\left(\frac{q}{q-1}\right) = 2\left(1+\frac{1}{q-1}\right) = 2 + \frac{2}{q-1} < 3 < q-1,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $p = 2$ y $q = 3$, por lo que

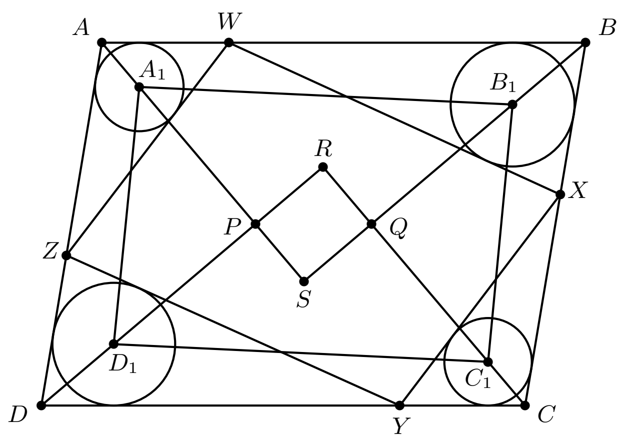
$$(1+2+\cdots+2^\alpha)(1+3+\cdots+3^\beta) = 2^\alpha 3^\beta(3-1) = 2^{\alpha+1}\cdot 3^\beta,$$

esto es,

$$\left(\frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{\beta+1}-1}{3-1}\right) = 2^{\alpha+1}\cdot 3^\beta,$$

de donde $(2^{\alpha+1} - 1)(3^{\beta+1} - 1) = 2^{\alpha+2} \cdot 3^{\beta}$. Como $\text{mcd}(2^{\alpha+1} - 1, 2^{\alpha+2}) = 1$ y $\text{mcd}(3^{\beta}, 3^{\beta+1} - 1) = 1$, necesariamente se debe cumplir que $2^{\alpha+2} = 3^{\beta+1} - 1$, esto es, $3^{\beta+1} - 2^{\alpha+2} = 1$. Como $\beta + 1$ y $\alpha + 2$ son enteros positivos, por el teorema de Catalán[11], $\beta + 1 = 2$ y $\alpha + 2 = 3$, por lo que $n = pq = 2 \cdot 3 = 6$ es la única solución.

Solución del problema 3. (Solución de Eric Ransom Treviño). Sean A_1, B_1, C_1 y D_1 los incentros de los triángulos AWZ, BXW, CYX y DZY, respectivamente. Sean P, Q, R y S los puntos de intersección de AA_1 con DD_1, BB_1 con CC_1, CC_1 con DD_1 y AA_1 y BB_1, respectivamente. Tenemos que DD_1 es bisectriz de $\angle ADC$ y BB_1 es bisectriz de $\angle ABC$. Como $ABCD$ es un paralelogramo, tenemos que $\angle D_1DC = \angle B_1BA$ y, como $DC \parallel BA$, resulta que $DD_1 \parallel BB_1$. Análogamente, llegamos a que $CC_1 \parallel AA_1$, lo cual implica que $PRQS$ es un paralelogramo.
Como $CR \parallel AS$, $RD \parallel SB$, $DC \parallel BA$ y $DC = BA$, los triángulos ASB y CRD son congruentes; más aún, son homotéticos, de donde se sigue que RS, BD y AC concurren. Análogamente, llegamos a que los triángulos BQC y DPA son homotéticos y congruentes, así que PQ, BD y AC concurren, por lo que RS, PQ, BD y AC concurren.



También tenemos que los triángulos A_1PD_1 y C_1QB_1 son homotéticos y congruentes, pues $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $PA_1 \parallel QC_1$, $PD_1 \parallel QB_1$ y $A_1D_1 = C_1B_1$, lo cual implica que PQ, A_1C_1 y D_1B_1 concurren. Análogamente, tenemos que los triángulos A_1SB_1 y C_1RD_1 son homotéticos y congruentes, por lo que RS, A_1C_1 y B_1D_1 concurren, llegando así a que PQ, RS, A_1C_1 y D_1B_1 concurren. Por lo tanto, PQ, RS, BD, AC, A_1C_1 y D_1B_1, concurren en un punto M. Notemos que $MA = MC$, $MA_1 = MC_1$, $MB = MD$ y $MB_1 = MD_1$, pues M es el punto de intersección de las diagonales de los paralelogramos $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$. Como $\angle AMA_1 = \angle CMC_1$, $AM = CM$ y $A_1M = C_1M$, tenemos que los triángulos AMA_1 y CMC_1 son congruentes, por lo que $AA_1 = CC_1$. Análogamente, obtenemos que $BB_1 = DD_1$, es decir, el incírculo del triángulo DZY tiene el mismo radio que el incírculo del triángulo BXW y, el

[11]**Teorema de Catalán.** La única solución en enteros positivos de la ecuación $x^a - y^b = 1$ es $x = 3$, $y = 2$, $a = 2$ y $b = 3$.

incírculo del triángulo AWZ tiene el mismo radio que el incírculo del triángulo CXY. Supongamos que $XB < ZD$ y sean X', Y' los puntos en BC y CD respectivamente, tales que $X'Y' = WZ$ y $X'Y' \parallel WZ$ (los cuales están dados por la reflexión de WZ sobre M), es decir, $WX'Y'Z$ es un paralelogramo. Tenemos que $X'Y'$ es tangente al incírculo del triángulo CXY, pues WZ es tangente al incírculo del triángulo AWZ y ambos círculos tienen el mismo radio, por lo que un incírculo es el reflejado de otro sobre M y, por consiguiente, $X'B = ZD$.
Luego, como $X'Y'$ es tangente al incírculo del triángulo CXY, si $CY > CY'$ entonces XY no es tangente al incírculo del triángulo CXY, lo que es una contradicción y, por lo tanto, $CY < CY'$. Por otra parte, como $X \neq X'$ y $BX' > BX$, WX' no toca al incírculo del triángulo BXW. Recordemos que el incírculo del triángulo DYZ es reflejado por M del incírculo del triángulo BXW; como $WX'Y'Z$ es paralelogramo y WX' no toca al incírculo del triángulo BXW, entonces ZY' no toca al incírculo del triángulo DYZ. Como ZY' no toca al incírculo del triángulo DYZ, llegamos a que $DY < DY'$, es decir, $CY' < CY$, que es una contradicción. Por lo tanto, $XB \geq ZD$. De forma análoga, si W' y Z' son las reflexiones de W y Z sobre M, concluimos que $XB > ZD$ es imposible, por lo que $XB = ZD$. Es decir, $X' = X$ y $Y' = Y$, por lo que $WZ \parallel XY$.
Por otra parte, como $ZD = XB$, $\angle B_1BX = \angle D_1DZ$ y $DD_1 = BB_1$, se sigue que los triángulos B_1XB y D_1ZD son congruentes, por lo que $\angle B_1XB = \angle D_1ZD$. Pero XB_1 y ZD_1 son bisectrices de los triángulos BXW y DYZ respectivamente, llegando así a que $\angle WXB = \angle YZD$, es decir, $YZ \parallel XW$, concluyendo así que $WXYZ$ es un paralelogramo.

Solución del problema 4. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Demostraremos primero que $f(x) \geq 2x$ para todo $x > 0$. Supongamos, por contradicción, que $f(y) < 2y$ para algún $y > 0$. Entonces, $x = \frac{2y - f(y)}{c} > 0$ y $(c+1)x + f(y) = x + 2y$, por lo que $2cx = 0$, que es una contradicción.
Sea $g(x) = f(x) - 2x$. Como $f(x) \geq 2x$ para todo x, tenemos que $g(x) \geq 0$ para todo x. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} g\left((c+1)x + f(y)\right) &= f\left((c+1)x + f(y)\right) - 2(c+1)x - 2f(y) \\ &= f(x+2y) + 2cx - 2(c+1)x - 2f(y) \\ &= g(x+2y) + 2x + 2cx - 2(c+1)x + 4y - 2f(y) \\ &= g(x+2y) - 2(f(y) - 2y) \\ &= g(x+2y) - 2g(y). \end{aligned}$$

Lema. *Sean w, y números reales positivos. Si $w > 2y$, entonces existe $m > 0$ tal que $g(w) - 2g(y) = g(m)$.*

Demostración. Como $g\left((c+1)x + f(y)\right) = g(x+2y) - 2g(y)$, tomando $x = w - 2y$, tenemos que

$$g\left((c+1)(w-2y) + f(y)\right) = g(w - 2y + 2y) - 2g(y)$$

y, tomando $m = (c+1)(w-2y) + f(y)$, obtenemos el resultado. □

Por otra parte, como $f(y) \geq 2y$ y $(c+1)x > 0$, resulta que $(c+1)x + f(y) > 2y$, por lo que $m > 2y$. Aplicando el Lema inductivamente, existe una sucesión $m_1, m_2, \ldots$ de números reales positivos tal que $g(m_k) = g(w) - 2kg(y)$. Es decir, para todo $w > 2y$ y cualquier entero positivo n, existe un número real $z > 0$ tal que

$$g(z) = g(w) - 2ng(y).$$

Como $g(z) \geq 0$, tenemos que $g(w) \geq 2ng(y)$. En particular, si $w = 2y + 2$, entonces

$$g(2y+2) \geq 2ng(y) \tag{44}$$

para todo entero positivo n. Si $g(y) > 0$, entonces, para n suficientemente grande, la desigualdad (44) no se cumple, por lo que $g(y) = 0$ para todo número real $y > 0$, esto es, $f(x) = 2x$ para todo $x > 0$. Es claro que $f(x) = 2x$ satisface las condiciones del problema, por lo que $f(x) = 2x$ es la única solución.

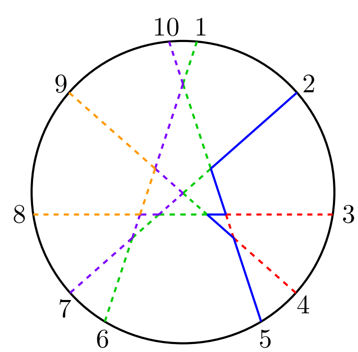
Solución del problema 5. Tracemos una circunferencia que encierre todos los puntos de intersección entre los segmentos, y extendamos todos los segmentos hasta que toquen la circunferencia, y movamos a Tony y a todos sus amigos a la circunferencia. Etiquetemos a continuación todos los puntos de intersección de segmentos con la circunferencia, de 1 a $2n$, en sentido antihorario, empezando por Tony. Probaremos que los amigos que pueden recibir regalos son aquellos que se encuentran en puntos de intersección etiquetados con un número par. Para ello se probará el siguiente lema.

Lema. *Es posible colorear con dos colores las regiones en el círculo formadas por las n líneas, de tal forma que dos regiones que estén delimitadas por la misma línea tengan diferente color.*

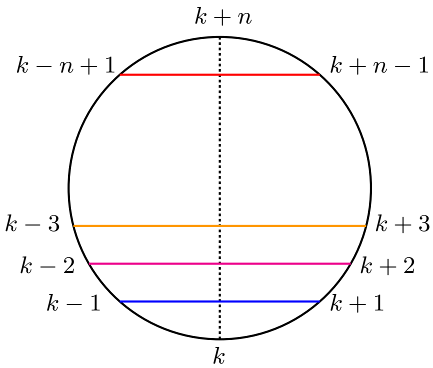
Demostración. La demostración la haremos por inducción en n. Si $n = 1$, se forman dos regiones en el círculo, por lo que basta colorear cada una de un color distinto. Supongamos que es posible hacer dicha coloración con $k-1$ líneas y consideremos un acomodo de k líneas. Borremos una línea ℓ de las k en este acomodo, obteniendo así un acomodo de $k-1$ líneas, y coloreemos las regiones formadas por estas $k-1$ líneas según la hipótesis de inducción. Tracemos de nuevo la línea ℓ, e invirtamos todos los colores que se encuentren en alguna de las dos regiones en las que ℓ separa al plano, obteniendo así una coloración de las regiones formadas por las k líneas que satisface las condiciones del lema. $\square$

Consideremos la línea que empieza en el punto 1 y coloreemos las regiones en rojo y azul, de tal forma que dos regiones vecinas tengan diferentes colores (como muestra el lema) y tal que dos regiones que tengan al punto 1 como vértice, sean rojas a la derecha y azules a la izquierda, desde el punto de vista de Tony. Finalmente, asignemos a cada región roja una orientación en sentido horario y, a cada región azul, una orientación en sentido antihorario. Por la coloración, cada frontera de las regiones tiene dos direcciones asignadas, pero estas direcciones son la misma dado que cada frontera separa a regiones de diferente color.

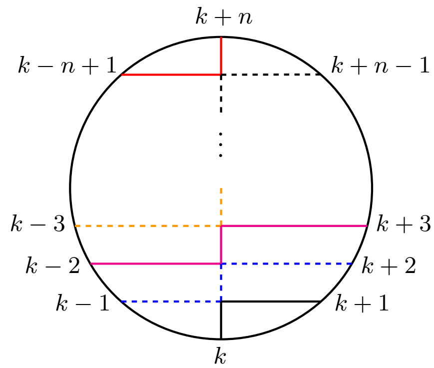
Veamos ahora que todos los amigos que se encuentran en un vértice con un número par, pueden recibir regalo.
Como cada par de cuerdas se interseca, entonces cada cuerda separa los puntos finales de cada una de las $n-1$ cuerdas restantes. Entonces hay $n-1$ vértices en cada lado de cada cuerda y cada cuerda conecta los vértices k y $k+n$, con $1 \leq k \leq n$. Se probará por inducción un resultado más fuerte: Sea $1 \leq k \leq n$, y dirijamos cada cuerda del vértice i hacia el vértice $i+n$ cuando $1 \leq i \leq k$ y, de $i+n$ a i, en cualquier otro caso; en otras palabras, los vértices "receptores" son $k+1, k+2, \ldots, k+n$. Supongamos ahora que cada cuerda envía un regalo, desde el vértice opuesto al receptor y que todos los regalos se mueven bajo las mismas reglas. Entonces, $k-i$ envía un regalo a $k+i+1$, con $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (tomando los índices módulo $2n$). En particular, para $i = k-1$, Tony, que se encuentra en el vértice 1, envía un regalo al vértice $2k$. Además, los n caminos que toman los regalos no se intersecan. En otras palabras, para toda $1 \leq i \leq n$, si un camino envía el regalo del vértice $k-i$ al vértice $k+i+1$, separando al círculo en dos regiones, todos los caminos que envían regalo del vértice $k-j$ al vértice $k+j+1$, con $j < i$, están completamente contenidos en una misma región, y todos los caminos que envían regalo del vértice $k-j$ al vértice $k+j+1$, con $j > i$, están completamente contenidos en otra región. A continuación se ilustra un ejemplo con $k = 3$ y $n = 5$.



El resultado es claramente cierto en el caso $n = 1$. Sea $n > 1$ y supongamos que el resultado es cierto para menos de n cuerdas. Removamos la cuerda que conecta los vértices k y $k+n$. Por la hipótesis de inducción, después de reetiquetar los vértices, los regalos irían de $k-i$ a $k+i+2$, con $1 \leq i \leq n-1$ si la cuerda no estuviese ahí. Tracemos de nuevo la cuerda que conecta los vértices k y $k+n$. Por la hipótesis de inducción, la cuerda interseca los caminos de los regalos de forma tal que el i-ésimo camino que interseca la cuerda es aquel que envía $k-i$ en $k+i$, con $i = 1, 2, \ldots, n-1$.



Caminos sin la cuerda $k \to k+n$



Caminos corregidos con la cuerda $k \to k+n$

Entonces, los regalos cubren los siguientes nuevos caminos: el regalo en k saldrá de su cuerda y tomará un camino hacia $k+1$. Luego, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, el regalo de $k-i$ llegará a la cuerda que conecta k con $k+n$, se moverá hacia la intersección de esta cuerda con el camino hacia $k+i+1$ y llega al vértice $k+i+1$, como queríamos. Nótese que los caminos no se intersecan, completando así la inducción. Por lo tanto, todos los amigos que se encuentran en un vértice con número par pueden recibir regalo, es decir, Tony puede enviar regalos a exactamente n de sus $2n-1$ amigos.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2023

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2023.

Solución del problema 1. (Solución de Rosa Victoria Cantú Rodríguez). Como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, debe haber un mínimo. Sea a_c dicho mínimo, esto es, $a_c \leqslant a_i$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces, por la condición dada, tenemos que $b_c \leqslant b_i$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, esto es,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{c-1}+a_{c+1}}{a_c} &\leq \frac{a_n+a_2}{a_1}, \\
\frac{a_{c-1}+a_{c+1}}{a_c} &\leq \frac{a_1+a_3}{a_2}, \\
\frac{a_{c-1}+a_{c+1}}{a_c} &\leq \frac{a_2+a_4}{a_3}, \\
&\vdots \\
\frac{a_{c-1}+a_{c+1}}{a_c} &\leq \frac{a_{n-1}+a_1}{a_n}.
\end{aligned}$$

Luego,

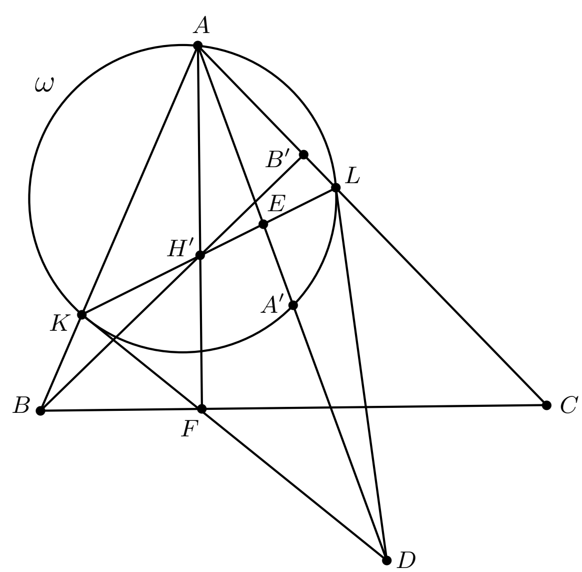
$$\begin{aligned}
a_1(a_{c-1}+a_{c+1}) &\le a_c(a_n+a_2),\\
a_2(a_{c-1}+a_{c+1}) &\le a_c(a_1+a_3),\\
a_3(a_{c-1}+a_{c+1}) &\le a_c(a_2+a_4),\\
&\vdots\\
a_n(a_{c-1}+a_{c+1}) &\le a_c(a_{n-1}+a_1).
\end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades obtenemos que

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)(a_{c-1}+a_{c+1}) \le 2a_c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n),$$

donde $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n > 0$, así que $a_{c-1}+a_{c+1} \le 2a_c$.
Por otro lado, tenemos que $a_c \le a_{c-1}$ y $a_c \le a_{c+1}$, por lo que $2a_c \le a_{c-1}+a_{c+1}$. Entonces, $2 = \frac{a_{c-1}+a_{c+1}}{a_c}$. Más aún, como a_c es el menor de estos números reales positivos, necesariamente $\frac{a_{c-1}}{a_c} \ge 1$ y $\frac{a_{c+1}}{a_c} \ge 1$ y, como suman 2, esto solo se puede si $a_c = a_{c-1} = a_{c+1}$.
Como $a_c = a_{c-1} = a_{c+1}$, entonces a_{c-1} y a_{c+1} también toman el valor mínimo de la lista dada, así que podemos repetir el argumento para a_{c-1} y a_{c+1}, obteniendo que $a_{c-2} = a_{c-1} = a_c = a_{c+1} = a_{c+2}$. Vemos que podemos realizar este proceso suficientes veces hasta llegar a $a_{c-(c-1)}$ y $a_{c+(n-c)}$, lo que significa que $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n$.

Solución del problema 2. (Solución de Andrea Sarahí Cascante Duarte). Sean E la intersección de KL con AD, ω la circunferencia circunscrita a AKL, A' la intersección de ω con AD, F el pie de altura desde A hacia BC y H' la intersección de AF y KL.



Como DK y DL son tangentes a ω, tenemos que $DK = DL$ y, como D, A y A' son colineales, tenemos que $ALA'K$ es un cuadrilátero armónico, de modo que DA es la A-simediana del triángulo KAL. Luego, AH' es la mediana de AKL porque como AH' pasa por el ortocentro del triángulo ABC y AD pasa por el circuncentro del triángulo ABC, tenemos que AH' y AD son conjugados isogonales respecto al ángulo $\angle BAC$. Como H' es punto medio de KL y KDL es isósceles, tenemos que KL es perpendicular a DH'.
Ahora, como AD es diámetro, el ángulo $\angle DBA$ es recto, de modo que $KH'DB$ es cíclico. Si B' es el punto de intersección de BH' con AC, entonces

$$\begin{aligned}\angle ABB' = \angle KBH' = KDH' = 90^\circ - \angle H'KD = 90^\circ - \angle LKD = 90^\circ - \angle LAK \\ = 90^\circ - \angle B'AB,\end{aligned}$$

esto es, BB' es perpendicular a AC y, como AF es perpendicular a BC, tenemos que H', la intersección de AF y BB', es el ortocentro del triángulo ABC.

Solución del problema 3. (Solución de Rosa Victoria Cantú Rodríguez). Primero vamos a demostrar que para $m = 2^{k-1} - 1$ sí puede pasar que Alexa no llena el tablero como se pide con un diccionario $\mathcal{D}$ de m palabras diferentes.
Si $\mathcal{D}$ contiene a todas las palabras de k letras que empiezan en A excepto $AAA\ldots A$, entonces $\mathcal{D}$ contiene $2^{k-1} - 1$ palabras diferentes, pues hay una elección para la primera letra y hay 2 elecciones independientes para cada una de las últimas $k-1$ letras y solo queda excluir la palabra $AAA\ldots A$. Ahora, Alexa no podrá llenar el tablero usando $\mathcal{D}$, pues todas las palabras en este diccionario contienen al menos una B y, al poner una palabra en $\mathcal{D}$ en la fila 1, alguna columna C_j con $j > 1$ tendrá que tener una palabra que empieza en B, pero no hay palabras que empiezan en B en $\mathcal{D}$.
Ahora vamos a demostrar que para $m = 2^{k-1}$, todo diccionario $\mathcal{D}$ con al menos m palabras diferentes, sí permite llenar el tablero. Sea $\mathcal{D}$ así.
Llamemos a dos palabras de $\mathcal{D}$ "inversas" si en cada i-ésima letra difieren, con $1 \leqslant i \leqslant k$. Por ejemplo, si $k = 3$, ABA y BAB son inversas. Notemos que si $AAA\ldots A$ o $BBB\ldots B$ están en el diccionario, entonces Alexa puede rellenar el tablero con una sola letra.
Vamos a demostrar que si $AAA\ldots A$ o $BBB\ldots B$ no están en el diccionario $\mathcal{D}$, entonces al menos una pareja de inversas lo está. En efecto, es claro que cada palabra diferente de $AAA\ldots A$ o $BBB\ldots B$ admite una única inversa diferente de $AAA\ldots A$ o $BBB\ldots B$, de modo que como hay $2^k - 2$ palabras de donde escoger las palabras de cada diccionario $\mathcal{D}_0$ con al menos 2^{k-1} palabras, entonces hay $2^{k-1} - 1$ parejas de inversas. Luego, por el principio de las casillas, si etiquetamos $2^{k-1} - 1$ cajas con las parejas de inversas diferentes de $AAA\ldots A$ o $BBB\ldots B$ y, si en cada caja etiquetada colocamos los elementos de $\mathcal{D}$ que pertenecen a dicha pareja de inversas, como en $\mathcal{D}$ hay al menos 2^{k-1} elementos, concluimos que $\mathcal{D}$ tiene una pareja de inversas.
Demostraremos ahora que con una pareja de palabras inversas P_A y P_B en $\mathcal{D}$, podemos cubrir el tablero de la manera descrita. Renombrando $A = 1$ y $B = -1$, tenemos que $P_A = P$ y $P_B = -P$. Llenamos el tablero de manera que la primera fila y la primera columna tienen la palabra P que empieza con 1. Después, para cada columna, si empieza en 1 llenamos la columna con la palabra P; de lo contrario, la llenamos

con la palabra $-P$. De esta manera, si llamamos P_i a la i-ésima letra de la palabra P y, $T_{i,j}$ es la letra en la casilla (i, j), tenemos que $T_{1,j} = T_{j,1} = P_j$. Además, como construimos el tablero, tenemos que la columna j comienza en P_j (igual a ± 1) y, por lo tanto, $T_{j,i} = P_j \cdot P_i$, pues es la letra i de P multiplicado por el valor de P_j que es la primera letra. Con esto vemos que $T_{i,j} = P_i \cdot P_j$, por lo que en la fila i, que consiste de $T_{i,1}, T_{i,2}, \ldots, T_{i,n}$, tenemos que escribimos la palabra P multiplicada por el valor de la primera letra de la fila que es P_i. Luego, las filas del tablero tienen escrito P o $-P$ y, por lo tanto, el tablero se puede llenar con estas palabras.

Solución del problema 4. (Solución de Andrea Escalona Contreras). Notemos que si una sucesión de números positivos con la propiedad descrita contiene un par de números consecutivos sumando más que 1, entonces para que no se cubra todo el círculo, Turbo no podrá elegir moverse en el mismo sentido al recorrer las distancias correspondientes a dichos números.
Supongamos que $C > \frac{1}{2}$. Entonces existe $y > 0$ tal que $C > \frac{1}{2} + y > \frac{1}{2}$, de modo que la sucesión

$$\frac{1}{2} + y,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + y,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + y,\ \ldots$$

cumple que cada término es menor que C y que cada dos términos consecutivos suman más que 1. Así que por la observación anterior, Turbo tendrá que alternar los sentidos de sus movimientos a fin de evitar recorrer todo el círculo. Sin pérdida de generalidad, Turbo empieza recorriendo el círculo en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que tras los primeros dos pasos el movimiento neto en el sentido de las manecillas del reloj es $\frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} = y$ y, similarmente, cuando ha recorrido cuatro pasos, el movimiento neto en el sentido de las manecillas del reloj es $2y$. Como $y > 0$, tras suficientes pasos, Turbo habrá recorrido una distancia mayor a 1 en el sentido de las manecillas del reloj. Así que no es posible que Turbo asegure lo pedido cuando $C > \frac{1}{2}$.
Veamos ahora que si $0 < C \leqslant \frac{1}{2}$, Turbo puede evitar un punto de la circunferencia. En efecto, dada una sucesión de números positivos con cada término menor que C, veamos por inducción que hay un punto en la circunferencia al que no llega Turbo. Sea P el punto inicial y sea Q su diametralmente opuesto. Es claro que después de un paso desde P, en cualquier sentido, no se alcanza el punto Q. Supongamos que $r > 1$ y que después de $r-1$ pasos, Turbo está en el punto w sin haberse arrastrado por Q o llegado a Q hasta ese momento. Entonces, en el siguiente paso, Turbo se mueve en la dirección del arco más largo entre w y Q, que mide al menos $\frac{1}{2}$, de modo que nuevamente no alcanza el punto Q.

Solución del problema 5. Primero consideremos la diferencia $k - k''$. Si $k = as + b$, entonces $k' = bs + a$. Si escribimos $a = ls + m$ con m y l enteros no negativos y $m \leq s - 1$, obtenemos que $k'' = ms + (b + l)$ y, por lo tanto, $k - k'' = (a - m)s - l = l(s^2 - 1)$. Concluimos que

a) $k \geq k''$ para todo $k \geq 1$.

b) $s^2 - 1$ divide la diferencia $k - k''$.

El hecho b) implica que las sucesiones $d_1, d_3, d_5, \ldots$ y $d_2, d_4, d_6, \ldots$ son constantes módulo $s^2 - 1$. Más aún, el hecho a) nos dice que las secuencias son no crecientes y,

por lo tanto, son eventualmente constantes. En otras palabras, la sucesión $d_1, d_2, d_3, \ldots$ es 2-periódica módulo $s^2 - 1$ (desde el inicio) y es eventualmente 2-periódica.
Supongamos que algún término de la sucesión es igual a 1. El siguiente término será igual a $1' = s$ y, como la sucesión es 2-periódica módulo $s^2 - 1$, concluimos que d_1 es igual a 1 o a s módulo $s^2 - 1$, lo cual demuestra la primera implicación.
Para demostrar la implicación recíproca, supongamos que d_1 es congruente a 1 o s módulo s^2-1. Ahora vamos a demostrar que una vez que $d_1, d_3, d_5, \ldots$ o $d_2, d_4, d_6, \ldots$ se estabilizan, entonces su valor es menor que s^2.
Esto lo podemos ver de la siguiente manera:

c) Si $k = k''$, entonces $k = k'' < s^2$.

Lo anterior ya que si, como antes, escribimos $k = as + b$ y $a = ls + m$, obtenemos que $k - k'' = (a - m)s - l = l(s^2 - 1)$ y, como $s \geq 2$, debemos tener que $l = 0$, esto es, $a = m \leq s - 1$ y, por lo tanto, $k = ms + b \leq (s - 1)s + (s - 1) = s^2 - 1$.
De esta manera, dado que la sucesión $d_1, d_3, d_5, \ldots$ es constante módulo $s^2 - 1$ y estamos suponiendo que d_1 es 1 o s módulo $s^2 - 1$, lo anterior junto con el hecho c) implican que la sucesión $d_1, d_3, d_5, \ldots$ es eventualmente constante a 1 o s. Como $s' = 1$, concluimos que de cualquier manera la sucesión contiene a 1.

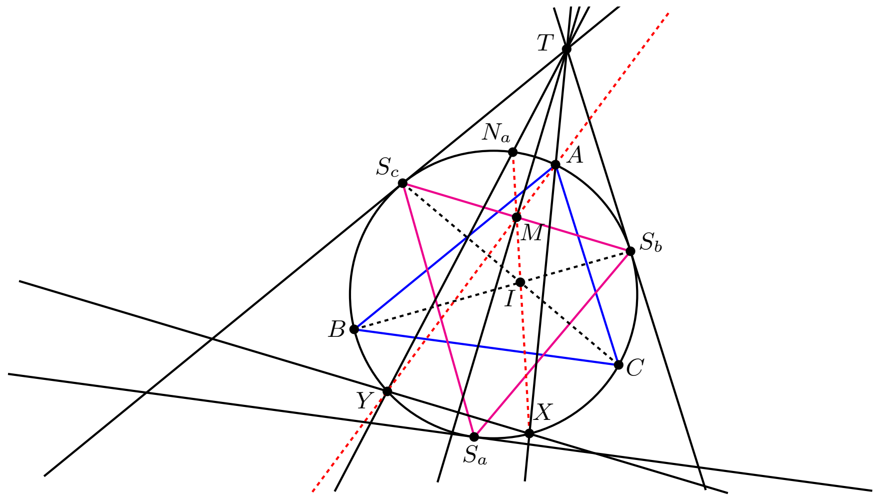
Solución del problema 6. Primero vamos a demostrar que A está en el eje radical de ω_b y ω_c. Notemos primero que el eje radical de ambas circunferencias es la línea que pasa por sus puntos de intersección. Supongamos que las tangentes a Ω por S_b y S_c se cortan en el punto T. Se tiene entonces que $TS_b = TS_c$ y, por lo tanto, T está en el eje radical de ω_b y ω_c. Otra forma de pensarlo es que TS_b es el eje radical de ω_b y Ω y, TS_c, es el eje radical de ω_c y Ω, por lo que T está en el eje radical de ω_b y ω_c.
Denotemos por P_b al punto de tangencia de ω_b con AB y, por P_c, al punto de tangencia de ω_c y AC. Demostraremos que $AP_b = AP_c$. Para esto recordamos el siguiente lema conocido.

Lema. *Dadas dos circunferencias ω_1 y ω_2 tangentes internamente en un punto X y tales que una cuerda AB de ω_1 es tangente a ω_2 en Y, entonces si M es el punto medio del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a X, se tiene que X, Y y M son colineales.*

Utilizando el lema anterior con Ω, ω_b y la cuerda AB, tenemos que S_b, P_b y S_c son colineales. Utilizando el lema con Ω, ω_c y la cuerda AC, tenemos que S_c, P_c y S_b son colineales. De lo anterior concluimos que S_b, P_c, P_b y S_c son colineales. Luego,

$$\begin{aligned}\angle AP_bP_c &= \angle S_cAP_b + \angle AS_cP_b = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \angle S_bAP_c + \angle AS_bP_c \\ &= \angle AP_cP_b.\end{aligned}$$

Esto demuestra que $AP_b = AP_c$, de donde se sigue que A está en el eje radical de ω_b y ω_c.
Ahora consideremos el triángulo AS_bS_c. Como T es la intersección de las tangentes en S_b y S_c al circuncírculo del triángulo AS_bS_c, tenemos que AT es la simediana de A en este triángulo. Sea X el segundo punto de intersección de la simediana AT con Ω. Demostraremos que X está también en la recta IN_a.



Observemos que AN_a es la bisectriz externa del ángulo en A y, por lo tanto, es paralela a S_bS_c. Sea M el punto medio de S_bS_c y sea Y el segundo punto de intersección de AM con Ω. Como en AS_bS_c, AXT es la simediana y AMY es la mediana, se sigue que XY es paralela a S_bS_c. Luego, reflejando en la mediatriz de S_bS_c, la línea AMY se refleja en la línea N_aMX.

Ahora, consideremos el cuadrilátero AS_bIS_c. Por el lema del incentro-excentro[12], tenemos que $S_bA = S_bI$ y $S_cA = S_cI$, por lo que el cuadrilátero es un trapezoide simétrico, lo cual implica que la reflexión de la línea AM en S_bS_c es la línea IM. Pero antes vimos que esta también es la línea N_aMX. Luego, M, I, N_a y X son colineales, como queríamos.

[12]**Lema del incentro-excentro**. Sea ABC un triángulo con incentro I y A-excentro I_A. Sea L el punto medio del arco $\widehat{BC}$ (que no contiene a A) sobre el circuncírculo del triángulo. Entonces, L es el centro de una circunferencia que pasa por I, B, I_A y C.

Apéndice

Definición 3 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 4 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 5 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 6 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales). *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz). *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva). *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao). *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 7 (Ángulos en la circunferencia).

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito). *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito). *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto).

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 8 (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro). *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

José Eduardo Cázares Tapia

David Cossío Ruiz

Kenya Verónica Espinosa Hurtado

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Myriam Hernández Ketchul

Ana Paula Jiménez Díaz

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Rita Vázquez Padilla

Hugo Villanueva Méndez

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864