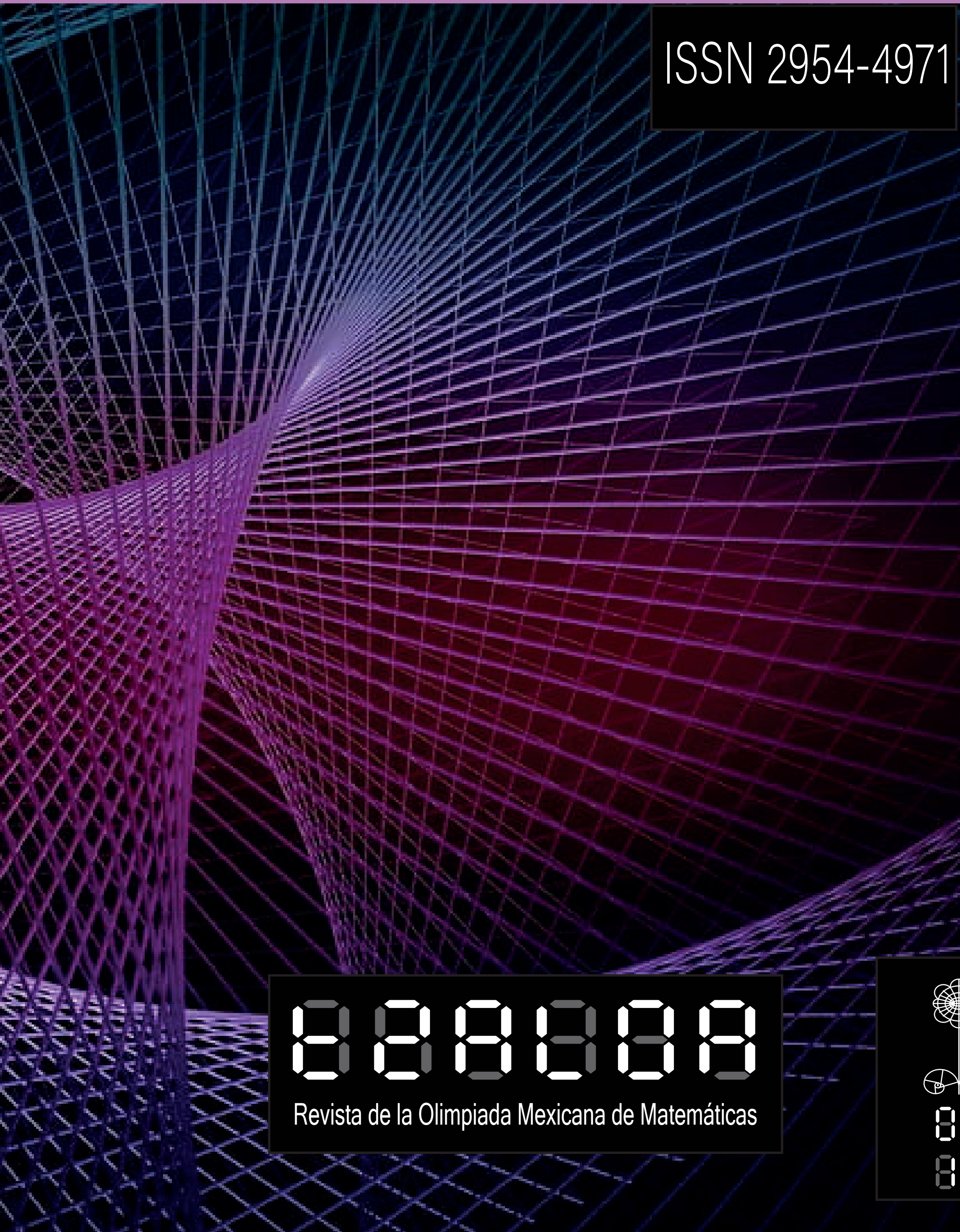


ISSN 2954-4971

Tzaloa

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

04
15

Información Legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS, Año 15, No. 4, noviembre 2023 - enero 2024, es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México. Tel. 55-5849-6709, smm@smm.org.mx, http://www.smm.org.mx, www.ommenlinea.org. Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2023, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Noviembre de 2023

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2023, Número 4

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Violeta Hernández Palacios, quien se integró a este comité en noviembre de 2020.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Olimpiadas de matemáticas alrededor del mundo*, de nuestro amigo Jacob Rubio. En él, se ilustra el tipo de problemas que han aparecido en distintas olimpiadas de matemáticas en diversos países. La mayoría de

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

los ejemplos son de concursos nacionales. Esperamos que sea del agrado de todos los lectores.

De especial interés para todos incluimos los problemas y soluciones del examen final estatal de la 37^a OMM, propuesto por el Comité Organizador. También incluimos los problemas y soluciones del Concurso Nacional de la 2^a Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas, que se llevó a cabo de forma presencial en el mes de junio, así como los resultados de las alumnas ganadoras de medalla de oro en cada nivel de la competencia.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la 64^a Olimpiada Internacional de Matemáticas y de la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, ambas llevadas a cabo en julio de este año, así como los resultados de los equipos mexicanos que participaron en ambas competencias. También incluimos los problemas y soluciones de la Competencia Internacional de Matemáticas 2023 (IMC, por sus siglas en inglés), en el nivel elemental (Primaria), llevada a cabo en forma virtual en el mes de julio, así como los resultados de los equipos mexicanos en cada nivel de la competencia.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2004. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2023-2024 y, para el 1° de julio de 2024, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 5 al 10 de noviembre de 2023, en la ciudad de Durango, Durango. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2023 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXVI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 65^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2024) y a la XXXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2024).

De entre los concursantes nacidos en 2007 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2024).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2024.

Olimpiadas de matemáticas alrededor del mundo

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Un poco de historia

Se tienen noticias de la existencia de concursos escolares de matemáticas en 1885 en Bucarest. Pero es la competencia Eötvos, aparecida en Hungría en 1894, la que marca la pauta y sirve de modelo a otros concursos no solo matemáticos, sino de ciencias en general. En esta competencia se proponían a estudiantes de secundaria tres problemas para resolver en un tiempo máximo de cuatro horas. La naturaleza de los problemas propuestos también marcó la pauta para los que vinieron después: se trata de medir la creatividad de los estudiantes, de desarrollar su autonomía de pensamiento, más que de medir sus conocimientos curriculares.

En 1894 aparece también el primer número de la revista húngara Kömal (acrónimo, en húngaro, de Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, lo que podría traducirse como Revista de física y matemáticas para estudiantes de Bachillerato). Su fundador fue Daniel Arany, y en ella se publican artículos, problemas y soluciones de estudiantes de secundaria. Con doscientos años de existencia, Kömal sigue sirviendo a ambos colectivos - estudiantes y profesores - y ha jugado un papel esencial en el desarrollo matemático de un país pequeño, como es Hungría. Aproximadamente en la misma época, aparece en Rumania el primer número de la revista *Gazeta Matematica*, que organizaba un concurso anual dirigido también a estudiantes de secundaria. Este concurso fue el germen, posteriormente, de la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Pero estos no eran hechos aislados. Los últimos años del siglo XIX fueron tiempos de desarrollo de solidarias relaciones internacionales. Nacen entonces distintas sociedades científicas nacionales. Los primeros Juegos Olímpicos de la era moderna se celebran en Grecia en 1896, y el Primer Congreso Internacional de Matemáticos se celebra en

Zurich en 1897. En 1942 se gesta la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) durante el primer Congreso Nacional de Matemáticas, como una asociación civil de carácter cultural al servicio de la sociedad mexicana. En 1954, Rumania invita a participar en su Olimpiada a varios países de su entorno geográfico y cultural. Se celebra así la primera Olimpiada Internacional de Matemáticas, con siete países: Alemania Democrática, Hungría, Checoslovaquia, Unión Soviética, Polonia, Bulgaria y la propia Rumania; tres de estos países ya no existen como tales. Desde entonces, se ha celebrado anualmente en un país diferente, con la única excepción de 1980, en que Mongolia, país encargado de su organización, no cumplió su compromiso.

Poco a poco fue abriéndose a países ajenos al área del antiguo bloque del este. Fue Finlandia el primero de estos en participar, en 1965. No tardarían mucho en llegar a la competencia Francia, Reino Unido e Italia, en 1967. Estados Unidos se incorpora con fuerza en 1975, organizando a su vez la Olimpiada Internacional de Matemáticas en 1981. Nuestro país, México, participa por primera vez en 1987 y, en ese mismo año, la Secretaría de Educación Pública (SEP) le otorgó un voto de confianza a la SMM, para que fuera esta última quien organizara, difundiera y realizara la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. En ese mismo año la SMM se compromete con el proyecto y organiza por primera vez el Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM).

Los problemas que aparecen en las olimpiadas de matemáticas, giran alrededor de temas de matemática elemental: Álgebra, Combinatoria, Geometría y Teoría de Números. Deben medir intuición y creatividad más que conocimientos y técnicas adquiridas, pero sobre todo, deben constituir un reto para los participantes.

Algunos ejemplos de problemas de concursos nacionales e internacionales

A continuación, mostramos algunos problemas que han aparecido en olimpiadas de matemáticas en diversos países. El nivel de la competencia en cada país es muy variado. Comenzamos con un problema de la Olimpiada Matemática Rusa. Esta olimpiada consiste de 4 etapas: escolar, distrital, regional y zonal (representando esta última la ronda final). En cada etapa, los exámenes se aplican a estudiantes de $9°$, $10°$ y $11°$ grado. A partir de la etapa regional, cada examen de cada grado, se lleva a cabo en dos días consecutivos. En cada día, 4 problemas son propuestos a los participantes. El siguiente problema apareció en la etapa final de la XXXIV Olimpiada Matemática Rusa, para alumnos de $10°$ grado, llevada a cabo en el año 2008.

Problema 1. (Rusia, 2008). Las columnas de un tablero de $n \times n$ se han numerado con los números del 1 al n. Los números $1, 2, \ldots, n$ se escribieron en las casillas del tablero de tal manera que cualesquiera dos números de cada renglón son distintos, y también cualesquiera dos números de cada columna. Diremos que una casilla del tablero es *buena* si el número que está escrito en ella es mayor que el número asignado a su columna. Determinar todos los valores de n para los cuales es posible tener un tablero con la propiedad de que cada renglón tiene el mismo número de casillas buenas.

Solución. Como la columna i tiene $n-i$ casillas buenas, en total tenemos

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

casillas buenas. Si todos los renglones tienen la misma cantidad de casillas buenas, el número total de casillas buenas debe ser múltiplo de n, pero $\frac{n(n-1)}{2}$ es múltiplo de n solo si n es impar. Por lo tanto, n no puede ser par. A continuación se muestra un arreglo que satisface las condiciones del problema para cualquier entero impar n.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \cdots & \mathbf{n-1} & \mathbf{n} \\
\hline
1 & n & n-1 & & 3 & 2 \\
2 & 1 & n & & 4 & 3 \\
3 & 2 & 1 & & 5 & 4 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
n-1 & n-2 & n-3 & & 1 & n \\
n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1
\end{array}$$

$\square$

El siguiente problema apareció en la IX Olimpiada Matemática del Cono Sur, realizada en Brasil en el año de 1998. Esta olimpiada es una competencia internacional que inició en el año de 1989, en la cual participan los países de la porción meridional de América del Sur, representados por equipos de hasta cuatro estudiantes seleccionados en olimpiadas nacionales y que no hayan cumplido 16 años de edad al 31 de diciembre del año inmediatamente anterior a la celebración del concurso. Esta olimpiada consiste de dos exámenes que se aplican en dos días consecutivos, con 3 problemas cada uno, para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas.

Problema 2. (Cono Sur, 1998). En una ciudad se desea establecer un sistema de transporte con por lo menos una línea (ruta) de autobús, en el cual:

1) cada línea pase exactamente por tres paradas;

2) cada dos líneas distintas tengan exactamente una parada en común;

3) para cada dos paradas de autobús distintas haya exactamente una línea que pase por ambas.

Determinar el número de paradas de autobús de la ciudad.

Solución. Sea p el número de paradas de autobús de la ciudad. Entonces, el número de líneas de autobús es $\frac{\binom{p}{2}}{3}=\frac{p(p-1)}{6}$, ya que hay $\binom{p}{2}$ pares diferentes de paradas, y

cada línea une entre sí a tres de estos pares (si las paradas de una línea son A, B, C, entonces esa línea une a A y B, A y C, B y C).
Como todo par de líneas tiene una parada en común, si fijamos una de las líneas, todas las demás líneas tienen una parada en común con la línea fijada y dos paradas que no pertenecen a la línea fijada. Hay $p-3$ paradas que no pertenecen a la línea fijada, y se requieren $\binom{p-3}{2} = \frac{(p-3)(p-4)}{2}$ líneas para unir todos los pares de paradas que no están en la línea fijada. No hay más líneas que estas y la fijada inicialmente. Luego, si $p \geq 3$, tenemos la ecuación $\frac{(p-3)(p-4)}{2} + 1 = \frac{p(p-1)}{6}$, esto es, $2p^2 - 20p + 42 = 0$, cuyas soluciones son $p = 7$ y $p = 3$.
Si $p = 3$, tenemos una sola línea, con tres paradas.
Si $p = 7$, ponemos las paradas en los vértices, los puntos medios de los lados y el centro de un triángulo equilátero. Las líneas son: los lados, las alturas y la circunferencia inscrita. □

El siguiente problema apareció en el tercer nivel del Concurso Nacional de la XII Olimpiada Matemática Argentina (OMA), celebrada en el año de 1995. La OMA consta de 3 niveles. El primer nivel es para alumnos de 8 y 9 años de edad; el segundo nivel es para alumnos de 10 y 11 años de edad; el tercer nivel es para alumnos de 12 y 13 años de edad. En el concurso nacional de la OMA, los alumnos de cada nivel resuelven dos exámenes en dos días consecutivos, con tres problemas cada uno para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas.

Problema 3. (Argentina, 1995). Sean a y b números reales. Si se sabe que la ecuación $x^3 + \sqrt{3}(a-1)x^2 - 6ax + b = 0$ tiene tres raíces reales, demostrar que $|b| \leq |a+1|^3$.

Solución. Sean r, s y t las tres raíces reales de la ecuación. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$\begin{aligned} r+s+t &= \sqrt{3}(1-a), \\ rt+rs+ts &= -6a, \\ rst &= -b. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la primera relación de Vieta, obtenemos que

$$(r+s+t)^2 = r^2+s^2+t^2+2(rs+rt+st) = 3(1-a)^2.$$

Sustituyendo la segunda relación de Vieta en la relación anterior, obtenemos que

$$r^2+s^2+t^2-12a = 3(1-2a+a^2),$$

esto es, $\frac{r^2+s^2+t^2}{3} = (a+1)^2$.
Ahora, aplicando la desigualdad MA-MG a los números reales no negativos r^2, s^2, t^2 y usando la tercera relación de Vieta, tenemos que

$$\frac{r^2+s^2+t^2}{3} \geq \sqrt[3]{r^2s^2t^2} = \sqrt[3]{(rst)^2} = \sqrt[3]{b^2},$$

esto es, $(a+1)^2 \geq \sqrt[3]{b^2}$. Tomando raíz cuadrada, obtenemos que $|a+1| \geq \sqrt[3]{|b|}$ y, por lo tanto, $|a+1|^3 \geq |b|$. $\square$

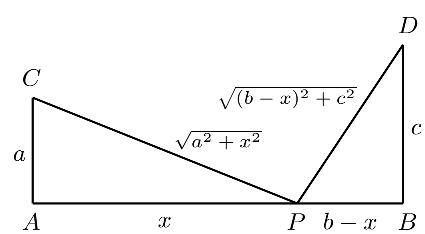
El siguiente problema apareció en la primera ronda del Concurso Nacional de la Olimpiada Matemática Húngara para alumnos de 17 y 18 años, celebrada en el año de 1987. El concurso de matemáticas moderno más antiguo en el mundo, es el Concurso de Matemáticas Kürschák, creado en 1894 en Hungría, pero conocido como Concurso de Matemáticas Eötvos hasta 1938. En este concurso podían participar estudiantes hasta primer año de universidad y consistía de un examen con 3 problemas. Otro concurso importante es el Concurso Nacional de Matemáticas para Escuelas Secundarias, conocido como MO Húngaro, para estudiantes de 17 y 18 años. Esta competencia fue creada en 1923 y se divide en 3 rondas. También hay un concurso equivalente para estudiantes más jóvenes (de 15 y 16 años), llamado Concurso de Matemáticas Daniel Arany, cuya ronda final consta de un examen con 8 problemas.

Problema 4. (Hungría, 1987). Sean a, b y c números reales positivos. Hallar el valor mínimo de la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2},$$

para todo $0 < x < b$.

Solución. Observemos que $\sqrt{a^2 + x^2}$ se puede pensar como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y x, mientras que $\sqrt{(b-x)^2 + c^2}$ se puede pensar como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $b-x$ y c. Coloquemos ambos triángulos rectángulos de tal manera que se apoyen a lo largo de una línea común AB de longitud b, como se muestra en la figura.

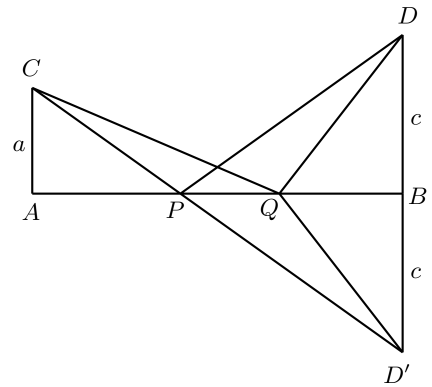


La función $f(x)$ representa entonces la longitud de una línea poligonal de C a D que rebota en un punto P de AB. Demostraremos que la posición de P sobre AB que minimiza la longitud de la línea CPD, es el punto de intersección de AB con la línea CD' donde D' es la reflexión del punto D respecto a AB.

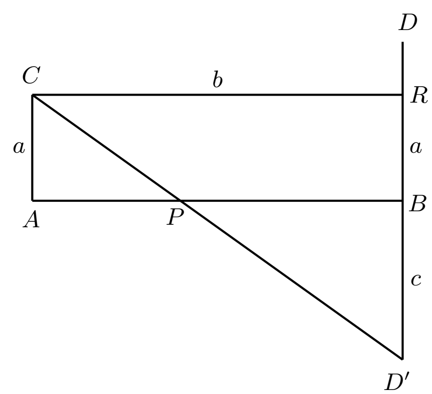
En efecto, sea Q cualquier otro punto distinto de P sobre AB. Como AB es la mediatriz de DD', tenemos que $PD = PD'$ y $QD = QD'$. Luego, tenemos que

$$|CPD| = CP + PD = CP + PD' = CD',$$
$$|CQD| = CQ + QD = CQ + QD' > CD' = |CPD|,$$

donde la desigualdad se sostiene por la desigualdad del triángulo en CQD'.



Por lo tanto, si CR se traza perpendicular a DD', tenemos que $BR = a$ y, por el teorema de Pitágoras en el triángulo CRD', concluimos que la línea más corta CPD tiene longitud igual a $CD' = \sqrt{b^2 + (a + c)^2}$.



$\square$

El siguiente problema apareció en la ronda final de la olimpiada de matemáticas de Japón en el año 2009. La olimpiada de matemáticas de Japón consiste de dos rondas. La primera ronda es un examen formado por 12 problemas de solo respuesta para resolver en un tiempo máximo de 3 horas. Los participantes que pasan a la siguiente ronda, la ronda final, presentan un examen formado por 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4 horas, de donde se selecciona a la preselección nacional.

Problema 5. (Japón, 2009). Determinar todos los enteros positivos n tales que 8^n+n sea divisible entre 2^n+n.

Solución. Si 2^n+n divide a 8^n+n, entonces

a) 2^n+n divide a $(2^n+n)^3 = 8^n + 3\cdot 4^n n + 3\cdot 2^n n^2 + n^3$.

b) 2^n+n divide a $-3n(2^n+n)^2 = -3\cdot 4^n n - 6\cdot 2^n\cdot n^2 - 3n^3$.

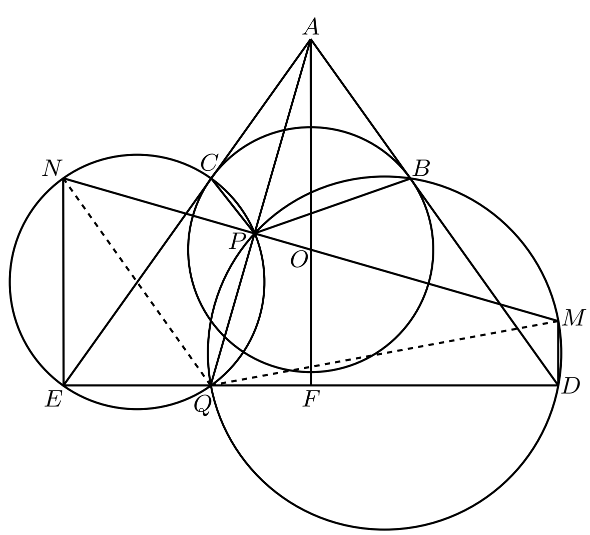
c) 2^n+n divide a $3n^2(2^n+n) = 3\cdot 2^n n^2 + 3n^3$.

Luego, 2^n+n divide a la suma de las tres expresiones anteriores, esto es, 2^n+n divide a 8^n+n^3. Luego, 2^n+n divide a $8^n+n^3-(8^n+n) = n^3-n$.
Es fácil ver que si $n>9$, entonces $2^n+n > n^3-n > 0$, por lo que 2^n+n no divide a 8^n+n si $n>9$.
Por lo tanto, $n\leq 9$ y se puede verificar que los valores de n que satisfacen la condición, son 1, 2, 4 y 6. □

El siguiente problema, apareció en la etapa final de la XXXIV Olimpiada Matemática Rusa, para alumnos de 10° grado, llevada a cabo en el año 2008.

Problema 6. (Rusia, 2008). Una circunferencia con centro O es tangente a los lados de un ángulo BAC en los puntos B y C. Sea Q un punto en el interior del ángulo $\angle BAC$, y sea P un punto en el segmento AQ tal que AQ y OP son perpendiculares. La recta OP interseca a los circuncírculos de los triángulos BPQ y CPQ, en los puntos M y N ($M\neq P$ y $N\neq P$), respectivamente. Demostrar que $OM=ON$.

Solución. Sean D y E los puntos de intesección de AB y AC con los circuncírculos de BPQ y CPQ, respectivamente, con $D\neq B$ y $E\neq C$. Sea F el punto de intersección de AO con ED.



Por el teorema de Miquel[2], tenemos que $ABPC$ es cíclico. Además, ABC es un triángulo isósceles, por lo que $\angle ABC = \angle ACB = \angle BPA = \angle CPA$. Pero también $DQPB$ y $ECPQ$ son cíclicos, de manera que $\angle CEQ = \angle CPA = \angle BPA = \angle BDQ$ y, el triángulo ADE, es isósceles.
Por otro lado, tenemos que MQ y NQ son los diámetros de las circunferencias por BPQ y CPQ respectivamente (ya que $\angle MPQ = \angle NPQ = 90°$), luego, $\angle MDQ = \angle NEQ$. Como AO es bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y ADE es isósceles, AF es perpendicular a ED y F es el punto medio de este segmento. Así, $MD \parallel OF \parallel NE$ y, por el teorema de Tales, $\frac{MO}{NO} = \frac{DF}{FE} = 1$, esto es, $OM = ON$. $\square$

El siguiente problema apareció en la tercera ronda del Concurso Nacional de la 38^a Olimpiada Matemática Búlgara, celebrada en el año de 1989. Las competencias de matemáticas en Bulgaria, se han realizado desde 1950, salvo 1958 y 1959. La competencia consiste de cuatro rondas desde 1962, año en que se agregó la cuarta ronda al concurso nacional. La tercera y la cuarta rondas, consisten de dos exámenes con 3 problemas cada uno, los cuales se aplican en dos días consecutivos para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas cada uno.

Problema 7. (Bulgaria, 1989). Sean p y q números primos (positivos) tales que

$$\sqrt{p^2 + 7pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 14pq + q^2}$$

es un entero. Demostrar que $p = q$.

Solución. Si $\sqrt{p^2 + 7pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 14pq + q^2} = k$, un entero, entonces

$$\sqrt{p^2 + 14pq + q^2} = k - \sqrt{p^2 + 7pq + q^2}.$$

Elevando al cuadrado, obtenemos que

$$p^2 + 14pq + q^2 = k^2 - 2k\sqrt{p^2 + 7pq + q^2} + p^2 + 7pq + q^2,$$

lo cual implica que $\sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$ es un número racional y, en consecuencia, también es racional el número $\sqrt{p^2 + 14pq + q^2}$.

Lema. Si la raíz cuadrada de un número entero es un número racional, entonces tal número racional es un entero.
Demostración. Sea m un número entero y supongamos que $\sqrt{m} = \frac{a}{b}$ donde a y b son primos relativos. Entonces, $mb^2 = a^2$, lo cual implica que $b \mid a$ ya que a y b son primos relativos. Luego, la única opción es $b = 1$ y, por lo tanto, $\sqrt{m} = a$. $\square$

Por el lema, los números $p^2+7pq+q^2$ y $p^2+14pq+q^2$ son ambos cuadrados perfectos. Ahora, $p^2+7pq+q^2$ claramente es mayor que $(p+q)^2$. Luego, existe un entero positivo r tal que $p^2 + 7pq + q^2 = (p + q + r)^2$, esto es,

$$p^2 + 7pq + q^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2pr + 2qr$$

[2]**Teorema de Miquel.** En un triángulo ABC, sean D, E y F puntos en los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si los circuncírculos de los triángulos BDF y CED se cortan en P, entonces el cuadrilátero $AFPE$ es cíclico.

y, de aquí, tenemos que $5pq = r(r + 2p + 2q)$. Esta relación implica que $r \mid 5pq$, por lo que los valores posibles de r son: 1, 5, p, q, $5p$, $5q$, pq y $5pq$, ya que 5, p y q son números primos. Es fácil ver que r no puede ser $5p$, $5q$, pq o $5pq$. Por ejemplo, si $r = 5p$, entonces $q = 7p + 2q$, lo cual claramente es imposible. De manera análoga se pueden descartar los otros tres casos.
Además, si $r = 1$ tenemos que $5pq = 1 + 2p + 2q$, esto es, $pq + 2pq + 2pq = 1 + 2p + 2q$, lo cual es imposible ya que cada término del lado izquierdo es mayor que el correspondiente término del lado derecho.
Si $r = p$, entonces $5q = p + 2p + 2q$, esto es, $3p = 3q$ y, de aquí, $p = q$.
Si $r = q$, entonces $5p = q + 2p + 2q$, esto es, $3p = 3q$ y, de aquí, $p = q$.
Si $r = 5$, entonces $pq = 5 + 2p + 2q$, de donde obtenemos que

$$p = \frac{5 + 2q}{q - 2} = 2 + \frac{9}{q - 2}.$$

Al ser p un número primo positivo, $p - 2 \geq 0$ y, por consiguiente, $q - 2$ debe ser positivo y divisor de 9. Luego, los valores posibles de $q - 2$ son: 1, 3 y 9.

- Si $q - 2 = 1$, entonces $q = 3$ y $p = 11$, pero $p^2 + 14pq + q^2 = 592$ no es un cuadrado.
- Si $q - 2 = 9$, entonces $q = 11$ y $p = 3$, pero $p^2 + 14pq + q^2 = 592$ no es un cuadrado.
- Si $q - 2 = 3$, entonces $q = 5$, $p = 5$ y $p^2 + 14pq + q^2 = 20^2$.

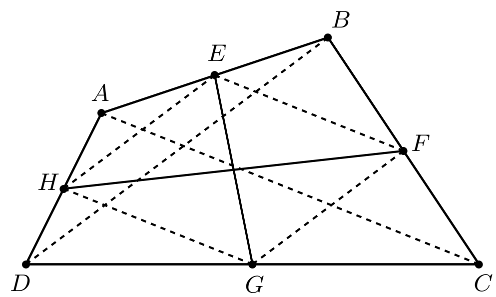
En cualquier caso, concluimos que $p = q$. □

El siguiente problema es de la ronda final del Concurso Nacional de la Olimpiada de Matemáticas de China de 1978. En 1978, China instituyó las olimpiadas provincial y nacional de matemáticas. En cada provincia de China, se aplicaron dos rondas a los estudiantes de las escuelas secundarias: la ronda provincial y la ronda final. Los puntajes más altos fueron invitados a participar en la primera ronda de la olimpiada nacional de matemáticas y, subsecuentemente, los puntajes más altos de la primera ronda, fueron invitados a participar en la ronda final de la competencia nacional, llevada a cabo en mayo de 1978. El examen de la primera ronda del concurso nacional de 1978 estuvo formado por 10 problemas, mientras que el examen de la ronda final estuvo integrado por 6 problemas.

Problema 8. (China, 1978). Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean E, F, G y H, los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demostrar que

$$\text{Área}(ABCD) \leq EG \cdot HF \leq \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Solución. Observemos que $HE \parallel BD \parallel GF$ y $EF \parallel HG$, lo cual implica que $EFGH$ es un paralelogramo. En lo que sigue, denotaremos por $(XYZ\ldots)$ al área de la figura $XYZ\ldots$



Observemos que

$$(ABCD) = (EFGH) + (AEH) + (DGH) + (CGF) + (BEF).$$

Como

$$(AEH) + (CGF) = \frac{1}{4}[(ABD) + (CBD)] = \frac{1}{4}(ABCD)$$

y

$$(DGH) + (BFE) = \frac{1}{4}[(DCA) + (BCA)] = \frac{1}{4}(ABCD),$$

tenemos que $(ABCD) = (EFGH) + \frac{1}{2}(ABCD)$, esto es,

$$\frac{1}{2}(ABCD) = (EFGH). \tag{1}$$

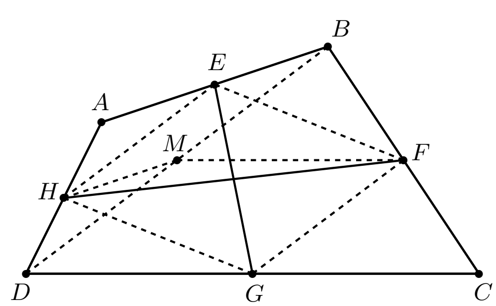
Por otro lado, como $EFGH$ es un paralelogramo, tenemos que

$$(EFGH) \leq \frac{1}{2}EG \cdot HF. \tag{2}$$

De (1) y (2), obtenemos que $(ABCD) \leq EG \cdot HF$. Esto muestra la primera desigualdad.

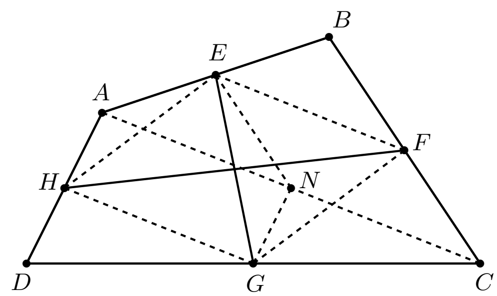
Para demostrar la segunda desigualdad, sea M el punto medio de BD. Tenemos que $AB = 2HM$ y $DC = 2MF$. Luego, por la desigualdad del triángulo en HMF, obtenemos que

$$\frac{1}{2}(AB + DC) = HM + MF \geq HF. \tag{3}$$



De manera análoga, si N es el punto medio de AC, entonces $BC = 2EN$ y $AD = 2NG$. Luego, por la desigualdad del triángulo en ENG, obtenemos que

$$\frac{1}{2}(AD + BC) = NG + EN \geq EG. \tag{4}$$



Por lo tanto, de (3) y (4), concluimos que $EG \cdot HF \leq \frac{1}{2}(AB+DC) \cdot \frac{1}{2}(AD+BC)$. $\square$

El siguiente problema apareció en el Concurso Nacional de la Olimpiada Matemática Canadiense (CMO, por sus siglas en inglés) del año 1991. La Olimpiada Matemática Canadiense es la competencia de resolución de problemas matemáticos más importante de Canadá. A diferencia de la mayoría de los países donde la competencia nacional consiste de dos exámenes para resolver en dos días consecutivos, el concurso nacional de la CMO consta de un solo examen de 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 3 horas. De 1969 a 1972, el examen del concurso nacional de la CMO estaba formado por diez problemas. En los años setentas, la cantidad de problemas del examen cambió varias veces hasta estabilizarse finalmente a cinco problemas en 1979.

Problema 9. (Canadá, 1991). Demostrar que la ecuación

$$x^2 + y^5 = z^3,$$

tiene una infinidad de soluciones en enteros distintos de cero (x, y, z).

Solución. Supongamos que (x, y, z) es una solución de la ecuación. Sea k un entero y sea $m = \text{mcm}(2, 5, 3) = 30$. Multiplicando la ecuación por k^m, obtenemos que $k^{30}x^2 + k^{30}y^5 = k^{30}z^3$, que es equivalente a

$$(k^{15}x)^2 + (k^6y)^5 = (k^{10}z)^3,$$

lo que significa que la terna $(k^{15}x, k^6y, k^{10}z)$ también es solución de la ecuación. Luego, basta determinar una solución particular de la ecuación, para tener una infinidad de soluciones. Es fácil ver que la terna $(3, -1, 2)$ es una solución, con lo que se sigue el resultado.

Solución alternativa. Supongamos que $x^2 = y^5 = u^{10}$, esto es, $x = u^5$ y $y = u^2$. En este caso, la ecuación se reduce a la ecuación $2x^2 = z^3$. Si $x = 2^t$, entonces

$2x^2 = 2^{2t+1}$, lo cual implica que $2t+1$ debe ser múltiplo de 3 para que 2^{2t+1} sea un cubo. Es claro que $t = 3k+1$ satisface que 2^{2t+1} es un cubo para cualquier entero k, pues

$$2^{2t+1} = 2^{6k+3} = (2^{2k+1})^3.$$

Tenemos entonces que $x^2 = 2^{2t} = y^5$. Basta hacer que t sea múltiplo de 5, esto es, $t = 3k+1 \equiv 0 \pmod 5$. Es suficiente tomar $k \equiv 3 \pmod 5$, esto es, $k = 5a+3$ con a un entero. Luego, $x = 2^t = 2^{3k+1} = 2^{15a+10}$ y $y^5 = x^2 = 2^{30a+20}$, lo cual implica que

$$x^2 + y^5 = 2y^5 = 2(2^{30a+20}) = 2^{30a+21} = (2^{10a+7})^3,$$

de donde tenemos una infinidad de soluciones $(x, y, z) = (2^{15a+10}, 2^{6a+4}, 2^{10a+7})$, con a entero no negativo. □

El siguiente problema apareció en el Concurso Nacional de la 39^a Olimpiada Iraní de Matemáticas. En Irán, el concurso nacional consiste de cuatro rondas. La primera es un examen de opción múltiple y de respuestas cortas para un tiempo máximo de 2 horas. La segunda ronda consiste de dos exámenes que se aplican en dos días consecutivos, cada uno formado por 3 problemas para resolver en un máximo de 4.5 horas. La tercera ronda consiste de cuatro exámenes separados, cada uno formado por 3 problemas para resolver en un máximo de 4.5 horas, de donde surge la preselección nacional. El problema que presentamos a continuación, es del último examen de la tercera ronda.

Problema 10. (Irán, 2021). ¿Es posible asignar los números enteros del 1 al 8 a los vértices de un cubo de tal manera que el número asignado a cada vértice divida a la suma de los números asignados a los vértices vecinos? (Dos vértices son vecinos si están unidos por una arista).

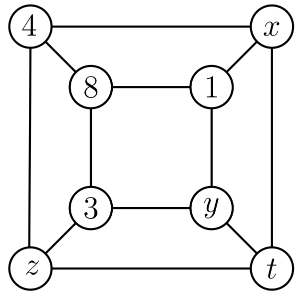
Solución. La respuesta es no. Supongamos que sí es posible y sea N_i el conjunto de los números asignados a los vértices adyacentes al vértice con el número i, para cada $1 \leq i \leq 8$. Por hipótesis, tenemos que la suma de los elementos de N_i es divisible por i. Como la suma de cualesquiera tres números menores que 8 es a lo más $7+6+5 = 18$, la suma de los elementos de N_8 es 8 o 16. Verificando los casos distintos, es fácil ver que N_8 es alguno de $\{3, 6, 7\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 2, 1\}$ o $\{4, 3, 1\}$.

a) Si $N_8 = \{3, 6, 7\}$, sea $N_6 = \{x, y, 8\}$. Es claro que N_6 y N_8 no tienen elementos en común. Por otro lado, tenemos que 6 divide a $x+y+8$ y $11 = 1+2+8 \leq x+y+8 \leq 17 = 4+5+8$, lo cual implica que $x+y = 4$ y, por consiguiente, $\{x, y\} = \{1, 3\}$, lo que contradice que N_6 y N_8 son disjuntos.

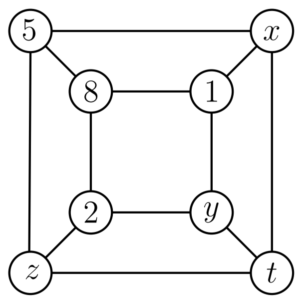
b) El caso $N_8 = \{4, 5, 7\}$ es análogo al caso anterior. Basta considerar N_7 en lugar de N_6.

c) Si $N_8 = \{1, 3, 4\}$, sean x, y, z, t, los números de los otros vértices como se muestra en la figura. Tenemos que $\{x, y, z, t\} = \{2, 5, 6, 7\}$. Como t divide a $x+y+z$, se sigue que t divide también a $t+x+y+z = 20$, lo cual implica que $t = 2$ o $t = 5$. Si $t = 2$, entonces z divide a $4+3+t = 9$, por lo que z es 1 o 3, lo cual no es posible.

Si $t = 5$, entonces y divide a $1 + 3 + t = 9$, por lo que y es 1 o 3, lo cual no es posible.



d) Si $N_8 = \{5, 2, 1\}$, sean x, y, z, t los otros vértices del cubo como se muestra en la figura. En este caso $\{x, y, z, t\} = \{3, 4, 6, 7\}$. Por un argumento análogo al caso anterior, concluimos que t divide a $3 + 4 + 6 + 7 = 20$, por lo que $t = 4$. Por otro lado, tenemos que x divide a $1 + 5 + t = 10$, lo cual es imposible.

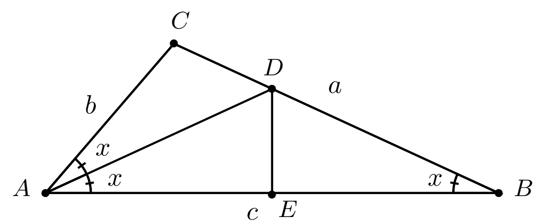


Por lo tanto, en cada caso los números no pueden ser asignados a los vértices del cubo. $\square$

El siguiente problema apareció en el Concurso Nacional de la Olimpiada de Matemáticas de Estados Unidos, llevada a cabo en 1991. Desde 1972, con el fin de prepararse para la Olimpiada Internacional de Matemáticas, Estados Unidos organizó la Olimpiada Estadounidense de Matemáticas (USAMO, por sus siglas en inglés). Antes de esto, desde 1950, Estados Unidos organizaba el Examen de Matemáticas para Educación Secundaria (AHSME, por sus siglas en inglés). Sin embargo, debido a la discrepancia en el nivel de dificultad entre los dos concursos (el AHSME y el USAMO), a partir de 1983 se introdujo un nivel intermedio de competencia, el Examen de Matemáticas de Invitación (AIME, por sus siglas en inglés). Los alumnos que participan en el concurso nacional, son seleccionados con el AHSME y el AIME. Hasta el año 1995, el examen del concurso nacional de Estados Unidos (USAMO), estaba formado por 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 3.5 horas. Sin embargo, a partir de 1996, el concursos nacional consiste de dos exámenes para contestar en dos días consecutivos en un tiempo máximo de 4.5 horas cada uno.

Problema 11. (Estados Unidos, 1991). Sea ABC un triángulo en el cual el ángulo en A es el doble del ángulo en B y el ángulo en C es obtuso. Determinar el perímetro mínimo de tal triángulo si las longitudes de sus lados son números enteros.

Solución. Si $\angle ABC = x$, entonces $\angle BAC = 2x$ y, como $\angle ACB$ es obtuso, tenemos que $\angle BAC + \angle ABC = 3x < 90°$, lo cual implica que $x < 30°$.
Sea AD la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ y sea DE la perpendicular a AB. Entonces, $\frac{CD}{DB} = \frac{b}{c}$, donde $b = AC$ y $c = AB$.



Como ADB es un triángulo isósceles, se sigue que E es el punto medio de AB y, por lo tanto, $EB = DB\cos x = \frac{c}{2}$, esto es, $DB = \frac{c}{2\cos x}$. Luego,

$$CD = a - DB = a - \frac{c}{2\cos x} = \frac{2a\cos x - c}{2\cos x},$$

donde $a = BC$. Esto implica que

$$\frac{CD}{DB} = \frac{\frac{2a\cos x - c}{2\cos x}}{\frac{c}{2\cos x}} = \frac{2a\cos x - c}{c} = \frac{b}{c},$$

esto es, $2a\cos x - c = b$ y, de aquí, $\cos x = \frac{b+c}{2a}$.
Ahora, por la ley de senos tenemos que $\frac{a}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{b}{\operatorname{sen} x}$, esto es, $b \operatorname{sen} 2x = a \operatorname{sen} x$, que es equivalente a $2b \operatorname{sen} x \cos x = a \operatorname{sen} x$. Simplificando, obtenemos que $\cos x = \frac{a}{2b}$.
Por lo tanto, tenemos que

$$\cos x = \frac{b+c}{2a} = \frac{a}{2b},$$

lo cual implica que $a^2 = b(b+c)$. Se sigue que $b \mid a^2$ y que $c = \frac{a^2-b^2}{b}$.
Aplicando ahora la desigualdad del triángulo, tenemos que $a + b > c$, lo cual implica que

$$c = \frac{a^2-b^2}{b} = \frac{(a+b)(a-b)}{b} > \frac{c(a-b)}{b}.$$

Simplificando esta desigualdad, obtenemos que $a < 2b$.
Por otro lado, como $x < 30°$, tenemos que $\frac{a}{2b} = \cos x > \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de donde resulta que $a > b\sqrt{3}$.
En conclusión, tenemos que $b\sqrt{3} < a < 2b$.
Como $b \mid a^2$, cada divisor primo de b también es un divisor primo de a. Luego, si b es producto de primos distintos, esto es, $b = p_1p_2\cdots p_r$ con $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ números primos, entonces cada p_i divide a a y, por consiguiente, $b \mid a$, esto es, $a = bk$

para algún entero positivo k. Luego, $b\sqrt{3} < bk < 2b$, esto es, $\sqrt{3} < k < 2$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, b debe ser divisible por un cuadrado y debe ser elemento del conjunto $\{1, 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, \ldots\}$.
Observemos que si b es par, entonces a también es par ya que $b \mid a^2$.

- Si $b = 1$, entonces $\sqrt{3} < a < 2$, lo cual no es posible.
- Si $b = 4$, entonces $4\sqrt{3} < a < 8$, lo cual implica que $a = 7$, que no es posible.
- Si $b = 8$, entonces $8\sqrt{3} < a < 16$, lo cual implica que $a = 14$ (ya que a no puede ser impar si b es par). Sin embargo, $b = 8$ no divide a $a^2 = 14^2$.
- Si $b = 9$, entonces $9\sqrt{3} < a < 18$, lo cual implica que $a = 16$ o $a = 17$, pero $b = 9$ no divide a 16^2 ni a 17^2.
- Si $b = 12$, entonces $12\sqrt{3} < a < 24$, lo cual implica que $a = 22$, pero $b = 12$ no divide a $a^2 = 22^2$.
- Si $b = 16$, entonces $16\sqrt{3} < a < 32$, lo cual implica que $a = 28$ o 30. Es claro que 16 no divide a 30^2 pero 16 sí divide a 28^2. Por lo tanto, $b = 16$, $a = 28$ y $28^2 = a^2 = b(b + c) = 16(16 + c)$. Entonces, tenemos que $7^2 = 16 + c$, esto es, $c = 7^2 - 16 = 33$.

Para concluir que el perímetro mínimo es $a+b+c = 28+16+33 = 77$, falta demostrar que si $b > 16$, entonces el perímetro siempre es mayor o igual que 77. En efecto, si $b > 16$, entonces $b \geq 18$ y $18\sqrt{3} < a$, lo cual implica que $a \geq 32$. Como el ángulo en C es obtuso, necesariamente c debe ser mayor que a, por lo que $c \geq 33$. De aquí que $a + b + c \geq 18 + 32 + 33 = 83 > 77$. □

Los siguientes dos problemas son de la 15^a Olimpiada Rioplatense. La Olimpiada Matemática Rioplatense nació como un encuentro fraterno entre los ganadores de las Olimpiadas Matemáticas de Argentina y Uruguay, con tres niveles. El primer nivel es para alumnos de 8 y 9 años; el segundo nivel es para alumnos de 10 y 11 años; el tercer nivel es para alumnos de 12 años. Cada nivel consiste de dos exámenes en dos días consecutivos, cada uno formado por 3 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas. En México, los ganadores del Concurso de Primavera, han participado en esta competencia desde 1997.

Problema 12. (Rioplatense, Nivel 2, 2006). Carlitos escribió todos los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2009\}$ en los que la diferencia entre la cantidad de números pares y de números impares es múltiplo de 3. ¿Cuántos subconjuntos escribió Carlitos?

Solución. Sea $n \geq 1$ un entero. Denotamos A_n, B_n y C_n a las familias de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ para las cuales la diferencia entre la cantidad de números pares e impares es congruente con 0, 1 y 2 módulo 3, respectivamente.
Sean $a_n = |A_n|$, $b_n = |B_n|$ y $c_n = |C_n|$. Entonces, $a_n + b_n + c_n = 2^n$, la cantidad total de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Para $X \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, escribimos $p(X)$, $i(X)$ para indicar el número de elementos

pares e impares de X, respectivamente.
Demostraremos que $a_{n+1} = a_{n-1} + 2^{n-1}$ para todo entero $n \geq 2$. Para ello, sea $X \in A_{n-1}$, $X \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Entonces, $p(X) \equiv i(X) \pmod 3$. Como n y $n+1$ son de distinta paridad, la congruencia anterior se preserva si le agregamos a X estos dos números (obteniendo el conjunto $X \cup \{n, n+1\}$) o no agregamos ninguno de ellos (obteniendo el mismo conjunto X).
Si le agregamos a X alguno de los elementos de $\{n, n+1\}$, es decir, n o $n+1$, no se preserva la congruencia $p(X) \equiv i(X) \pmod 3$.
Sea ahora $X \in B_{n-1}$, es decir, $p(X) \equiv i(X) + 1 \pmod 3$ y supongamos que queremos agregarle algunos elementos de $\{n, n+1\}$ de modo que el subconjunto X' de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ que se obtenga satisfaga $p(X') \equiv i(X') \pmod 3$. La única manera de lograr esto es agregarle a X el único de los números n o $n+1$ que es impar.
Del mismo modo, si $X \in C_{n-1}$, se tiene que $p(X) \equiv i(X) + 2 \pmod 3$. La única manera de obtener un subconjunto X' de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ que satisfaga $p(X') \equiv i(X') \pmod 3$ es agregarle a X el único de los números n o $n+1$ que es par.
En resumen, cada $X \in A_{n-1}$ genera dos conjuntos en A_{n+1}; cada X en B_{n-1} genera un conjunto en A_{n+1}, y lo mismo ocurre para cada X en C_{n-1}. Luego:

$$a_{n+1} = 2a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = a_{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) = a_{n-1} + 2^{n-1}.$$

Aplicando esta fórmula para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos:

$$a_{2k+1} = 2^{2k-1} + a_{2k-1} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + a_{2k-3} = \cdots = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \cdots + 2 + a_1$$

y

$$a_{2k} = 2^{2k-2} + a_{2k-2} = 2^{2k-2} + 2^{2k-4} + a_{2k-4} = \cdots = 2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \cdots + 2^2 + a_2.$$

Finalmente, $a_1 = 1$ (ya que los subconjuntos de $\{1\}$ son $\emptyset$ y $\{1\}$ y sólo el primero satisface $p(X) \equiv i(X) \pmod 3$) y $a_2 = 2$ (ya que los subconjuntos de $\{1, 2\}$ son $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, y sólo el primero y el último satisfacen $p(X) \equiv i(X) \pmod 3$). Por lo tanto:

$$a_{2k+1} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \cdots + 2 + 1 = \frac{2^{2k+1} + 1}{3}$$

y

$$a_{2k} = 2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \cdots + 2^2 + 2 = \frac{2^{2k} + 2}{3}.$$

En particular, para $n = 2009 = 2(1004) + 1$ obtenemos la respuesta al problema:

$$a_{2009} = \frac{2^{2009} + 1}{3}.$$

$\square$

Problema 13. (Rioplatense, Nivel 3, 2006). a) Demostrar que para cada entero $k \geq 3$, existe un entero positivo n que se puede escribir como suma de exactamente k divisores positivos de n distintos entre sí.
b) Supongamos que n se puede escribir como suma de exactamente k divisores positivos de n distintos entre sí, para algún entero $k \geq 3$. Si p es el menor divisor primo de n, demostrar que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p+k-1} \geq 1.$$

Solución. a) La prueba la haremos por inducción en k. Si $k = 3$, el número $6 = 1+2+3$ cumple la condición. Supongamos que para algún $k > 3$, existe un entero positivo n tal que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ donde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son divisores positivos de n distintos entre sí. Claramente cada uno de tales divisores positivos es menor que n.
Consideremos el número $2n$. Demostraremos que este número se puede escribir como suma de exactamente $k + 1$ divisores positivos de $2n$ distintos entre sí. En efecto, $2n = n + n$ y por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$2n = (n_1 + n_2 + \cdots + n_k) + n,$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son divisores positivos de n distintos entre sí y menores que n. Por lo tanto, los $k+1$ números $n_1, n_2, \ldots, n_k, n$, son divisores positivos de $2n$ distintos entre sí, lo que completa la inducción.
Segunda forma de resolver a). Sea $n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ donde $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ son divisores de n y $k \geq 3$. Consideremos el número $6n$. Este número se puede escribir como $6n = 6d_1 + 6d_2 + \cdots + 6d_k$, y como $6 = 1 + 2 + 3$, obtenemos la siguiente representación de $6n$ con $k + 2$ sumandos.

$$6n = d_1 + 2d_1 + 3d_1 + 6d_2 + \cdots + 6d_k.$$

Es claro que $d_1 < 2d_1 < 3d_1 < 6d_2 < \cdots < 6d_k$, y que todos estos números son divisores de $6n$. Por lo tanto, si hay un n que admite una representación para un $k \geq 3$, entonces $6n$ admite una representación para $k + 2$.
Ahora es suficiente hallar valores apropiados de n para $k = 3$ y $k = 4$. En ambos casos sirve $n = 12$, pues $12 = 2 + 4 + 6 = 1 + 2 + 3 + 6$ y $1, 2, 3, 4, 6$ dividen a 12.
Tercera forma de resolver a). Para un $k \geq 3$ dado, consideremos el entero $n = 3 \cdot 2^{k-2}$. Es claro que $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 3 \cdot 2, \ldots, d_k = 3 \cdot 2^{k-3}$ son k divisores distintos de n. Además,

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = 1 + 2 + 3(1 + 2 + \cdots + 2^{k-3}) = 3 + 3(2^{k-2} - 1) = 3 \cdot 2^{k-2} = n.$$

b) Nuevamente, sea $n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$, con $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ divisores de n. Escribimos $n = d_i x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Todos los x_i son divisores de n, y son todos distintos, porque los d_i lo son: $x_1 > x_2 > \cdots > x_k$. Notemos que $x_k > 1$, pues $d_k < n$. Luego, $x_k \geq p$, porque p es el menor divisor primo de n. Entonces,

$$x_{k-1} \geq x_k + 1 \geq p + 1, x_{k-2} \geq x_{k-1} + 1 \geq p + 2, \ldots, x_1 \geq x_2 + 1 \geq p + k - 1.$$

Entonces $\frac{n}{d_i} = x_i \geq p + k - i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, esto es, $d_i \leq \frac{n}{p+k-i}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y, por lo tanto,

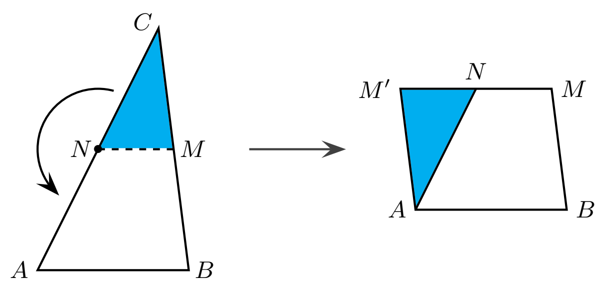
$$n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k \leq \frac{n}{p+k-1} + \frac{n}{p+k-2} + \cdots + \frac{n}{p}.$$

Dividiendo entre n se sigue el resultado. $\square$

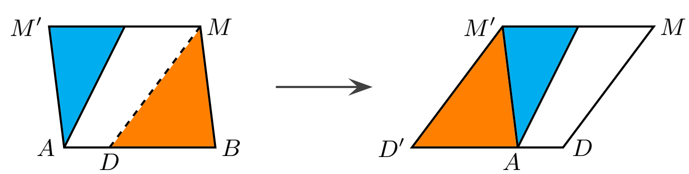
El siguiente problema apareció en la etapa final de la XXXVI Olimpiada Matemática Rusa, para alumnos de 9° grado, llevada a cabo en el año 2010.

Problema 14. (Rusia, 2010). En un triángulo acutángulo ABC, la mediana AM es mayor que el lado AB. Demostrar que el triángulo ABC se puede cortar en tres partes con las cuales se puede construir un rombo.

Solución. Sea N el punto medio de AC. Cortando el triángulo ABC por MN y rotando el triángulo CMN sobre N hasta que el vértice C coincida con A, se obtiene un paralelogramo como se muestra en la siguiente figura.



Si la altura desde C es menor o igual que el doble de AB, dado que $AM > AB$, la circunferencia con centro en M y radio $MM' = AB$ corta al segmento AB en al menos un punto. Sea D uno de dichos puntos. Haciendo un corte a lo largo de MD y trasladando el triángulo BMD de manera que MB coincida con $M'A$, se forma un rombo, ya que $MD = MM' = AB$.

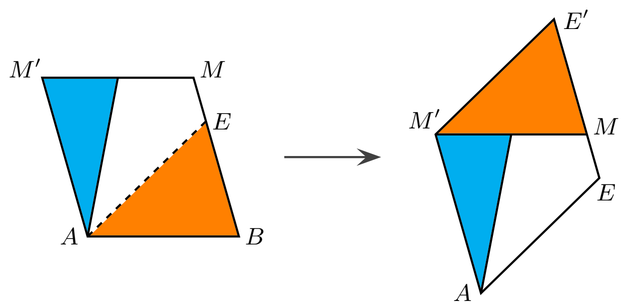


Afirmamos que $AM > MB = \frac{BC}{2}$. En efecto, consideremos la circunferencia Γ con centro en M y radio MB. Puesto que el triángulo ABC es acutángulo y BC es un diámetro de Γ, A debe ser un punto exterior a la circunferencia, de lo contrario A estaría sobre o en el interior de Γ y, el ángulo en A, sería de 90° o mayor de 90°, respectivamente, lo que contradice que el triángulo ABC es acutángulo. Luego, AM es mayor que el radio de Γ, esto es, $AM > MB$.

Si la altura desde C, h_C, es mayor que el doble de AB, tenemos que

$$AM' = MB > \frac{1}{2}h_C > AB > h_A,$$

donde h_A es la altura desde A. Por lo tanto, la circunferencia con centro en A y radio AM' corta al segmento MB en un punto, digamos E. Podemos hacer entonces un corte a lo largo de AE para formar un rombo de manera análoga al caso anterior.



□

Concluimos este escrito con un problema muy difícil que apareció en el Concurso Nacional de la Olimpiada Matemática Koreana en el año 2012.

Problema 15. (Korea, 2012). Si $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, es una permutación de los números $1, 2, \ldots, 10$, hallar el valor máximo de la suma

$$\sum_{n=1}^{10} \left(n^2 a_n - n a_n^2\right). \tag{5}$$

Solución. Demostraremos que el máximo es 336, el cual se alcanza con las permutaciones

$$(10, 9, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \quad \text{y} \quad (10, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).$$

Diremos que hay un "pico hacia arriba" en k si $a_{k-1} < a_k$ y $a_k > a_{k+1}$; el "pico hacia abajo" se define de forma análoga. Al decir "pico" nos referimos ya sea a un pico hacia arriba o un pico hacia abajo. Consideremos una permutación $(a_1, \ldots, a_{10})$ tal que el valor de la suma (5), que denotaremos por S, sea el máximo posible.

Entonces, al considerar la permutación que se obtiene de intercambiar cualesquiera dos elementos de $\{a_i\}$, digamos a_m y a_n (con $n > m$), el nuevo valor de S (digamos S') debería de permanecer igual o reducirse, esto es, $S - S' \geq 0$. Luego,

$$\left[\left(n^2 a_n - n a_n^2\right) + \left(m^2 a_m - m a_m^2\right)\right] - \left[\left(n^2 a_m - n a_m^2\right) + \left(m^2 a_n - m a_n^2\right)\right] \geq 0,$$

lo cual se puede expresar como

$$n^2 \left(a_n - a_m\right) - n\left(a_n^2 - a_m^2\right) - m^2\left(a_n - a_m\right) + m\left(a_n^2 - a_m^2\right) \geq 0.$$

Factorizando, obtenemos que $(n-m)\,(a_n - a_m)\,[(n+m) - (a_n + a_m)] \geq 0$ y, como $n > m$, concluimos que

$$(a_n - a_m)\,[(n+m) - (a_n + a_m)] \geq 0. \tag{6}$$

Si la sucesión no tiene picos, entonces la sucesión es $(1, 2, \ldots, 10)$ o $(10, 9, \ldots, 2, 1)$ y, para estas, el valor de la suma es 0, el cual no es el máximo. Por lo tanto, la sucesión tiene picos.

Si hay un pico hacia arriba en k, usando (6) es fácil ver que $a_k + a_{k-1} \leq 2k - 1$ y $a_k + a_{k+1} \geq 2k+1$. Como $a_k \geq a_{k-1} + 1$ y $a_k \geq a_{k+1} + 1$, se sigue que $a_{k-1} \leq k-1$ y $a_k \geq k + 1$.

Si el pico que está más a la izquierda (el pico en m, con m lo menor posible) está en k y es hacia arriba, entonces $a_{k-1} \leq k - 2$. Por otro lado, como $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1}$, tenemos que $a_{k-1} \geq k - 1$, lo que es una contradicción. Esto implica que el pico que está más a la izquierda debe ser un pico hacia abajo.

Sea $m_1 \in \{1, \ldots, 10\}$ tal que $a_{m_1} = 10$. Es claro que $m_1 \geq 1$. Si $m_1 > 1$, entonces $10 + a_1 \geq m_1 + 1$ y $10 = a_{m_1} > a_1$. Usando la desigualdad (6), se obtiene que necesariamente $10 + a_1 = m_1 + 1$, de donde se tiene que $m_1 = 10$ y $a_1 = 1$. Esto significa que se pueden intercambiar los valores de a_1 y a_{10} sin modificar el valor de la suma S, por lo que se puede asumir que $a_1 = 10$.

Ahora, demostraremos que el pico que está más a la derecha debe ser hacia abajo. Con el fin de llegar a una contradicción, supongamos que es hacia arriba y que se da en k. Luego, $a_{k-1} \leq k - 2$ y $a_k \geq k + 1$. Más aún, hay $10 - k$ números después de él que son menores que a_k y $a_{k-1} < a_k$, por lo que hay al menos $11 - k$ números menores que a_k, esto es, $a_k \geq 12 - k$. Como $a_k \leq 9$ (pues $a_1 = 10$), se sigue que $k+1 \leq 9$, por lo que $k \leq 8$. Si $a_2 \neq 9$, sea $m_2 \in \{3, \ldots, 10\}$ tal que $a_{m_2} = 9$ (donde $m_2 \leq 8$ pues 9 debe estar en un pico). Como $a_2 \geq 1$, tenemos que $9 + a_2 \geq (m_2 + 1) + 1 = m_2 + 2$. Es claro que $a_2 < 9$. De la desigualdad (6), obtenemos que $9 + a_2 = m_2 + 2$, esto es, $m_2 = 8$ y $a_2 = 1$. Como la igualdad se da en (6), se pueden cambiar los números a_2 y a_{m_2} de tal manera que $a_2 = 9$. Así, en cualquier caso, podemos asumir que $a_2 = 9$.

De lo anterior, $a_k \leq 8$, por lo que $k \leq 7$. Además, $2a_k \geq (12-k) + (k+1)$, de donde se sigue que $a_k \geq 7$. También, $8 \geq a_k \geq 12 - k$, por lo que $k \geq 4$. Además, si $a_k = 7$, entonces $7 \geq 12 - k$ y $7 \geq k + 1$, lo cual implica que $5 \leq k \leq 6$. Ahora, se trabajan los cuatro posibles valores de k.

a) Si $k = 4$, entonces $a_4 \neq 7$, por lo que $a_4 = 8$. Es claro que $a_3 < a_4 = 8$ y $a_3 \geq 1$. Como $a_3 + a_4 \geq 8 + 1 > 7$, la desigualdad (6) no se cumple para $n = 4$ y $m = 3$, lo cual genera una contradicción.

b) Supongamos que $k = 5$. Si $a_5 = 7$, necesariamente $a_3 = 8$ (pues no hay un elemento más grande que a_5 después de él y $a_4 < a_5$). Usando (6) para $n = 5$ y $m = 4$, obtenemos que $a_4 \leq 2$. Además, $a_6 = 6$ (pues es más grande a_4 y todos los que siguen de a_6). Dado que $a_4 \leq 2$, concluimos que $a_7 = 5$. Pero tomando $n = 7$ y $m = 6$ en (6), obtenemos una contradicción. Luego, $a_5 = 8$. Considerando $n = 5$ y $m = 4$ en (6), obtenemos que $a_4 \leq 1$ y, por lo tanto, $a_4 = 1$. Si $n = 4$ y $m = 3$, entonces $a_3 \geq 6$. Se sigue que los números a_9 y a_{10} son los más chicos de los números que todavía no se sabe su valor y $a_9 > a_{10} \geq 2$, por lo que $a_9 = 3$ y $a_{10} = 2$. Tomando $n = 10$ y $m = 9$ en (6) obtenemos una contradicción.

c) Supongamos que $k = 6$. Si $a_6 = 7$, necesariamente $a_3 = 8$ o $a_4 = 8$. En el segundo caso, usando (6) para $n = 4$ y $m = 3$, obtenemos que $a_3 \leq -1$, lo cual es imposible; mientras que en el primer caso, usando (6) con $n = 6$ y $m \in \{4, 5\}$, obtenemos que $a_4 \leq 3$ y $a_5 \leq 4$. Esto significa que $a_7 = 6$, pero por (6) se tiene que los valores de a_6 y a_7 se pueden intercambiar sin alterar el valor de la suma, lo que implica que $a_7 = 7$ que, de acuerdo a una observación hecha anteriormente, es imposible. Luego, $a_6 = 8$. De (6) con $n = 6$ y $m \in \{3, 4, 5\}$, obtenemos que $a_3 \leq 1$, $a_4 \leq 2$ y $a_5 \leq 3$, por lo que $a_3 = 1$, $a_4 = 2$ y $a_5 = 3$. Así, $a_{10} = 4$ y $a_9 = 5$ pero, tomando $n = 10$ y $m = 9$ en (6), obtenemos una contradicción.

d) Si $k = 7$, entonces $a_7 = 8$. Tomando $n = 8$ y $m = i$ en (6) con $3 \leq i \leq 6$, tenemos que $a_i \leq i - 1$. Esto significa que $a_8 = 7$. Pero esto también implica que, al cambiar los valores de a_8 y a_7, no se altera la suma. Esto es, el pico que esté más a la derecha, ahora está en la posición $k = 8$ y $a_8 = 8$, lo cual genera una contradicción a los posibles casos.

De los casos anteriores se concluye que el último pico debe ser hacia abajo.
Sean $k_1, k_2 \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ tales que $k_2 > k_1$ y hay picos hacia abajo en ellos dos. Usando (6) en las parejas $(n, m) \in \{(k_1, k_1-1), (k_1+1, k_1), (k_2, k_2-1), (k_2+1, k_2)\}$ y usando las desigualdades que se obtienen convenientemente, se puede ver que $a_{k_1} \leq k_1$ y $a_{k_2} \leq k_2$. Si $a_{k_2} < a_{k_1}$, entonces $a_{k_2} < k_2$ y, tomando $n = k_2$ y $m = k_1$ en (6), se llega a una contradicción. Luego, concluimos que $a_{k_1} < a_{k_2}$. Con un razonamiento similar al hecho anteriormente, se puede probar que si hay picos hacia arriba en m_1 y en m_2 de tal manera que $m_2 > m_1$, entonces $a_{m_1} > a_{m_2}$.
Ahora, como entre cada par de picos hacia abajo debe haber un pico hacia arriba y, entre cada par de picos hacia arriba, debe haber un pico hacia abajo, puede haber 1, 2, 3 o 4 picos hacia abajo con 0, 1, 2 y 3 picos hacia arriba, respectivamente. Se trabajan los cuatro casos.

a) Supongamos que solo hay un pico hacia abajo. Se tiene que no hay picos hacia arriba. Sea m_1 el lugar donde se tiene el pico hacia abajo. Entonces, $a_{m_1} = 1$. Si $m_1 = 2$, se sigue que $a_i = i - 1$ para $i \in \{2, \ldots, 10\}$, pero esta permutación no da el valor máximo de S (es igual a 240), por lo que $m_1 \geq 3$. Si $a_2 \neq 9$, se tiene que $a_{10} = 9$ y $a_2 = 2$ o $a_2 \geq 3$. En el segundo caso, se pueden intercambiar los valores de a_2 y a_{10} y el valor de S se quedará igual o aumentará, mientras que en el primero se tiene la sucesión $(10, 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, la cual no da el máximo valor de S (es igual a 238). Se sigue que se puede asumir $a_2 = 9$.
Si $m_1 = 3$, obtenemos una de las soluciones descritas al principio, por lo que podemos suponer que $m_1 \geq 4$. Para $n = m_1$ y $m = m_1 - 1$ en (6), obtenemos que $a_{m_1-1} \geq 2m_1 - 2$, y como $a_{m_1-1} \leq 9$ (pues $a_1 = 10$), se sigue que $m_1 \leq 5$. Si $m_1 = 5$, entonces $a_4 \geq 8$, por lo que $a_3 \geq 9$ y $a_2 \geq 10$, lo cual no es posible pues $a_1 = 10$. Por lo tanto, $m_1 = 4$ y $a_3 \geq 6$. Si $a_{10} = 8$, entonces $a_{10} > a_3$ y $a_{10} + a_3 \geq 8 + 6 = 14 > 13$, por lo que la desigualdad (6) no se cumple para $n = 10$ y $m = 3$. De aquí, concluimos que $a_3 = 8$ y, por consiguiente, $a_9 = 6$ y $a_{10} = 7$, obteniendo así la otra solución mencionada al principio.

b) Supongamos que hay dos picos hacia abajo. Por consiguiente, hay un pico hacia arriba que está entre los dos picos hacia abajo. Sean m_1 y m_2 los lugares donde están los picos hacia abajo y k_1 el lugar donde está el pico hacia arriba, con $m_1 < k_1 < m_2$. Primero, observemos que $a_{k_1} \neq 9$ pues, de no ser así, se sabe que $k_1 \leq 8$ y $a_2 \geq 1$, por lo que $a_{k_1} + a_2 \geq 9 + 1 = 10 \geq k_1 + 2$, por lo que los valores de a_{k_1} y a_2 se pueden intercambiar, generando una contradicción. Así, $a_2 = 9$ o $a_{10} = 9$. Usando el análisis hecho en el caso anterior, podemos ver que $m_1 \leq 5$ y $a_{m_1-1} \geq 2m_1 - 2$. Si $m_1 = 5$, entonces $a_4 \geq 8$, por lo que $a_2 \geq 10$, lo cual es imposible. Si $m_1 = 4$, se sigue que $a_3 \geq 6$. En caso de que $a_{10} = 9$, obtenemos que $a_{10} + a_3 \geq 9 + 6 = 15 > 13$, contradiciendo la desigualdad (6). Luego, $a_2 = 9$. Con un razonamiento similar, podemos ver que $a_{k_1} \neq 8$ y $a_{10} \neq 8$, por lo que $a_3 = 8$. Tomando $n = m_2$ y $m = k_1$ en (6), tenemos que $k_1 + m_2 \leq a_{k_1} + a_{m_2}$. Como $a_{k_1} \leq 7$ y $a_{m_2} \leq m_2 - 1$, se sigue que $k_1 \leq 6$. En caso de que $k_1 = 6$, la igualdad se da y entonces $a_{m_2} = m_2 - 1$, por lo que 10 debería estar después de a_{m_2}, lo cual no es posible pues $a_1 = 10$. Luego $k_1 = 5$ y, por lo tanto, $a_{k_1} \geq 6$. En caso de que $a_{k_1} = 6$, se pueden intercambiar los valores de a_{k_1} y a_{m_2}, lo que generará más picos y caerá en algún otro caso. Si $a_{k_1} = 7$, entonces $a_{m_2} + 7 \geq m_2 + 5$, esto es, $a_{m_2} \geq m_2 - 2$. Claramente $a_{m_2} \neq m_2 - 1$ (por un argumento dado anteriormente), por lo que $a_{m_2} = m_2 - 2$. Además, a_{m_2} es el menor número más grande que a_{m_1}, por lo que $a_{m_2} = 2$ y, por lo tanto, $m_2 = 4$, lo cual claramente es una contradicción. Concluimos que $m_1 \leq 3$.

Si $m_1 = 3$, se sigue que $a_2 \geq 4$. Un razonamiento similar al hecho anteriormente implica que $a_2 = 9$. Sea t tal que $a_t = 8$. Tomando $n = t$ y $m = 3$ en (6), obtenemos que $t \geq 6$. Por otro lado, $a_{k_1} \leq 8$ y $a_{k_1} \geq k + 1$, por lo que $k_1 \leq 7$. Esto significa que $t \in \{6, 7, 10\}$. Si $t = 6$, de (6) con $n = 6$ y $m \in \{4, 5\}$, obtenemos que $a_4 \leq 2$ y $a_5 \leq 3$, por lo que $a_4 = 4$ y $a_5 = 5$. Esto significa que $a_7 = 4$, $a_8 = 5$, $a_9 = 6$ y $a_{10} = 7$, pero esta sucesión no alcanza el máximo valor de S (es igual a 316), así que este caso no es posible. Si $t = 7$, tomando $n = 7$ y $m = 6$ en (6) llegamos a que $a_6 \leq 5$, por lo que $a_{10} = 7$ y $a_9 = 6$. Pero, tomando $n = 9$ y $m = 7$ en (6) obtenemos una contradicción. Así, necesariamente $t = 10$. Sea w tal que $a_w = 7$. Tomando $n = w$ y $m = 3$ en (6), obtenemos que $w \geq 5$. Más aún, si $w = 5$, se pueden intercambiar los valores de a_5 y a_3, lo cual no es posible. Entonces, $w \geq 6$. Además, si $a_9 \neq 7$, entonces $a_{k_1} = 7$ y, por lo tanto, $k_1 \leq 7 - 1 = 6$. Esto significa que $a_6 = 7$ o $a_9 = 7$. En el primer caso, tomando $n = 6$ y $m = 5$ en (6), obtenemos que $a_5 \leq 4$, por lo que $a_9 = 6$, pero tomando $n = 9$ y $m = 6$ en (6) llegamos a una contradicción. Se sigue que $a_9 = 7$. Un análisis similar llevará a que $a_8 = 6$. Como $a_{k_1} \geq k_1 + 1$ y $a_{k_1} \leq 5$, tenemos que $k_1 \leq 4$ y, por lo tanto, $k_1 = 4$ y $a_4 = 5$. Esto implica que $a_5 = 2$, $a_6 = 3$ y $a_7 = 4$. Pero esta sucesión no alcanza el máximo valor de S (es igual a 320), por lo que este caso tampoco es posible.

Ahora, supongamos que $m_1 = 2$. Esto significa que $a_{10} = 9$. Sea t tal que $a_t = 8$. Es claro que $t < 10$, por lo que de (6) obtenemos que $a_{10} + a_t \leq t + 10$, esto es, $t \geq 7$. Si $t = 7$, sea u tal que $a_u = 7$. Es claro que $u > 7$ (pues, si $u < 7$, no se cumpliría la desigualdad (6) para $n = 7$ y $m = u$). Si $u = 8$, entonces a_7 y a_8 pueden intercambiar sus valores y se llegaría al caso $t = 8$ (el cual se analizará después). Entonces $u = 9$ y, con el fin de que se cumpla la desigualdad (6), debe suceder que $a_8 = 6$ (ya que, si $a_w = 6$ con $w \leq 6$, no se cumple (6) para $n = 7$ y $m = w$). Así, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 4$ y $a_6 = 5$, lo que implica que los números a_6

y a_7 se pueden intercambiar, por lo que 8 estaría en la posición número 6, y esto es imposible. Para el caso $t = 8$, por argumentos similares a los dados anteriormente se obtiene que $a_9 = 7$ y, tomando $n = 9$ y $m = 8$ en (6), se llega a una contradicción. Por lo tanto, $t = 9$ y $a_9 = 8$. Con un razonamiento similar se puede probar que $a_8 = 7$, $a_7 = 6, \ldots, a_3 = 2$, lo cual es una contradicción al hecho de que debe haber un pico hacia arriba.

c) Supongamos que hay tres picos hacia abajo. Entonces hay dos picos hacia arriba, uno entre cada par de picos hacia abajo consecutivos. Sean $m_1 < m_2 < m_3$ los lugares donde están los picos hacia abajo y $k_1 < k_2$ los lugares donde están los picos hacia arriba. Tenemos que $m_1 < k_1 < m_2 < k_2 < m_3$. Como $m_1 \geq 2$, $a_{m_1} \geq 1$ y $a_{k_1} \leq 9$, obtenemos que $k_2 \geq 5$, $m_3 \geq 6$, $a_{k_2} \leq 8$ y $a_{m_3} \geq 5$.
Como $a_{k_2} \geq k_2 + 1$ por ser pico hacia arriba, entonces $k_2 \leq 7$. Si $k_2 = 7$, se tiene que $a_7 = 8$ y, usando (6) con $n = m_3$ y $m = 7$, llegamos a que $a_{m_3} \geq m_3 - 1$. Por otro lado, como en m_3 tenemos el último pico hacia abajo, debe haber al menos $10 - m_3 + 1$ números más grandes que a_{m_3} (todos los que siguen de a_{m_3} y a_{m_3-1}). Esto implica que $10 - a_{m_3} \geq 11 - m_3$, es decir, $a_{m_3} \leq m_3 - 1$ y, por lo tanto, $a_{m_3} = m_3 - 1$. Luego, los números a_{m_3} y a_{k_2} pueden intercambiar su valor, logrando así que haya un pico hacia arriba en $m_3 \geq 8$, lo cual es una contradicción.
Si $k_2 = 6$, un razonamiento similar lleva a la misma conclusión anterior si $a_6 = 7$, por lo que $a_6 = 8$. Como $a_{k_2} + a_{m_3} \geq k_2 + m_3$, entonces $a_{m_3} \geq m_3 - 2$. Por la observación hecha en el párrafo anterior se sigue que $m_3 - 2 \leq a_{m_3} \leq m_3 - 1$. Si $a_{m_3} = m_3 - 2$, la desigualdad (6) se vuelve igualdad con $n = m_3$ y $m = 6$, lo que implica que los valores de a_6 y a_{m_3} se pueden intercambiar, generando una contradicción, pues el último pico hacia arriba no puede ser después de $k_2 = 6$. Queda que $a_{m_3} = m_3 - 1$, por lo que $10 - a_{m_3} = 11 - m_3$, esto es, a_{m_3-1} y los números que están después de a_{m_3} son precisamente los $10 - a_{m_3}$ números más grandes que a_{m_3}, lo cual es imposible pues $a_1 = 10$.
Por último, si $k_2 = 5$, tenemos que $m_1 = 2$, $k_1 = 3$ y $m_2 = 4$. Además, $6 \leq a_{k_2} \leq 8$. En los casos $a_5 = 6$ y $a_5 = 7$, llegamos a conclusiones similares a las que se obtuvieron anteriormente, por lo que $a_5 = 8$. Además, como a_2 es el elemento más pequeño de todos, obtenemos que $a_2 = 1$. Tomando $n = 5$ y $m = 2$ en (6), llegamos a una contradicción. Por lo tanto, este caso no es posible.

d) Finalmente, supongamos que hay cuatro picos hacia abajo. Luego, hay tres picos hacia arriba, uno entre cada par de picos hacia abajo consecutivos. Sean $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$ los lugares donde están los picos hacia abajo y $k_1 < k_2 < k_3$ los lugares donde están los picos hacia arriba. Tenemos que $m_1 < k_1 < m_2 < k_2 < m_3 < k_3 < m_4$. Como $m_1 \geq 2$ y $a_{k_1} \leq 9$, se sigue que $a_{k_3} \leq 7$ y $k_3 \geq 7$, pero al ser a_{k_3} un pico hacia arriba, obtenemos que $a_{k_3} \geq k_3 + 1 \geq 8$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Problemas de Olimpiadas Nacionales de Matemáticas

A continuación, dejamos una lista de 25 problemas que han aparecido en los Concursos Nacionales de las Olimpiadas de Matemáticas alrededor del mundo.

1) (China, 1978) Demostrar que para cualesquiera enteros $n > 1$ y $k > 2$, el número $n(n-1)^{k-1}$ se puede escribir como suma de n enteros pares consecutivos.

2) (China, 1978) a) Determinar el área mínima de un triángulo equilátero inscrito en un cuadrado de lado 1.
b) Determinar el área máxima de un triángulo equilátero inscrito en un cuadrado de lado 1.

3) (Japón, 1994) En un triángulo ABC sea M el punto medio de BC. Si $\angle MAC = 15°$, calcular el mayor valor posible del ángulo $\angle ABC$.

4) (China, 1998) Determina todos los enteros positivos $n \geq 3$, tales que 2^{2000} sea divisible por
$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

5) (Irán, 1998) Sean a y b enteros positivos tales que
$$p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$
es un número primo. Determinar el valor mayor posible de p.

6) (Rumania, 1998) El volumen de un paralelepípedo es 216 cm^3 y su área es 216 cm^2. Demostrar que el paralelepípedo es un cubo.

7) (Polonia, 1999) Sea D un punto en el lado BC de un triángulo ABC tal que $AD > BC$. Un punto E en el lado AC satisface que
$$\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD - BC}.$$
Demostrar que $AD > BE$.

8) (Taiwán, 1999) Determinar todas las soluciones en enteros positivos (x, y, z) de la ecuación $(x+1)^{y+1} + 1 = (x+2)^{z+1}$.

9) (Turquía, 1999) Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea D un punto en el segmento BC tal que $BC = 2DC$ y sea P un punto en AD tal que $\angle BAC = \angle BPD$. Demostrar que $\angle BAC = 2\angle DPC$.

10) (Uruguay, 2002) Un entero de 10 dígitos se llama *negriazul* si los diez dígitos son distintos, no empieza con cero y es divisible entre 99999. Calcular la cantidad de números negriazules.

11) (Grecia, 2002) Sea ABC un triángulo tal que $\angle C > 10^\circ$ y $\angle B = \angle C + 10^\circ$. Sean E y D puntos en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $\angle ACE = 10^\circ$ y $\angle ABD = 15^\circ$. Las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y AEC se cortan en A y en Z. Demostrar que $\angle ZBA > \angle ZCA$.

12) (Reino Unido, 2002) Se consideran 12 puntos sobre una circunferencia. Con extremos en dichos puntos se forman 6 segmentos que no tengan puntos en común. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

13) (China, 2007) a) Demostrar que si $2n-1$ es un número primo, entonces para cualesquiera n enteros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, existen $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que
$$\frac{a_i + a_j}{\text{mcd}(a_i, a_j)} \geq 2n - 1.$$
b) Demostrar que si $2n-1$ es un número compuesto, entonces existen n enteros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
$$\frac{a_i + a_j}{\text{mcd}(a_i, a_j)} < 2n - 1.$$

14) (China, 2008) Hallar todas las ternas (p, q, n) tales que $q^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{p^n}$ y $p^{n+2} \equiv 3^{n+2} \pmod{q^n}$, donde p, q son números primos impares positivos y $n > 1$ es un entero.

15) (Argentina, 2010) Los enteros positivos a, b y c son menores que 99 y satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2 + 99^2$. Determinar el valor máximo y el valor mínimo de $a + b + c$.

16) (Italia, 2011) En un cuadrilátero convexo $ABCD$, sea P el punto de intersección de las bisectrices externas de los ángulos $\angle DAC$ y $\angle DBC$. Demostrar que $\angle APD = \angle BPC$ si y solo si $AD + AC = BC + BD$.

17) (Grecia, 2012) Hallar todos los polinomios no cero $p(x)$ y $q(x)$ con coeficientes reales y de grado mínimo, tales que $p(x^2) + q(x) = p(x) + x^5 q(x)$ para todo número real x.

18) (Israel, 2013) Determinar la cantidad de enteros positivos n que satisfacen las tres condiciones siguientes:

   - $n < 10^6$.
   - n es múltiplo de 7.
   - n no contiene a ninguno de los dígitos $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

19) (Hong Kong, 2013) Sean a, b y c números reales positivos tales que $ab + bc + ca = 1$. Demostrar que
$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a} + 6\sqrt{3}b} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{b} + 6\sqrt{3}c} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{c} + 6\sqrt{3}a} \leq \frac{1}{abc}$$
y determinar cuándo se da la igualdad.

20) (Bulgaria, 2014) Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que $f(xy) = f(x+y)(f(x)+f(y))$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

21) (Lituania, 2015) Un entero positivo n es *extraño*, si el número n^4+2014 es divisible por n^2+2014 y el número n^4+2015 es divisible por n^2+2015.

    a) Determinar al menos 3 números extraños.

    b) Determinar todos los números extraños.

22) (Argentina, 2016) Determinar los ángulos de un cuadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\angle ABD = 29°$, $\angle ADB = 41°$, $\angle ACB = 82°$ y $\angle ACD = 58°$.

23) (Alemania, 2017) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. El punto P es elegido sobre la línea AB de tal manera que la circunferencia que pasa por C, D y P, toca a la línea AB. De manera análoga, el punto Q es elegido sobre la línea CD de tal manera que la circunferencia que pasa por A, B y Q toca a la línea CD. Demostrar que la distancia entre P y la línea CD es igual a la distancia entre Q y la línea AB.

24) (Rusia, 2019) Determinar el menor entero positivo n para el cual existen números enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que el trinomio cuadrático

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 x + (a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + 1)$$

tiene al menos una raíz entera.

25) (Japón, 2020) Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que $\frac{n^2+1}{2m}$ y $\sqrt{2^{n-1} + m + 4}$ sean ambos números enteros.

Bibliografía

1) *Crux Mathematicorum, Vol. 15, # 4.* Canadian Mathematical Society, 1989.

2) *Crux Mathematicorum, Vol. 16, # 5.* Canadian Mathematical Society, 1990.

3) M. Gaspar. *La Olimpiada Internacional de Matemáticas: un poco de historia.* Aprender a pensar, noviembre 2019.

4) R. Honsberger. *In Pólya's Footsteps. Miscellaneous Problems and Essays.* Dolciani Mathematical Expositions, number nineteen. The Mathematical Association of America.

5) *Olimpiadas Matemáticas Nacionales en Iberoamérica, 1995.* Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas. Red Olímpica.

Problemas de práctica

A continuación presentamos 15 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2023. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Reduce la siguiente fracción a su forma más simple

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}.$$

Problema 2. Considera un círculo Γ y sean A y B puntos arbitrarios en el interior de Γ. Construye un círculo que pase por A y B y que sea tangente a Γ.

Problema 3. Demuestra que para cada entero positivo p y cualquier entero $s > 1$, existen p enteros impares consecutivos cuya suma es igual a p^s y determina el primero de estos números.

Problema 4. De los $9!$ números que se pueden formar permutando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ¿cuántos números hay entre 678000000 y 859000000?

Problema 5. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$3f(x) + 2 = 2f(\lfloor x \rfloor) + 2f(\{x\}) + 5x$$

para todo número real x.
(Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x y, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, es la parte fraccionaria de x).

Problema 6. Demuestra que $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < 2n^{n-1}$, para todo entero $n \geq 1$.

Problema 7. Sea n un entero libre de cuadrados tal que $n = r^2 + s^2 = t^2 + u^2$, donde r, s, t y u son enteros positivos. Demuestra que $2n(n + rt + su)$ es un cuadrado si y solo si $r = t$ y $s = u$.

Problema 8. Determina la mayor constante k tal que

$$\frac{kabc}{a+b+c} \leq (a+b)^2 + (a+b+4c)^2$$

para cualesquiera números reales positivos a, b y c.

Problema 9. Determina el menor entero positivo a tal que el número $11^{3n+1} + a \cdot 5^n$ sea múltiplo de 13 y el número $23^{2n+1} + 2^{n+a}$ sea múltiplo de 31, para todo entero positivo n.

Problema 10. Sea $ABCDEFG$ un heptágono regular de lados de longitud 1. Demuestra que

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$

Problema 11. Sea S un subconjunto no vacío de números racionales que satisface las siguientes propiedades:
i) 0 no está en S.
ii) Para cada s_1 y s_2 elementos de S, $\frac{s_1}{s_2}$ también es un elemento de S.
iii) Existe un número racional $q \neq 0$ que no está en S con la siguiente propiedad: cada número racional distinto de cero que no está en S, es de la forma qs para algún elemento s del conjunto S.
Demuestra que si x está en S, entonces existen elementos y, z en S tales que $x = y+z$.

Problema 12. Considera 5 puntos en el plano con la siguiente propiedad: entre cualesquiera 4 de ellos, hay 3 que son los vértices de un triángulo equilátero.

a) Demuestra que 4 de los 5 puntos son los vértices de un rombo con un ángulo de $60°$.

b) Determina el número de triángulos equiláteros que tienen sus vértices entre los 5 puntos dados.

Problema 13. Para cada entero positivo n, considera los números racionales

$$a = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n},$$
$$b = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

Demuestra que $ab \leq \dfrac{2n-1}{8n+4}$.

Problema 14. Para cada entero $n \geq 3$, demuestra que existe un cubo que puede escribirse como suma de n cubos de enteros positivos.

Problema 15. Demuestra que las raíces cúbicas de tres números primos distintos, no pueden ser términos (no ncecesariamente consecutivos) de una progresión aritmética.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 15 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Racionalizando la fracción, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}} &= \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7-3\sqrt{5}}}{\sqrt{2}-\sqrt{7-3\sqrt{5}}}\\
&= \frac{\sqrt{2(3-\sqrt{5})}-\sqrt{(3-\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}}{2-(7-3\sqrt{5})}\\
&= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{36-16\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}-5}\\
&= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}-2\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}-5}.
\end{aligned}$$

Observemos ahora que $6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$ y $9-4\sqrt{5}=(\sqrt{5}-2)^2$.
Entonces,

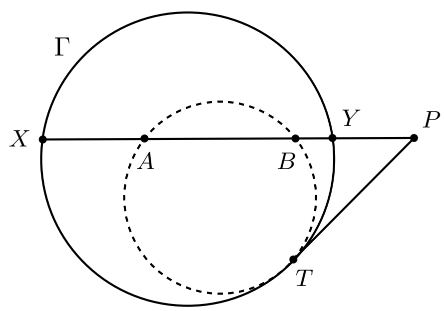
$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}-1-2(\sqrt{5}-2)}{3\sqrt{5}-5}=\frac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}.$$

Finalmente, racionalizando esta última fracción, obtenemos que

$$\frac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} \cdot \frac{3\sqrt{5}+5}{3\sqrt{5}+5} = \frac{4\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Por lo tanto, la fracción original es igual a $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Solución del problema 2. Supongamos que el círculo deseado es tangente a Γ en T y que la tangente común en T interseca a la cuerda XY, por A y B, en el punto exterior P, como se muestra en la figura.



Por potencia del punto P, tenemos que $PT^2 = PX \cdot PY = PA \cdot PB$, lo cual implica que $\frac{PX}{PA} = \frac{PB}{PY}$. Restando 1 de cada lado, obtenemos que

$$\frac{PX - PA}{PA} = \frac{PB - PY}{PY},$$

esto es, $\frac{XA}{AP} = \frac{BY}{YP}$, que es equivalente a $\frac{XA}{YB} = \frac{AP}{PY}$.
Entonces, el punto P puede encontrarse sobre la prolongación de XY como el punto que divide a AY externamente en la razón conocida $XA : YB$. Una vez localizado este punto P, dibujamos la tangente a Γ desde P para determinar el punto T y, finalmente, trazamos el círculo a través de A, B y T.

Solución del problema 3. Sean p un entero positivo y $s > 1$ un entero. Dividiremos la prueba en dos casos, dependiendo de la paridad del número p.
a) Si $p = 2n + 1$, entonces debemos resolver la siguiente ecuación para a:

$$(a-2n) + \cdots + (a-4) + (a-2) + a + (a+2) + (a+4) + \cdots + (a+2n) = p^s,$$

esto es, $(2n+1)a = p^s$. Como $2n + 1 = p$, obtenemos que $a = p^{s-1}$, el cual es un entero impar y comenzamos en el número

$$a - 2n = p^{s-1} - (p-1) = p^{s-1} - p + 1.$$

b) Si $p = 2n$, la ecuación a resolver para a es

$$(a-2n) + \cdots + (a-4) + (a-2) + a + (a+2) + (a+4) + \cdots + (a+2n-2) = p^s,$$

esto es, $2an-2n = p^s$. Como $p = 2n$, tenemos que $p(a-1) = p^s$, de donde obtenemos que $a = p^{s-1} + 1$, el cual es un entero impar y comenzamos de nuevo en el número

$$a - 2n = a - p = p^{s-1} - p + 1.$$

Solución del problema 4. Los dígitos iniciales de los enteros que queremos contar, los podemos clasificar en 16 tipos, en cada uno de los cuales, los dígitos restantes se pueden colocar en cualquier orden.

$678\ldots$,	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$679\ldots$,	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$68\ldots$,	dando 7! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$69\ldots$,	dando 7! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$7\ldots$,	dando 8! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$81\ldots$,	dando 7! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$82\ldots,$	dando 7! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$83\ldots,$	dando 7! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$84\ldots,$	dando 7! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$851\ldots,$	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$852\ldots,$	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$853\ldots,$	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$854\ldots,$	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
	Ningún entero puede comenzar en 855 ya que solo hay un 5,
$856\ldots,$	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos,
$857\ldots,$	dando 6! formas de colocar los restantes 6 dígitos.

Por lo tanto, el número de tales enteros es

$$8 \cdot 6! + 6 \cdot 7! + 8! = 6!(8 + 42 + 56) = 720 \cdot 106 = 76320.$$

Solución del problema 5. Observemos primero que $f(0) = 2$. Además, es fácil ver que $\lfloor\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor x\rfloor$, $\{\lfloor x\rfloor\} = 0$, $\lfloor\{x\}\rfloor = 0$ y $\{\{x\}\} = \{x\}$, para todo número real x. Sustituyendo en la ecuación funcional $\lfloor x\rfloor$ por x, obtenemos que

$$3f(\lfloor x\rfloor) + 2 = 2f(\lfloor\lfloor x\rfloor\rfloor) + 2f(\{\lfloor x\rfloor\}) + 5\lfloor x\rfloor,$$

esto es,

$$f(\lfloor x\rfloor) = 5\lfloor x\rfloor + 2. \tag{7}$$

Sustituyendo ahora x por $\{x\}$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$3f(\{x\}) + 2 = 2f(\lfloor\{x\}\rfloor) + 2f(\{\{x\}\}) + 5\{x\},$$

esto es,

$$f(\{x\}) = 5\{x\} + 2. \tag{8}$$

Sustituyendo ahora las relaciones (7) y (8) en la ecuación funcional, obtenemos que

$$3f(x) + 2 = 2(5\lfloor x\rfloor + 2) + 2(5\{x\} + 2) + 5x,$$

esto es, $3f(x) = 10(\lfloor x\rfloor + \{x\}) + 5x + 6$. Como $\lfloor x\rfloor + \{x\} = x$, concluimos que $f(x) = 5x + 2$.

Solución del problema 6. La demostración la haremos por inducción en n. Observemos que para $n = 1$, 2 y 3, tenemos que $1 < 2$, $3 < 4$ y $15 < 18$, respectivamente. Supongamos que el resultado es cierto para algún entero $n \geq 3$. Entonces,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1) < 2(2n+1)n^{n-1}. \qquad (9)$$

Ahora, tenemos que si $n \geq 3$, entonces $10n > 27$ y $64n > 54n + 27$, lo cual implica que $(64/27)n > 2n + 1$ y, por consiguiente,

$$2n + 1 < n\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \leq n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ya que la sucesión $\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es creciente.
Por lo tanto,

$$(2n+1)n^{n-1} < n^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (n+1)^n. \qquad (10)$$

Finalmente, de (9) y (10), obtenemos que $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) < 2(n+1)^n$, completando la inducción.

Solución del problema 7. Sea $m = 2n(n + rt + su)$. Es claro que si $r = t$ y $s = u$, entonces $m = (2n)^2$ es un cuadrado.
Supongamos ahora que m es un cuadrado. Notemos primero que

$$m > 2n^2. \qquad (11)$$

Además, como $n = r^2 + s^2 = t^2 + u^2$, tenemos que

$$m = n\left[4n - (r-t)^2 - (s-u)^2\right]. \qquad (12)$$

Como n es libre de cuadrados, m es un cuadrado si y solo si

$$4n - (r-t)^2 - (s-u)^2 = k^2 n \qquad (13)$$

para algún entero positivo k.
De (12) y (13), obtenemos que $m = k^2n^2$ y, junto con (11), concluimos que $k > 1$.
Ahora, la relación (13) la podemos reescribir como

$$n(4 - k^2) = (r-t)^2 + (s-u)^2.$$

Como el lado derecho de esta igualdad es no negativo y $n > 0$, necesariamente debemos tener que $4 - k^2 \geq 0$, esto es, $k^2 \leq 4$. Como $k > 1$, la única posibilidad es $k = 2$. Por lo tanto, $(r-t)^2 + (s-u)^2 = 0$, lo cual implica que $r = t$ y $s = u$.

Solución del problema 8. Por la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(a+b+4c)^2 &= (a+b)^2+(a+2c+b+2c)^2\\ &\geq (2\sqrt{ab})^2+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2\\ &= 4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}&\frac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}\cdot(a+b+c)\\ &\geq \frac{4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab}}{abc}\cdot(a+b+c)\\ &= \left(\frac{4}{c}+\frac{8}{b}+\frac{8}{a}+\frac{16}{\sqrt{ab}}\right)(a+b+c)\\ &= 8\left(\frac{1}{2c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c\right)\\ &\geq 8\left(5\sqrt[5]{\frac{1}{2a^2b^2c}}\right)\left(5\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{2^4}}\right)\\ &= 100,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue por la desigualdad MA-MG.
Por lo tanto, la mayor constante k es 100. Para $k = 100$, la igualdad se sostiene si y solo si $a = b = 2c > 0$.

Solución del problema 9. Sea n un entero positivo. Como $11 \equiv -2 \pmod{13}$ y $(-2)^3 = -8 \equiv 5 \pmod{13}$, tenemos que

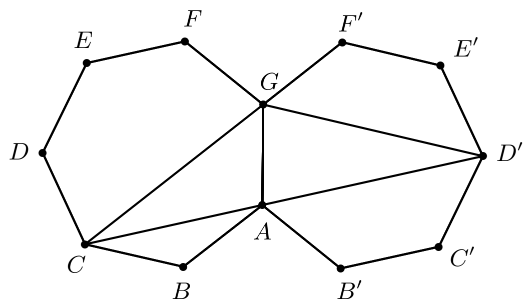
$$0 \equiv 11^{3n+1} + a\cdot 5^n \equiv -2\cdot 5^n + a\cdot 5^n \equiv (-2+a)5^n \pmod{13},$$

lo cual implica que $a \equiv 2 \pmod{13}$, ya que 5^n y 13 son primos relativos.
Por otro lado, como $23 \equiv -8 \pmod{31}$ y $(-8)^2 = 64 \equiv 2 \pmod{31}$, tenemos que

$$0 \equiv 23^{2n+1} + 2^{n+a} \equiv -8\cdot 2^n + 2^{n+a} \equiv (-8+2^a)2^n \pmod{31},$$

de donde se sigue que $2^a \equiv 8 \pmod{31}$, ya que 2^n y 31 son primos relativos. Como 5 es el menor entero positivo que es solución de la congruencia $2^x \equiv 1 \pmod{31}$, concluimos que $a = 5k+3$ para algún entero no negativo k.
Entonces, tenemos que $5k+3 \equiv 2 \pmod{13}$, esto es, $5k \equiv -1 \equiv 25 \pmod{13}$ y, por consiguiente, $k \equiv 5 \pmod{13}$, ya que 5 y 13 son primos relativos. Por lo tanto, el menor entero positivo a se obtiene con $k = 5$, esto es, $a = 5(5)+3 = 28$.

Solución del problema 10. Reflejemos el heptágono respecto de AG para obtener el heptágono $AB'C'D'E'F'G$.



Como

$$\angle GAC + \angle GAD' = \frac{4(180°)}{7} + \frac{3(180°)}{7} = 180°,$$

los puntos C, A y D' son colineales.
Además, tenemos que

$$\angle GCA = \angle GD'A = \frac{180°}{7} = \angle CAB = \angle ACB.$$

Por lo tanto, los triángulos GCD' y BAC son semejantes, lo cual implica que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD'}{CG} = \frac{AC + AD'}{AD} = \frac{AC + AD}{AD}.$$

Como $AB = 1$, la igualdad anterior se simplifica a

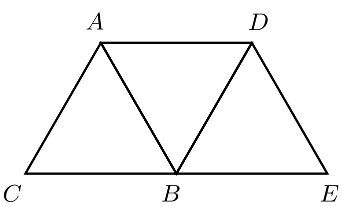
$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{AC + AD}{AC \cdot AD} = \frac{1}{AB} = 1,$$

como queríamos.

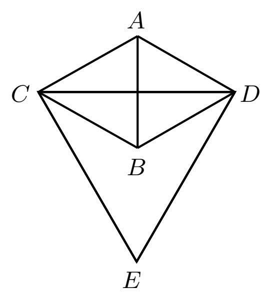
Solución del problema 11. Para cada $s \in S$, tenemos que $1 = \frac{s}{s} \in S$. Demostraremos que $x^2 \in S$ para cada número racional $x \neq 0$.
i) Si $x \in S$, $\frac{1}{x} \in S$, por lo que $x/(1/x) = x^2 \in S$.
ii) Si $x \notin S$, $\frac{1}{x} \notin S$, así que por iii), existe q tal que $x/q \in S$ y, por consiguiente, $(1/x)/q = 1/(xq) \in S$. Luego, $(x/q)/(1/xq) = x^2 \in S$.
Ahora, sea t cualquier elemento de S. Como $25/9 \in S$ y $25/16 \in S$, tenemos que $t/(25/9) = (9t)/25$ y $t/(25/16) = (16t/25)$ son elementos de S.
Luego, $t = (9t)/25 + (16t)/25$, con $(9t)/25$ y $(16t)/25$ elementos de S, que es lo que se quería demostrar.

Solución del problema 12. a) Sean A, B, C, D y E los cinco puntos. Por la condición del problema, hay 3 puntos, digamos A, B y C, que forman un triángulo equilátero. Si ninguno de los puntos D y E es vértice de un triángulo equilátero junto con los vértices A y B, B y C, o C y A, entonces de los tres conjuntos de 4 puntos: $\{D, E, A, B\}$, $\{D, E, B, C\}$ y $\{D, E, C, A\}$, dos de los tres triángulos DEA, DEB, DEC, son equiláteros. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los triángulos DEA y DEB

son equiláteros. Entonces, los puntos A, D, B y E son los vértices de un rombo con un ángulo de $60°$.
Por otro lado, si alguno entre D y E, digamos D, es el tercer vértice de un triángulo equilátero con A y B, entonces $ADBC$ es un rombo con un ángulo de $60°$.
b) Renombrando los vértices, si es necesario, podemos suponer que $ADBC$ es un rombo con $\angle ADB = 60° = \angle ACB$. Observemos que el triángulo ABE no puede ser equilátero, ya que tendríamos $E = C$ o $E = D$. Consideremos los cuatro puntos B, C, D y E. Como el triángulo CDB no es equilátero, debemos tener que alguno de los triángulos BDE, BCE o CDE es equilátero. En los primeros dos casos, podemos asumir que el triángulo BDE es equilátero (renombrando los vértices).



Luego, no hay ningún triángulo equilátero con vértices en el conjunto $\{A, C, D, E\}$. Entonces, concluimos que el triángulo CDE es equilátero y obtenemos la siguiente configuración después de renombrar si es necesario.



Por inspección, podemos ver que hay 3 triángulos equiláteros: ABC, ABD y CDE. También es claro que tal configuración satisface las condiciones del problema.

Solución del problema 13. Observemos que

$$a + b = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{2n}{2n+1} < 1.$$

Como $a \geq \frac{1}{2}$, se sigue que $b < 1 - a \leq \frac{1}{2}$. Luego, tenemos que $a - \frac{1}{2} \geq 0$ y $b - \frac{1}{2} < 0$. Esto implica que

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq 0,$$

esto es,

$$ab - \frac{a+b}{2} + \frac{1}{4} \leq 0,$$

de donde, obtenemos que $ab \leq \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2n-1}{8n+4}$.

Solución del problema 14. La prueba la haremos por inducción en n.
Si $n = 3$, tenemos que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.
Si $n = 4$, tenemos que $5^3 + 7^3 + 9^3 + 10^3 = 13^3$.
Supongamos que el resultado es cierto para un entero $n \geq 3$, esto es, supongamos que existen enteros positivos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y$, tales que

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = y^3.$$

Usando la relación $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$, obtenemos que

$$\begin{aligned}(6y)^3 &= (6x_n)^3 + \cdots + (6x_2)^3 + (6x_1)^3\\ &= (6x_n)^3 + \cdots + (6x_2)^3 + (5x_1)^3 + (4x_1)^3 + (3x_1)^3,\end{aligned}$$

lo que prueba que el resultado es cierto para $n + 2$.
Por lo tanto, para todo entero $n \geq 3$, el resultado es verdadero.

Solución del problema 15. Sean p, q y r, números primos distintos y, supongamos, que $\sqrt[3]{p} = a$, $\sqrt[3]{q} = a + md$ y $\sqrt[3]{r} = a + nd$, donde m y n son enteros distintos. Es claro que

$$\frac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}} = \frac{m}{n},$$

de donde obtenemos que,

$$(m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q})^3 = (m-n)^3 p.$$

Desarrollando, agrupando términos y usando que $m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q} = (m-n)\sqrt[3]{p}$, obtenemos que

$$m^3 r - n^3 q - (m-n)^3 p = 3mn(m-n)\sqrt[3]{pqr},$$

lo que es una contradicción, ya que el lado izquierdo de esta igualdad es un número entero, mientras que el lado derecho no es entero.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2023 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este cuarto y último número del año 2023. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sean x, y, z, números reales no negativos. Demuestra que

$$x(\sqrt{y}+\sqrt{z})+y(\sqrt{z}+\sqrt{x})+z(\sqrt{x}+\sqrt{y})\leq 2\sqrt{3(x^3+y^3+z^3)}.$$

Problema 2. Determina todos los enteros positivos n tales que 6^n puede ser escrito como suma de cubos de tres enteros positivos consecutivos.

Problema 3. Determina todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x)f(yz)\geq\frac{1}{4}$$

para todos los números reales x, y, z.

Problema 4. Sean a, b, c y d, enteros positivos tales que $a < b < c < d$ y $ad = bc$. Demuestra que $2a + \sqrt{a} + \sqrt{d} < b + c + 1$.

Problema 5. Sea $k > 1$ un entero impar. Para cada entero positivo n, sea $f(n)$ el mayor entero no negativo tal que $2^{f(n)}$ divide a $k^n - 1$. Determina una fórmula para $f(n)$ en términos de k y n.

Problema 6. Sean x, y, z números reales positivos tales que $x \geq y \geq z$. Demuestra que

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Problema 7. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Sean A' el punto medio de la hipotenusa y M el punto medio de la altura AD, con D en BC. Si P es la intersección de BM y AA', demuestra que $\tan \angle PCB = (\operatorname{sen} \angle ACB)(\cos \angle ACB)$.

Problema 8. Determina todas las ternas de números primos (p, q, r) tales que $p^q + p^r$ sea un cuadrado.

Problema 9. Sea ABC un triángulo con incentro I, tal que $AB \neq AC$. Sean BB' (con B' en AC) y CC' (con C' en AB), las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$, respectivamente. Demuestra que

$$1 < \frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'} < \frac{3}{2}.$$

Problema 10. a) Divide un triángulo equilátero en 3 polígonos que sean semejantes entre sí pero que no sean congruentes entre sí.
b) Divide un cuadrado en 3 polígonos que sean semejantes entre sí pero que no sean congruentes entre sí.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2023 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2023. En esta ocasión, agradecemos a Titu Zvonaru, de Comăneşti, Rumania, por haber enviado sus soluciones a los problemas 1, 3, 6 y 7. Aprovechamos para invitar a todos los lectores, a enviar sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2023, por lo que aún tienes tiempo de mandar las tuyas.

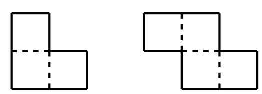
Problema 1. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de enteros positivos tal que la suma de cualesquiera tres elementos distintos, es un número primo. Determina el máximo valor posible de n.

Solución de Titu Zvonaru. Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y sean

$$A_0 = \{x \in A \mid x \equiv 0 \pmod 3\},$$
$$A_1 = \{x \in A \mid x \equiv 1 \pmod 3\},$$
$$A_2 = \{x \in A \mid x \equiv 2 \pmod 3\}.$$

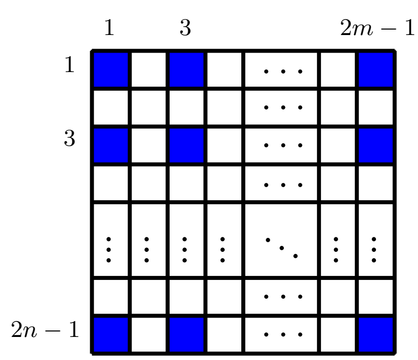
Si $|A_0| \geq 1$, $|A_1| \geq 1$ y $|A_2| \geq 1$, tomando $a \in A_0$, $b \in A_1$ y $c \in A_2$, tenemos que la suma $a + b + c$ es divisible por 3 que además es mayor o igual que $1 + 2 + 3$ y, por lo tanto, no es primo.
Si existe $1 \leq i \leq 3$ tal que $|A_i| \geq 3$, entonces tomando a, b, c en A_i, tenemos que $a + b + c$ es divisible por 3 y mayor que 3.
En conclusión, n es a lo más 4 y es fácil verificar que el conjunto $A = \{3, 9, 11, 17\}$ satisface la condición: $3 + 9 + 11 = 23$, $3 + 9 + 17 = 29$, $3 + 11 + 17 = 31$, $9 + 11 + 17 = 37$.

Problema 2. Una cuadrícula de $(2m - 1) \times (2n - 1)$, con $m \geq 4$ y $n \geq 4$, se cubre con piezas de las siguientes formas:

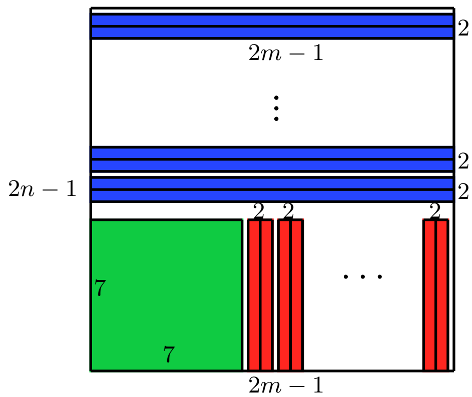


donde cada cuadrito es de 1×1. Las piezas pueden ser rotadas y reflejadas, siempre y cuando sus aristas sean paralelas a las de la cuadrícula. Si las piezas deben cubrir toda el área de la cuadrícula sin traslaparse, ¿cuál es el mínimo número de piezas necesarias para lograr esto?

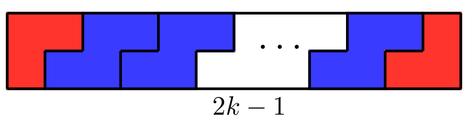
Solución. Primero, veamos que se requieren al menos mn piezas. Para ello, etiquetemos cada cuadrado con la pareja (i, j), con $1 \leq i \leq 2m - 1$ y $1 \leq j \leq 2n - 1$. Además, pintemos el cuadrado (i, j) de azul cuando i y j sean ambos impares.



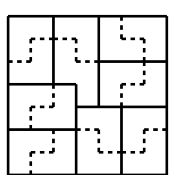
Observemos que hay mn cuadritos azules, pero cada pieza alcanza a cubrir a lo más un cuadrito, así que se requieren al menos mn piezas.
Veamos ahora que en efecto es posible cubrir cualquier cuadrícula con mn piezas. Para ello, separemos la cuadrícula en un cuadrado de 7×7, $n-4$ rectángulos de $(2m-1)\times2$ y $m-4$ rectángulos de 2×7, como se muestra a continuación.



Notemos que, para $k\geq3$, se puede cubrir cualquier rectángulo de $2\times(2k-1)$ con k piezas usando dos del primer tipo y $k-2$ del segundo tipo, como se muestra a continuación.



Cubriendo los rectángulos de 2×7 y los de $(2m-1)\times2$ de esta manera, se tiene cubierta toda la cuadrícula, excepto por el cuadrado de 7×7, con $4(m-4)+m(n-4)=mn-16$ piezas, por lo que basta cubrir un cuadrado de 7×7 con 16 piezas. A continuación se muestra una forma de cubrir el cuadrado con 16 piezas, completando la solución.



Problema 3. Determina todos los enteros positivos a, b, c, d y n tales que

$$a^a+b^b+c^c+d^d=n^n.$$

Solución de Titu Zvonaru. Observemos primero que si $x > 0$ y m es un entero tal que $m \geq 2$, entonces desarrollando el binomio de Newton, tenemos que

$$(x+1)^m > x^m + mx^{m-1}.$$

Luego, aplicando la desigualdad anterior con $n \geq 3$, obtenemos que

$$n^n = n \cdot n^{n-1} \geq 3(n-1+1)^{n-1} > 3(n-1)^{n-1} + 3(n-1)(n-1)^{n-2} = 6(n-1)^{n-1}.$$

Observemos ahora que cada uno de a, b, c y d es menor que n. En efecto, si $a \geq n$, entonces $a^a \geq n^a \geq n^n$, lo cual implica que $a^a + b^b + c^c + d^d \geq n^n + 1 + 1 + 1 > n^n$, que es una contradicción. Por lo tanto, a, b, c y d son menores que n y, como son enteros, cada uno es menor o igual que $n - 1$. Esto implica que

$$n^n = a^a + b^b + c^c + d^d \leq 4(n-1)^{n-1} < 6(n-1)^{n-1} < n^n,$$

lo que es una contradicción. Esto muestra que la ecuación no tiene soluciones si $n \geq 3$. Además, es claro que n no puede ser igual a 1, ya que a, b, c y d son enteros mayores o iguales que 1. Entonces, la única opción es $n = 2$, dando la única solución $a = b = c = d = 1$.

Problema 4. Sean $a \neq 0$ y $b \neq -1$ números reales. Si el polinomio $x^3 - ax^2 + bx - a$ tiene tres raíces reales positivas, determina el valor mínimo del cociente

$$\frac{2a^3 - 3ab + 3a}{b+1}.$$

Solución. Sean r_1, r_2 y r_3 las raíces del polinomio $x^3 - ax^2 + bx - a$. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$a = r_1 r_2 r_3, \tag{14}$$
$$a = r_1 + r_2 + r_3, \tag{15}$$
$$b = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3. \tag{16}$$

Como r_1, r_2 y r_3 son positivos, también a y b son positivos. Por la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{r_1 r_2 r_3} \leq \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} = \frac{a}{3},$$

esto es, $3\sqrt[3]{a} \leq a$, de donde se sigue que $a \geq 3\sqrt{3}$, pues $a > 0$.
Ahora, por la desigualdad media aritmética - media cuadrática, tenemos que

$$\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}} \geq \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} = \frac{a}{3},$$

esto es,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \geq \frac{a^2}{3}. \tag{17}$$

De (15), (16) y (17) se sigue que:

$$a^2 = (r_1 + r_2 + r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_2^2 + 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) \geq \frac{a^2}{3} + 2b,$$

por lo que $a^2 \geq 3b$. Más aún, $a^2 + 3 \geq 3(b + 1)$.
Por otra parte, tenemos que $\frac{2a^3-3ab+3a}{b+1} = 2a\left(\frac{a^2+3}{b+1}\right) - 3a$. Como $\frac{a^2+3}{b+1} \geq 3$, obtenemos que $\frac{2a^3-3ab+3a}{b+1} \geq 6a - 3a = 3a \geq 9\sqrt{3}$. Finalmente, observemos que esta cota se alcanza con $a = 3\sqrt{3}$ y $b = 9$, de donde $x^3 - ax^2 + bx - a = (x - \sqrt{3})^3$ (esto es, sus tres raíces son reales positivas), por lo que el valor mínimo de $\frac{2a^3-3ab+3a}{b+1}$ es $9\sqrt{3}$.

Problema 5. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el conjunto de polinomios en la variable x con coeficientes enteros. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ tales que, para cada polinomio $p(x)$,

1) $f(p(x) + 1) = f(p(x)) + 1$ y,

2) si $f(p(x)) \neq 0$, entonces $f(p(x))$ divide a $f(p(x)q(x))$ para todo polinomio $q(x)$.

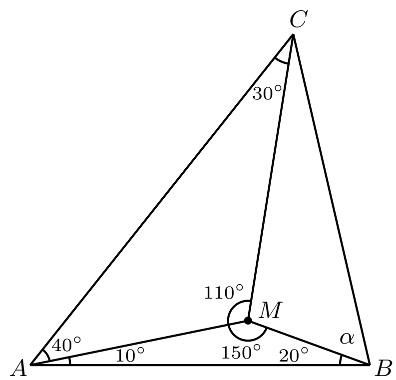
Solución. Demostraremos primero que $f(p(x) + n) = f(p(x)) + n$ para todo $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ y para todo entero n.
Procediendo por inducción, el caso base $n = 1$ se cumple por hipótesis. Supongamos que $f(p(x) + k) = f(p(x)) + k$ para algún $k \geq 1$. Como $p(x) + k \in \mathbb{Z}[x]$, entonces, por la condición 1), tenemos que

$$f(p(x) + (k + 1)) = f((p(x) + k) + 1) = f(p(x) + k) + 1.$$

Pero, por hipótesis de inducción, $f(p(x) + k) = f(p(x)) + k$, por lo que $f(p(x) + (k + 1)) = f(p(x)) + k + 1$, probando así que $f(p(x) + n) = f(p(x)) + n$ para todo entero $n \geq 0$. Luego, para todo número natural n, nótese que, como $p(x) - n \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $f(p(x) - n) + n = f(p(x) - n + n) = f(p(x))$, de donde se sigue que $f(p(x) - n) = f(p(x)) - n$, probando así que $f(p(x) + n) = f(p(x)) + n$ para todo entero n.
Sea $a = f(x)$. Nótese que f no es una función constante, pues $f(x + 1) = a + 1$. Sea b un entero diferente de a y sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Como b es raíz de $p(x) - p(b)$, entonces $p(x) - p(b) = (x - b)q(x)$ para algún $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Más aún, como $p(a) - p(b) = (a-b)q(a)$, entonces $a-b \mid p(a)-p(b)$. Por otra parte, como $f(x-b) \neq 0$ (pues $a \neq b$), por la condición 2) tenemos que $f(x - b)$ divide a $f((x - b)q(x)) = f(p(x) - p(b))$, de donde se sigue que $a - b \mid f(p(x)) - p(b)$. Como $a - b$ divide a $f(p(x)) - p(b)$ y a $p(a) - p(b)$, también divide a su diferencia, por lo que $a - b \mid f(p(x)) - p(a)$ para todo entero positivo b diferente de a, esto es, $f(p(x)) - p(a)$ tiene una infinidad de divisores, llegando así a que $f(p(x)) - p(a) = 0$, por lo que las únicas funciones que satisfacen las condiciones del problema son las de la forma $f(p(x)) = p(a)$, es decir, la valuación en $x = a$ entero.

Problema 6. Sean ABC un triángulo y M un punto en su interior tal que $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$, $\angle MAC = 40°$ y $\angle MCA = 30°$. Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

Solución de Titu Zvonaru. Sea $\alpha = \angle MBC$. Observemos que $\angle AMC = 110°$ y $\angle AMB = 150°$. Entonces, $\angle BMC = 360° - (\angle AMC + \angle AMB) = 100°$ y $\angle MCB = 180° - \angle BMC - \alpha = 80° - \alpha$.



Aplicando la forma trigonométrica del teorema de Ceva, obtenemos que

$$(\operatorname{sen} 10°)(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} 30°) = (\operatorname{sen} 40°)(\operatorname{sen} 20°) \operatorname{sen}(80° - \alpha),$$

esto es,

$$(\operatorname{sen} 10°)(\operatorname{sen} \alpha) = 2(\operatorname{sen} 40°)(\operatorname{sen} 20°) \cos(\alpha + 10°),$$

ya que $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} x = \cos(90° - x)$.
Usando ahora la identidad trigonométrica $2 \operatorname{sen}(\frac{x-y}{2}) \operatorname{sen}(\frac{x+y}{2}) = \cos y - \cos x$, obtenemos que

$$(\operatorname{sen} 10°)(\operatorname{sen} \alpha) = (\cos 20° - \cos 60°) \cos(\alpha + 10°).$$

Multiplicando por 2 la igualdad anterior y usando que $\cos 60° = \frac{1}{2}$, obtenemos la igualdad equivalente

$$\begin{aligned} 2(\operatorname{sen} 10°)(\operatorname{sen} \alpha) &= 2(\cos 20°) \cos(\alpha + 10°) - 2(\cos 60°) \cos(\alpha + 10°) \\ &= 2(\cos 20°) \cos(\alpha + 10°) - \cos(\alpha + 10°). \end{aligned}$$

Usando ahora la identidad trigonométrica $2 \cos(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2}) = \cos x + \cos y$, el lado derecho de la igualdad anterior la podemos reescribir en la forma

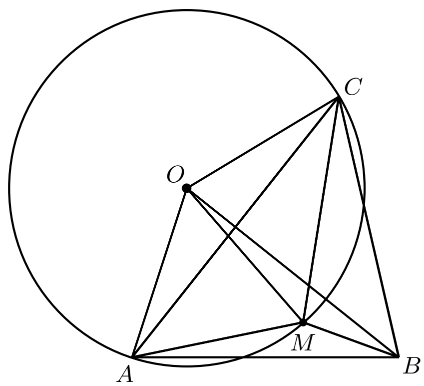
$$\cos(\alpha + 30°) + \cos(\alpha - 10°) - \cos(\alpha + 10°)$$

y, usando las identidades para $\cos(x + y)$ y $\cos(x - y)$, el lado izquierdo de la igualdad anterior, la podemos reescribir como $\cos(\alpha - 10°) - \cos(\alpha + 10°)$.
Por lo tanto, tenemos que

$$\cos(\alpha - 10°) - \cos(\alpha + 10°) = \cos(\alpha + 30°) + \cos(\alpha - 10°) - \cos(\alpha + 10°),$$

esto es, $\cos(\alpha+30^\circ) = 0$. De aquí, se sigue que $\alpha = 60^\circ$ y, por consiguiente, $\angle BCA = 20^\circ + 30^\circ = 10^\circ + 40^\circ = \angle BAC$, lo que significa que el triángulo ABC es isósceles.

Solución alternativa de Titu Zvonaru. Sea O el circuncentro del triángulo AMC. Tenemos que $\angle AOM = 2\angle MCA = 60^\circ$ y $\angle COM = 2\angle MAC = 80^\circ$. Luego, $\angle OAC = \angle OCA = 20^\circ$, de donde $\angle MAO = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. Por lo tanto, el triángulo AMO es equilátero.



Ahora, como $\angle AMB = 150^\circ$, obtenemos que $\angle OMB = 360^\circ - 60^\circ - 150^\circ = 150^\circ$. Esto significa que los triángulos AMB y OMB son congruentes por el criterio LAL, por lo que $\angle MOB = 10^\circ$.
Ahora, $\angle AOB = \angle AOM + \angle MOB = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$. En el triángulo isósceles OAC, OB es bisectriz del ángulo $\angle AOC$. Esto implica que OB es la mediatriz de AC y, por lo tanto, el triángulo ABC es isósceles con $BA = BC$.

Problema 7. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales x, y,

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Solución de Titu Zvonaru. Sean x un número real y n un entero positivo. Observemos que la diferencia $f(x) - f(0)$, la podemos escribir en la forma

$$f\left(\frac{x}{n}\right) - f(0) + f\left(\frac{2x}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right) + f\left(\frac{3x}{n}\right) - f\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + f(x) - f\left(\frac{(n-1)x}{n}\right).$$

Entonces, aplicando la desigualdad del triángulo, obtenemos que

$$|f(x) - f(0)| \leq \left|f\left(\frac{x}{n}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{2x}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{3x}{n}\right) - f\left(\frac{2x}{n}\right)\right| +$$
$$+ \cdots + \left|f(x) - f\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)\right|.$$

Usando la hipótesis del problema, cada una de las diferencias que están en los valores absolutos es menor o igual que $(\frac{x}{n})^2$, por lo que

$$0 \leq |f(x) - f(0)| \leq n\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{x^2}{n}.$$

Como esta desigualdad se cumple para todo entero $n \geq 1$, necesariamente debemos tener que $f(x) - f(0) = 0$, esto es, $f(x) = f(0)$, lo que significa que f es constante.

Problema 8. Sean λ un número real no negativo y n un entero positivo, tales que

$$\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor, \lfloor \lambda^{n+2} \rfloor, \ldots, \lfloor \lambda^{4n} \rfloor,$$

son cuadrados perfectos. Demuestra que $\lfloor \lambda \rfloor$ es un cuadrado perfecto.
(Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Solución. Comenzaremos demostrando el siguiente lema.

Lema. Si μ es un número real no negativo tal que $\lfloor \mu^2 \rfloor$ es cuadrado perfecto, entonces

$$\lfloor \mu^2 \rfloor = \lfloor \mu \rfloor^2.$$

Demostración. Como $\lfloor \mu \rfloor \leq \mu < \lfloor \mu \rfloor + 1$ y $\mu \geq 0$, tenemos que

$$\lfloor \mu \rfloor^2 \leq \mu^2 < (\lfloor \mu \rfloor + 1)^2.$$

También tenemos que

$$\lfloor \mu^2 \rfloor \leq \mu^2 < \lfloor \mu^2 \rfloor + 1.$$

Demostraremos que $\lfloor \mu \rfloor^2 \leq \lfloor \mu^2 \rfloor$. Supongamos, por contradicción, que $\lfloor \mu^2 \rfloor < \lfloor \mu \rfloor^2$. Entonces, $\lfloor \mu^2 \rfloor \leq \lfloor \mu \rfloor^2 - 1$ (pues $\lfloor \mu^2 \rfloor$ y $\lfloor \mu \rfloor^2$ son enteros) y, por consiguiente,

$$1 + \lfloor \mu^2 \rfloor \leq \lfloor \mu \rfloor^2 \leq \mu^2 < \lfloor \mu^2 \rfloor + 1,$$

lo que es un absurdo. Por lo tanto, $\lfloor \mu \rfloor^2 \leq \lfloor \mu^2 \rfloor$.
Por otro lado, como $\lfloor \mu^2 \rfloor \leq \mu^2$ y $0 \leq \mu < \lfloor \mu \rfloor + 1$, tenemos que

$$\lfloor \mu^2 \rfloor \leq \mu^2 < (\lfloor \mu \rfloor + 1)^2.$$

En conclusión, tenemos que

$$\lfloor \mu \rfloor^2 \leq \lfloor \mu^2 \rfloor < (\lfloor \mu \rfloor + 1)^2.$$

Como $\lfloor \mu^2 \rfloor$ es un cuadrado (por hipótesis) y $\lfloor \mu \rfloor^2$, $(\lfloor \mu \rfloor + 1)^2$ son cuadrados de enteros consecutivos, necesariamente $\lfloor \mu \rfloor^2 = \lfloor \mu^2 \rfloor$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Demostraremos el problema por inducción fuerte en n. Para el caso $n = 1$, supongamos que $\lfloor \lambda^2 \rfloor$, $\lfloor \lambda^3 \rfloor$ y $\lfloor \lambda^4 \rfloor$ son cuadrados perfectos. Por dos aplicaciones del lema anterior, obtenemos que $\lfloor \lambda^2 \rfloor = \lfloor \lambda \rfloor^2$ y $\lfloor \lambda^4 \rfloor = \lfloor \lambda^2 \rfloor^2 = \lfloor \lambda \rfloor^4$. Expandiendo la última igualdad, usando que $\lambda = \lfloor \lambda \rfloor + \{\lambda\}$, con $0 \leq \{\lambda\} < 1$ la parte fraccional, tenemos que

$$\left\lfloor \lfloor \lambda \rfloor^4 + 4\lfloor \lambda \rfloor^3\{\lambda\} + 6\lfloor \lambda \rfloor^2\{\lambda\}^2 + 4\lfloor \lambda \rfloor\{\lambda\}^3 + \{\lambda\}^4 \right\rfloor = \lfloor \lambda \rfloor^4,$$

lo cual implica que

$$4\lfloor \lambda \rfloor^3\{\lambda\} + 6\lfloor \lambda \rfloor\{\lambda\}^2 + 4\lfloor \lambda \rfloor\{\lambda\}^3 + \{\lambda\}^4 < 1.$$

Si $\lfloor \lambda \rfloor = 0$, terminamos. En caso contrario, comparando término a término, obtenemos que

$$3\lfloor \lambda \rfloor^2\{\lambda\} + 3\lfloor \lambda \rfloor\{\lambda\}^2 + \{\lambda\}^3 + 0 < 1,$$

por lo que

$$\lfloor \lambda^3 \rfloor = \left\lfloor \lfloor \lambda \rfloor^3 + 3\lfloor \lambda \rfloor^2\{\lambda\} + 3\lfloor \lambda \rfloor\{\lambda\}^2 + \{\lambda\}^3 \right\rfloor = \lfloor \lambda \rfloor^3.$$

Por ser esto un cuadrado perfecto, también ha de serlo $\lfloor \lambda \rfloor$.
Supongamos cierto el resultado para algún entero $n \geq 1$ y que

$$\lfloor \lambda^{n+2} \rfloor, \lfloor \lambda^{n+3} \rfloor, \ldots, \lfloor \lambda^{4n+4} \rfloor$$

son cuadrados.
Dado que $\lfloor \lambda^{2n+2} \rfloor$, $\lfloor \lambda^{3n+3} \rfloor$ y $\lfloor \lambda^{4n+4} \rfloor$ son cuadrados perfectos, la hipótesis de inducción implica que $\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor$ también lo es. En particular, $\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor$, $\lfloor \lambda^{n+2} \rfloor, \ldots, \lfloor \lambda^{4n} \rfloor$ son cuadrados perfectos y, por la hipótesis de inducción, $\lfloor \lambda \rfloor$ también lo es.

Problema 9. Pinocho y Gepetto toman turnos quitando piedras de un montón de n, empezando por Pinocho. El juego tiene las siguientes reglas:

a) Si queda una sola piedra, el jugador en turno puede quitarla.

b) Si queda más de una piedra, el jugador en turno solo puede quitar a lo más la mitad de las piedras del montón.

c) A partir del segundo turno, si el jugador anterior quitó k piedras, el jugador en turno debe quitar un número de piedras primo relativo con k.

Gana quien quite la última piedra. Determina el mayor valor de $n \leq 50$ tal que Gepetto tiene estrategia ganadora.

Solución. Diremos que un número n es "ganador" si, al empezar el juego con este número de piedras, Pinocho tiene estrategia ganadora. Recíprocamente, un número que no es ganador se llama "perdedor". Queremos encontrar el mayor entero $n \leq 50$ perdedor.
Si n es perdedor y un jugador puede dejar n piedras tras su turno, entonces este jugador puede garantizar la victoria. La razón de esto es que el siguiente jugador tendrá un subconjunto de las jugadas que tendría de empezar con esta cantidad de piedras, las cuales no son suficientes para garantizar la victoria. En particular, si n es perdedor, entonces los números $n+1, n+2, \ldots, 2n$ son todos ganadores.

Además, si n es perdedor y $n+1$ es primo, entonces $2n+1$ también es perdedor, pues no importa qué cantidad k de piedras quite Pinocho, Gepetto puede quitar $(n+1)-k$ piedras y dejar a Pinocho con n.
El número 1 es ganador, por lo que el 2 es perdedor. Como $2+1$ es primo, entonces 5 también es perdedor. A continuación, haremos un análisis de casos para demostrar que el número 12 es perdedor.
Empezando con 12 piedras, si Pinocho quita $k \geq 2$ piedras, Gepetto puede quitar $7-k$ y dejarlo con 5, una cantidad perdedora. Si Pinocho quita una piedra, Gepetto puede responder quitando 4, dejando 7. Pinocho solo podrá quitar 1 piedra o 3.

- En el primer caso, Gepetto responde quitando 2 piedras, dejando 4. Pinocho tendrá que quitar 1 y Gepetto podrá quitar otra, dejando 2 piedras, una cantidad perdedora.

- En el segundo caso, Gepetto responde quitando 2 piedras, dejando 2, una cantidad perdedora.

Como $12+1$ es primo, se sigue que el 25 es perdedor, mientras que los números del 26 al 50 son ganadores, dándonos una respuesta de 25.

Problema 10. Determina todas las parejas de enteros positivos (a,b) tales que

$$a^3+b^3=a^2+42ab+b^2.$$

Solución. Sea d el máximo común divisor de a y b, esto es, $a=dx$, $b=dy$ con x,y primos relativos. Cancelando d^2 de ambos lados y factorizando la suma de cubos, la ecuación se convierte en

$$d(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^2+42xy+y^2.$$

Como $x+y$ divide al lado derecho, entonces

$$x+y \mid (x^2+42xy+y^2)-(x+y)^2=40xy.$$

Como x,y son primos relativos, entonces $x+y$ no comparte factores ni con x ni con y, así que $x+y \mid 40$. Además, como x^2-xy+y^2 divide al lado derecho, entonces

$$x^2-xy+y^2 \mid (x^2+42xy+y^2)-(x^2-xy+y^2)=43xy.$$

De nuevo como x,y son primos relativos, x^2-xy+y^2 no comparte factores ni con x ni con y, así que $x^2-xy+y^2 \mid 43$.
Como $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy$ es un entero positivo y 43 es primo, necesariamente ha de ser igual a 1 o a 43. Solo puede ser igual a 1 cuando $xy=1$, lo cual implica que $x=1$, $y=1$. Sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos $d=22$, de donde $(a,b)=(22,22)$ es una solución.
Supongamos entonces que $x^2-xy+y^2=43$. Como esto es igual a $(x+y)^2-3xy$,

tenemos que $x+y \geq 7$, pues de otra forma el valor sería a lo más 36. Además, por la desigualdad MA-MG,

$$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy \geq (x+y)^2 - 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4}.$$

Por lo tanto, $x+y \leq 13$. Como $x+y \mid 40$, esto deja solo los casos $x+y=8$ y $x+y=10$.
En el primer caso, obtenemos $x^2 - x(8-x) + (8-x)^2 = 43$. Resolviendo la cuadrática obtenemos que $x=1$ o $x=7$. Despejando para b y luego para d, obtenemos las soluciones $(a,b)=(1,7)$ y $(a,b)=(7,1)$.
En el segundo caso, obtenemos $x^2 - x(10-x) + (10-x)^2 = 43$. Esta ecuación cuadrática no tiene soluciones enteras, por lo que ya hemos encontrado todas las soluciones.

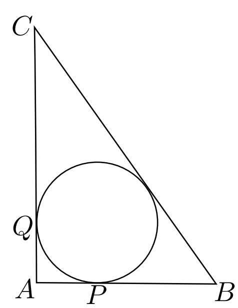
Examen Final Estatal de la 37^{a} OMM

A continuación presentamos los problemas y soluciones del examen final estatal de la 37^{a} OMM propuesto por el Comité Organizador.

Primer día

Problema 1. Probar que los números enteros del 1 al 19 se pueden separar en tres conjuntos de tal manera que en ninguno de los tres conjuntos haya 3 elementos cuya suma sea múltiplo de 4, pero que esto no se puede hacer con los números del 1 al 20.

Problema 2. En el triángulo rectángulo ABC (con ángulo recto en A), el círculo inscrito toca al lado AB en P y al lado AC en Q. Si $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale $\frac{AQ}{QC}$?



Problema 3. Hay 10 casitas numeradas del 0 al 10 en forma circular alrededor de un lago. En cada casita vive una rana exactamente. La rana Mariana vive en la casa 0. Quiere visitar a todas sus amigas, una vez a cada una y, finalmente, regresar a su casa. Para pasar de una casa a otra debe ir, ya sea a la casa que está al lado (en cualquier sentido) o a la casa opuesta, es decir, a la casa a 5 casas de distancia. Por ejemplo, si

está en la casa 3, puede ir a cualquiera de las tres casas 4, 2 u 8 que no haya visitado todavía (y solo a ellas). ¿Cuántos recorridos distintos puede hacer?

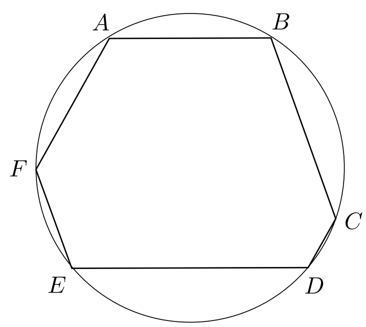
Segundo día

Problema 4. Encontrar todas las soluciones (p, q, r) de la ecuación

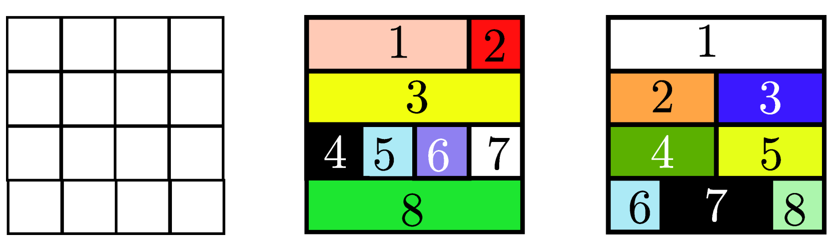
$$13p + 7rq + q = 4pq,$$

si p, q y r deben ser números primos (positivos).

Problema 5. En la figura se muestra un hexágono $ABCDEF$ con sus vértices en un círculo. Se sabe además que AB y ED son paralelas y también son paralelas AF y CD. Probar que FE y BC son paralelas.



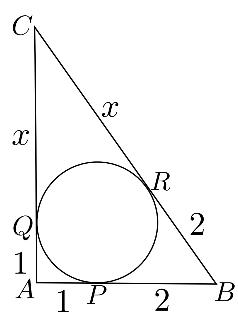
Problema 6. El cuadrado de 4×4 que se muestra abajo a la izquierda se debe partir en 8 rectángulos. Los rectángulos deben tener sus lados sobre las líneas de la cuadrícula y además sus lados verticales deben tener medida 1. Las dos figuras a la derecha muestran dos posibilidades. ¿Cuántas posibilidades hay en total?



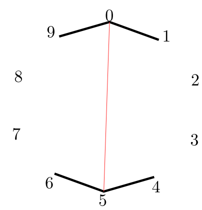
Soluciones del Examen Final Estatal de la 37ª OMM

Problema 1. En la división por 4, entre los números del 1 al 19 hay cuatro que dejan residuo 0 y hay cinco que dejan cada uno de los residuos 1, 2 y 3. Podemos poner todos los que dejan residuo 2 en un conjunto: $\{2, 6, 10, 14, 18\}$, poner dos de los números que dejan residuo 0 junto con los que dejan residuo 1 en otro conjunto: $\{4, 8, 1, 5, 9, 13, 17\}$ y, los otros dos números que dejan residuo 0 los ponemos junto con los que dejan residuo 3 en un tercer conjunto: $\{12, 16, 3, 7, 11, 15, 19\}$.
Ahora, supongamos que sí se pueden separar los números del 1 al 20 en tres conjuntos de tal manera que en ninguno de los tres conjuntos haya 3 elementos cuya suma sea múltiplo de 4 y consideremos una tal separación. En la división por 4, entre los números del 1 al 20 hay cinco que dejan cada uno uno de los residuos 0, 1, 2 y 3. Ninguno de los conjuntos puede tener 3 números con residuo 0, de manera que cada uno de los conjuntos tiene al menos un elemento con residuo 0. Por otro lado, alguno de los conjuntos debe tener dos elementos con residuo 2; esos dos elementos junto con uno de residuo 0 del mismo conjunto suman un múltiplo de 4, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe tal separación.

Problema 2. Sea R el punto de tangencia de BC con el círculo inscrito. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AP = 1$. Entonces, $PB = 2$. Tenemos que $AP = PQ$, $BP = BR$ y $CQ = CR$. Si $x = CQ$, entonces por el teorema de Pitágoras, tenemos que $(1 + x)^2 + (1 + 2)^2 = (x + 2)^2$, esto es, $x^2 + 2x + 1 + 9 = x^2 + 4x + 4$, de donde $2x = 6$ y, por lo tanto, $x = 3$ y $\frac{AQ}{QC} = \frac{1}{3}$.

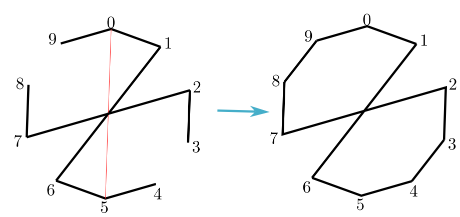


Problema 3. Supongamos que las casas están en los vértices de un polígono regular de 10 lados. Llamemos *aristas* a cada una de las líneas que unen un vértice con otro al que puede pasar directamente, es decir, a los lados del polígono y a las diagonales que van de un vértice al vértice opuesto. En cada vértice hay 3 aristas, de las cuales un camino usa exactamente 2. Fijémonos en las posibilidades de elección de las dos aristas que se usan a partir de la casa de Mariana (sin considerar el sentido). Tenemos, esencialmente, dos posibilidades: la primera es que se usen los que unen 0 con los dos lados del polígono y, la otra posibilidad, es que se use la arista que une 0 con 5 y, supongamos, 0 con 1 (el caso de 0 con 5 y 0 con 9 será análogo).
Caso A. Si se usan los caminos que unen 0 con 1 y con 9, entonces la arista de 0 a 5 no se usa, de manera que deben usarse las aristas que unen 5 con 4 y con 6.

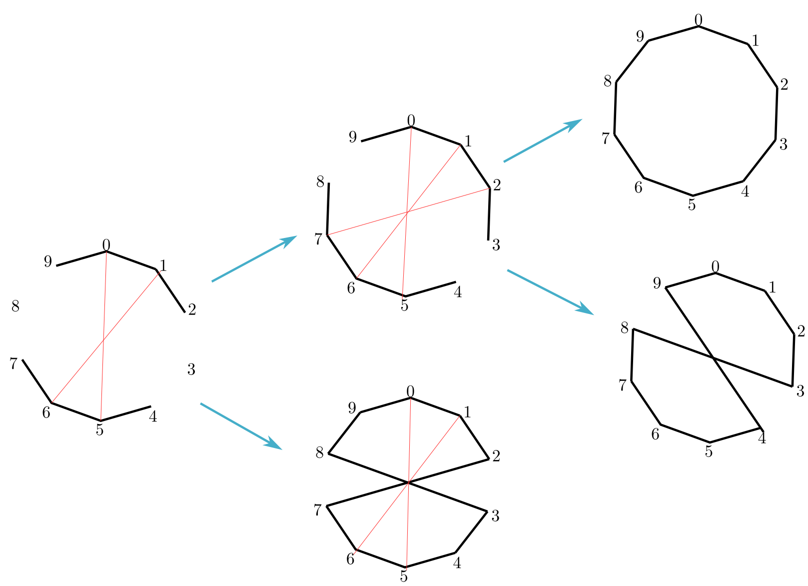


Otra vez aquí hay dos posibilidades, según si se usa la arista que une 1 con 6 o la arista que une 1 con 2.

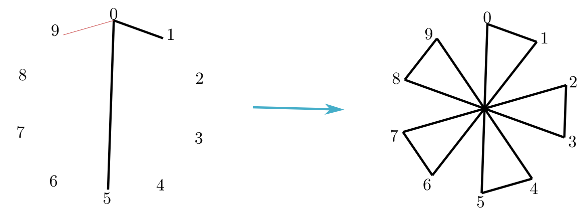
Caso A1. Si se usa la arista que une 1 con 6, entonces no se usa la arista entre 1 y 2, ni tampoco la que une 6 con 7, así que se usa la diagonal entre 2 y 7, y también la arista entre 7 y 8 y, la arista entre 2 y 3. Además, notamos que si se usara la diagonal entre 4 y 9, el recorrido se cerraría antes de visitar todas las casas (pues sería $0-1-6-5-4-9-0$ o en el otro sentido). Las aristas usadas se muestran en la siguiente figura.



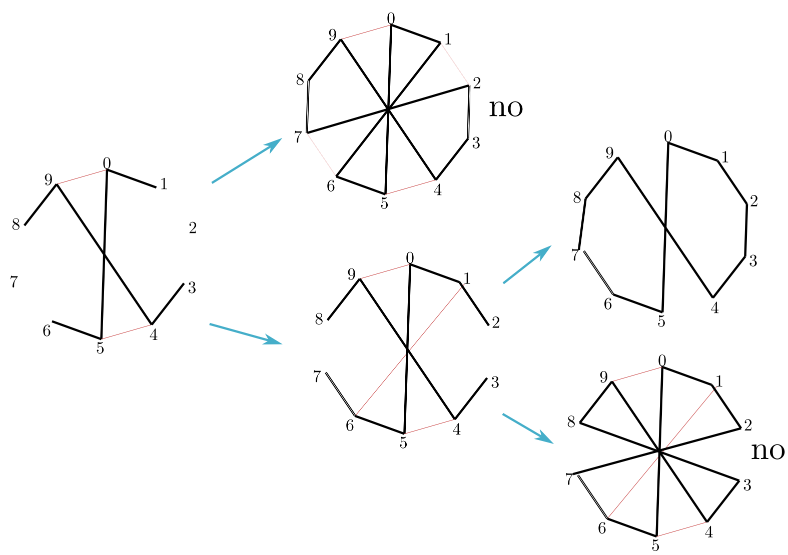
Caso A2. Cuando se usa la arista entre 1 y 2. Como no se usa la diagonal entre 1 y 6, se deben usar las aristas entre 6 y sus dos vecinos. Aquí tenemos dos posibilidades, que se use la diagonal entre 2 y 7 o que no. La ramificación en este caso se muestra en la figura.



Caso B. Se usa la diagonal entre 0 y 5 y, supongamos, la arista entre 0 y 1. Nuevamente aquí tenemos dos posibilidades para la otra arista de 5: que sea la que va a 4 o la que va a 6.
Caso B1. Se usa la arista entre 5 y 4. Como antes, completamos el camino y queda como se ve en la figura.



Caso B2. Se usa la arista entre 5 y 6. Entonces, 4 está unido con 3 y con 9, 5 está unido con 6 y, 9 está unido con 8. La ramificación es como se muestra en la figura de abajo, notando la imposibilidad de que se use la arista entre 2 y 7 (pues el camino se cerraría antes de recorrer todas las casas).

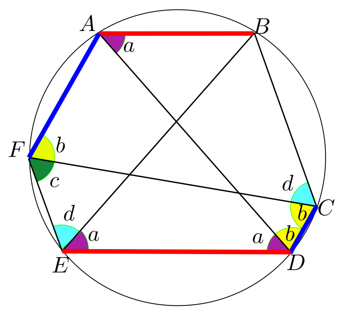


En total, el número de caminos en forma de rehilete son 4: $0-1-6-7-2-3-8-9-4-5-0$, $0-9-4-3-8-7-2-1-6-5-0$ y sus inversos. El número de caminos en forma de abanico es 10; se pueden contar viendo cuáles de las aristas entre dos casas vecinas no se usan y considerando que hay 2 sentidos (los no usados pueden ser $0-1$, $1-2$, $2-3$, $3-4$ y $4-5$). Hay 2 caminos que no usan diagonales.
Por lo tanto, el total de recorridos es $4+10+2=16$.

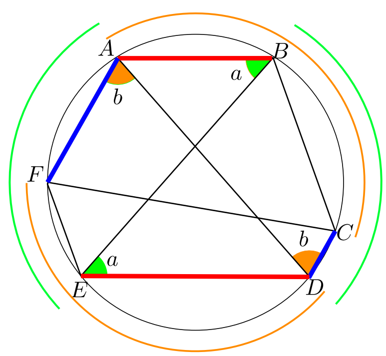
Problema 4. La ecuación se puede reescribir como $13p = q(4p-7r-1)$, lo que implica que q divide a $13p$. Como q es primo, o bien q divide a 13 y, por consiguiente, $q = 13$, o bien, q divide a p y, por consiguiente, $q = p$.

Si $q = 13$, la ecuación se simplifica a $p = 4p - 7r - 1$, que es equivalente a $3p = 7r + 1$. Si r es impar, entonces $3p$ es par y, por lo tanto, $p = 2$, ya que el único primo par es 2. Luego, tenemos que $6 = 7r + 1$, de donde $7r = 5$, lo cual no es posible. Por lo tanto, r es par, esto es, $r = 2$ y, tenemos que, $3p = 15$, de donde $p = 5$. Por lo tanto, en este caso, tenemos la solución $(p, q, r) = (5, 13, 2)$.
Si $p = q$, entonces la ecuación se simplifica a $13 = 4p - 7r - 1$, que es equivalente a $7r = 4p - 14$. Como $4p - 14$ es par, necesariamente r es par y, como es primo, la única opción es $r = 2$. Entonces, tenemos que $28 = 4p$, de donde $p = 7$. Por lo tanto, en este caso, tenemos la solución $(p, q, r) = (7, 7, 2)$.

Problema 5. Tracemos las diagonales AD, BE y CF. Observemos que $\angle BED = \angle BAD = \angle ADE$. La primera igualdad es porque abarcan el mismo arco en el círculo y, la segunda, es por ser ángulos internos entre paralelas. Sea a el valor común de estos ángulos.
De manera análoga tenemos que $\angle ADC = \angle AFC = \angle FCD$. Sea b el valor común de estos ángulos. Sean $c = \angle CFE$ y $d = \angle FEB$. Por abarcar el mismo arco, también tenemos que $d = \angle FCB$. Ahora, en el cuadrilátero cíclico $CDEF$, los ángulos opuestos internos suman $180°$, así que tenemos $a + b + c = 180° = a + d + b$ y, por consiguiente, $c = d$. Luego, CF es una transversal entre las rectas FE y BC y, como los ángulos internos son iguales, se sigue que son paralelas.



Segunda solución. Tracemos las diagonales AD, BE y CF.



Como AB y ED son paralelas, tenemos que $\angle ABE = \angle BED$, esto es,

$$\widehat{AF} + \widehat{FE} = \widehat{BC} + \widehat{CD}. \tag{18}$$

Análogamente, como AF y CD son paralelas, tenemos que $\angle ADC = \angle FAD$, lo cual implica que

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{FE} + \widehat{ED}. \tag{19}$$

Sumamos las relaciones (18) y (19), obtenemos que

$$\widehat{AF} + \widehat{FE} + \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{FE} + \widehat{ED},$$

de donde se sigue que

$$\widehat{FA} + \widehat{AB} = \widehat{CD} + \widehat{DE}.$$

Esto implica que $\angle FCE = \angle EFC$ y, por lo tanto, BC y FE son paralelas.

Problema 6. Trabajemos primero por franjas horizontales (hay 4). En cada una puede haber entre 1 y 4 rectángulos. Solo hay una forma en que sean 4 rectángulos y también solo hay una forma en que sea un solo rectángulo. Sin embargo, hay 3 formas en que la franja horizontal quede partida en 2 rectángulos (escogiendo la línea vertical que los separa) y también 3 formas en que la franja se parta en 3 rectángulos (escogiendo las 2 líneas verticales que los separan).
Como hay 4 franjas horizontales, debemos ver las posibilidades de sumar 8 con 4 números entre 1 y 4. Las posibilidades son:

$$4+2+1+1,\ 3+3+1+1,\ 3+2+2+1,\ 2+2+2+2.$$

En la primera forma hay que escoger la franja en la que aparecen 4 rectángulos (puede escogerse de 4 formas) y luego la franja que determina 2 rectángulos (se puede escoger de 3 formas). Combinando esto, tenemos que las posibilidades en este caso son

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

Hacemos lo mismo para la segunda forma: Hay $\binom{4}{2} = 6$ formas de elegir las 2 franjas que quedan partidas en 3 rectángulos, y en cada una de ellas hay 3 formas de escoger cómo se parten. Así, en este caso las posibilidades son

$$6 \cdot 3 \cdot 3 = 54.$$

Análogamente, para la tercera forma las posibilidades son

$$4 \cdot \binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324.$$

Para la cuarta forma, las posibilidades son

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Ahora sumamos todos los casos para obtener la respuesta del problema:

$$36 + 54 + 324 + 81 = 495.$$

2ª Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas Concurso Nacional

La Comisión de Igualdad, Diversidad y Prevención de la Violencia de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en conjunto con el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, organizaron el Segundo Concurso Nacional Femenil de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, el cual se realizó del 8 al 15 de junio de 2023, teniendo como sedes: Oaxtepec del 8 al 11 de junio, y la Ciudad de México, del 12 al 15 de junio.
Los exámenes se llevaron a cabo los días 9, 10 y 11 de junio. Se aplicaron dos exámenes individuales y un examen por equipos. La competencia se dividió en dos niveles:

- Nivel I: Tercero de secundaria y primer año de bachillerato.
- Nivel II: Últimos dos años de bachillerato.

Participaron 30 estados de la República Mexicana, con un total de 162 concursantes, 30 líderes y 34 tutores. Para el examen por equipos, participaron 49 equipos, de los cuales 45 equipos estuvieron conformados por 3 integrantes y 4 equipos estuvieron conformados por 2 integrantes, todos en niveles diferentes.
Cabe destacar la participación mayoritaria de mujeres en las labores académicas de esta olimpiada. Por ejemplo, de las 29 personas que integraron el tribunal de evaluación, todas fueron mujeres que se relacionan con las matemáticas en sus estudios o su profesión. En la elaboración de los exámenes colaboraron 8 académicas provenientes de distintas regiones del país. De los 30 líderes, 17 fueron mujeres, mientras que de los 34 tutores, 19 fueron mujeres.
Esta olimpiada surge como un esfuerzo temporal que ayude al balance de género dentro de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) y que deje de realizarse una vez que se logre este objetivo.
A continuación listamos los nombres de las alumnas ganadoras de medalla de oro en la prueba individual en ambos niveles de la competencia. Las ganadoras de medalla de

oro en el Nivel I, integran la preselección nacional para la Olimpiada Femenil Panamericana de Matemáticas (PAGMO, por sus siglas en inglés).

Nivel I

Nombre	**Estado**
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos
Ángela María Flores Ruiz	Sinaloa
Perla Vivian Cabrera Contreras	San Luis Potosí
Catherine González Díaz	Guerrero
Eunice Delgado Vázquez	Chihuahua
Camila Campos Juárez	Sinaloa
Sofía Constanza Santisteban Dávila	Quintana Roo
Alejandra Muñoz Espín	Morelos

Nivel II

Nombre	**Estado**
Isabela Loredo Carbajal	Tamaulipas
Brenda Camila Trejo Rodríguez	Morelos
Ana Camila Cuevas González	Tamaulipas
Natalia Malpica Blackaller	Ciudad de México
María Fernanda López Tuyub	Yucatán
Valeria Yhelenna Oviedo Valle	Morelos
Claudia Iztel Pérez Lara	Hidalgo
Aylin Ximena Ocampo Vera	Guerrero

En la prueba por equipos, hubieron dos equipos ganadores de medalla de oro. Un equipo del Estado de Morelos, el cual estuvo integrado por Alejandra Muñoz Espín, Valeria Yhelena Oviedo Valle y Ashley Morales Baltazar. El otro equipo ganador de medalla de oro fue del Estado de Sinaloa, el cual estuvo integrado por Ángela María Flores Ruiz y María Fernanda Montoya López.

Al valorar el desempeño general por estados, el primer lugar lo obtuvo el Estado de Morelos, el segundo lugar lo obtuvo la Ciudad de México y el tercer lugar el Estado de Sinaloa.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del Concurso Nacional de la 2^a Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas. La prueba individual en cada nivel consta de dos exámenes con 3 problemas cada uno, para resolver en dos sesiones de 4.5 horas cada una. El examen por equipos consta también de 3 problemas para resolver en un máximo de 4.5 horas.

Prueba Individual

Primer día

Problema 1. (Nivel I) Gabriela encontró una enciclopedia de 2023 páginas, numeradas del 1 al 2023. Notó que las páginas cuyo número está formado únicamente por dígitos pares tienen una marca azul. También notó que cada tres páginas hay una marca roja, y que la primera marca roja está en la página 2. ¿Cuántas páginas de la enciclopedia están marcadas con ambos colores?

Solución. Para que las numeraciones de las páginas cumplan con la regla de la marcación azul, deben estar conformados únicamente por los dígitos $0, 2, 4, 6, 8$. Analizando las páginas marcadas con color rojo, $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$, notamos que corresponden a los números de página justo antes de un múltiplo de 3. Por el criterio de divisibilidad del 3, la suma de las cifras de los números que buscamos es un número justo antes de un múltiplo de 3 y, además, es par, pues son números formados únicamente por dígitos pares.
Continuamos nuestra búsqueda dividiendo en casos:

a) El dígito de las unidades de millar es 0. Por mucho podemos obtener una suma igual a 24 (con la página 888). Para encontrar las páginas con ambas marcaciones, consideramos entonces aquellas que tienen solamente dígitos pares, donde la suma de sus cifras sea 2, 8, 14 o 20, una unidad antes de los múltiplos de 3 impares menores que 24. Las combinaciones de posibles valores son:

$$\begin{aligned} 2 &= 2+0+0,\\ 8 &= 8+0+0 = 4+4+0 = 4+2+2 = 6+2+0,\\ 14 &= 8+6+0 = 8+4+2 = 6+6+2 = 6+4+4,\\ 20 &= 8+8+4 = 8+6+6. \end{aligned}$$

Debemos contar los acomodos que se forman con cada terna. Tenemos que los conjuntos que se forman con dos dígitos iguales y uno diferente, tienen 3 acomodos diferentes y, en los que los 3 dígitos son diferentes, tienen 6. Entonces, la cuenta queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &2,0,0 \to 002, 020, 200,\\ &8,0,0 \to 008, 080, 800,\\ &4,4,0 \to 044, 404, 440,\\ &4,2,2 \to 224, 242, 422,\\ &6,2,0 \to 026, 062, 206, 260, 602, 620,\\ &8,6,0 \to 068, 086, 608, 680, 806, 860, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&8,4,2 \rightarrow 248,284,428,482,824,842,\\
&6,6,2 \rightarrow 266,626,662,\\
&6,4,4 \rightarrow 446,464,644,\\
&8,8,4 \rightarrow 488,848,884,\\
&8,6,6 \rightarrow 668,686,866.
\end{aligned}
$$

b) El dígito de las unidades de millar es 2. Es fácil notar que la numeración de la página debe comenzar por 200 o 202 y, que debe agregarse un cuarto dígito al final. Notamos que los únicos números que cumplen con lo requerido son los números de páginas 2000 y 2006.

Sumando todas las cuentas de números que encontramos obtenemos

$$3+3+3+3+6+6+6+3+3+3+3+2=44$$

páginas con marca azul y roja.

Segunda solución. Pensemos en que para armar nuestros números es necesario elegir sus dígitos de entre el siguiente conjunto $\{0,2,4,6,8\}$, pero además el número final debe tener residuo 2 cuando se le divide entre 3, es decir, debe ser congruente con 2 módulo 3. Podemos lograrlo haciendo que la suma de las congruencias de las cifras utilizadas para formar el número sea congruente con 2 módulo 3. Escribamos el conjunto de los dígitos elegibles de acuerdo con sus congruencias módulo 3.

$$0,2,4,6,8 \longrightarrow \{0,2,1,0,2\}.$$

De una cifra. Hay dos páginas marcadas con rojo y azul, las páginas 2 y 8.
De dos cifras. Si el dígito de las unidades es 0 o 6 tenemos dos opciones para completar (2 u 8); si es 2 u 8 se tiene una opción para completar (6); si es 4 se tiene una sola opción para completar (4). Por lo tanto, hay 7 números: $20,80,26,86,62,68,44$.
De tres cifras. Tenemos tres casos: tomar cero, uno o dos digitos congruentes con 2 módulo 3.

- Hay cero números congruentes con 2 módulo 3. Solamente puede conseguirse si se toman dos números congruentes con 1 módulo 3 y un número congruente con 0 módulo 3, para lo cual hay tres acomodos posibles: $011,101,110$. Solo el 4 es congruente con 1 y la cifra congruente con 0 puede elegirse de dos formas (0 o 6). Tenemos seis números, pero 0 no puede ir al inicio. Por lo que quedan cinco números: $440,404,644,464,446$.

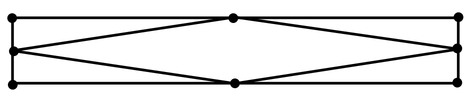
- Hay un número congruente con 2 módulo 3. Solamente puede conseguirse tomando dos números congruentes con 0 módulo 3, además del congruente con 2 módulo 3, para lo cual hay tres acomodos posibles: $002,020,200$. Hay dos maneras de elegir un número congruente con 2 (2 u 8) y dos formas de elegir números congruentes con 0 (0 o 6). Elegir el primer número puede hacerse de tres maneras (2, 6 u 8). Si el primer número es 6, hay cuatro formas

de elegir a los dos números que faltan y hay dos formas de elegir cómo organizar a cada uno: $602, 620, 608, 680, 662, 626, 668, 686$. Si el primer número es 2 u 8, solo hay cuatro combinaciones posibles para los otros dos números: $200, 206, 260, 266, 800, 806, 860, 866$.
Desde otro punto de vista, hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ números posibles, pero en ocho de ellos el 0 aparece al inicio, quedando así los 16 que se encontraron.

- Hay dos números congruentes con 2 módulo 3. Esto solo puede conseguirse agregando un número congruente con 1 módulo 3, para lo cual hay tres acomodos posibles: $122, 212, 221$. Como solo el 4 es congruente con 1, entonces solo es necesario considerar que los congruentes con 2 pueden elegirse de dos formas (2 o 8). Lo cual nos da $4 \cdot 3 = 12$ números: 422, 428, 482, 488, 242, 248, 842, 848, 224, 284, 824, 884.

Ahora solamente falta considerar a los números entre 2000 y 2023 que cumplen las condiciones, dado que los números entre 1000 y 1999 siempre tienen al menos un dígito impar. Vemos que solamente cumplen las condiciones 2000 y 2006. En total, tenemos $2 + 7 + 5 + 16 + 12 + 2 = 44$ páginas marcadas con ambos colores.

Problema 2. (Niveles I y II) Matilda dibuja 12 cuadriláteros. El primer cuadrilátero que dibuja es un rectángulo de lados enteros y 7 veces más ancho que alto. Cada vez que termina de dibujar un cuadrilátero, une los puntos medios de cada pareja de lados consecutivos con segmentos de recta para así obtener el siguiente cuadrilátero. Se sabe que el último cuadrilátero que dibuja Matilda es el primero en tener área menor que 1. ¿Cuál es el área máxima posible del primer cuadrilátero?



Nota: La figura anterior muestra los primeros dos cuadriláteros que dibuja Matilda.

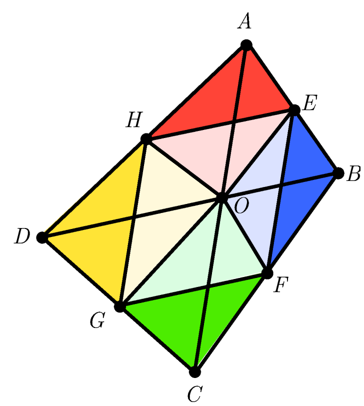
Solución. Denotemos por Área(C) al área del cuadrilátero C y, por $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$, a los 12 cuadriláteros en el orden en que los dibuja Matilda.

a) Primero veamos que al tomar los puntos medios de los lados, el área del cuadrilátero C_i es siempre la mitad del área del cuadrilátero C_{i-1}, esto es,

$$\text{Área}(C_i) = \frac{\text{Área}(C_{i-1})}{2}.$$

Sean A, B, C y D los vértices del cuadrilátero C_{i-1} y, sean E, F, G y H, los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Entonces, E, F, G y H son los vértices del cuadrilátero C_i. Sea O la intersección de las diagonales BD y AC.

Como H es punto medio de AD y E es punto medio de AB, los segmentos HE y DB son paralelos. Además, la altura desde A a HE es igual a la distancia (perpendicular) entre HE y DB. Luego, Área$(AHE) =$ Área(OHE).



Análogamente, obtenemos que

$$\text{Área}(BEF) = \text{Área}(OEF),$$
$$\text{Área}(CFG) = \text{Área}(OFG),$$
$$\text{Área}(DGH) = \text{Área}(OGH).$$

Por lo tanto, el área del cuadrilátero $EFGH$ es la mitad del área del cuadrilátero $ABCD$.

b) Utilizando lo anterior repetidamente y el hecho de que Área$(C_1) = 7n^2$, obtenemos que Área$(C_{12}) = \frac{\text{Área}(C_1)}{2^{11}} = \frac{7n^2}{2^{11}} < 1$ y Área$(C_{11}) = \frac{\text{Área}(C_1)}{2^{10}} = \frac{7n^2}{2^{10}} \geq 1$. Luego,

$$12^2 < \frac{1024}{7} = \frac{2^{10}}{7} \leq n^2 < \frac{2^{11}}{7} = \frac{2048}{7} < 18^2.$$

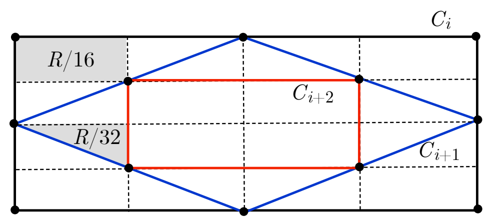
Es decir, los valores posibles de n son $13, 14, 15, 16$ y 17.

Por lo tanto, el área máxima posible del primer cuadrilátero es $7 \cdot 17^2 = 2023$.

Segunda solución. Los cuadriláteros de Matilda se alternan entre rectángulos y rombos. Veamos que en cada paso, se reduce el área del cuadriátero a la mitad. Para esto es suficiente demostrar que si i es impar y R es el área del rectángulo C_i, entonces el rombo C_{i+1} tiene área $\frac{R}{2}$ y el rectángulo C_{i+2} tiene área $\frac{R}{4}$.
Dividiendo los lados del rectángulo C_i, podemos dividir a C_i en 16 rectángulos congruentes (como se muestra en la siguiente figura) y, por lo tanto, de área $\frac{R}{16}$ cada uno.

Como utilizamos puntos medios para obtener los siguientes cuadriláteros, los vértices del rombo C_{i+1} y del rectángulo C_{i+2} coinciden con vértices de estos 16 rectángulos. Los lados del rombo C_{i+1} dividen 8 de estos rectángulos a la mitad, creando triángulos de área $\frac{R}{32}$. El rombo C_{i+1} queda dividido en 8 triángulos de área $\frac{R}{32}$ cada uno y 4 rectángulos de área $\frac{R}{16}$ cada uno. Por lo tanto,

$$\text{Área}(C_{i+1}) = 8 \cdot \frac{R}{32} + 4 \cdot \frac{R}{16} = \frac{R}{4} + \frac{R}{4} = \frac{R}{2}.$$



El rectángulo C_{i+2} queda dividido en 4 rectángulos de área $\frac{R}{16}$ cada uno. Por lo tanto,

$$\text{Área}(C_{i+2}) = 4 \cdot \frac{R}{16} = \frac{R}{4}.$$

El resto de esta solución es igual a la segunda parte de la primera solución.

Problema 3. (Niveles I y II) Un país llamado Máxico tiene dos islas, la isla Mayor y la isla Menor. La isla Mayor está compuesta por $k > 3$ estados, con exactamente $n > 3$ ciudades cada uno, de manera que tiene kn ciudades en total. La isla Menor tiene solo un estado, el cual tiene 31 ciudades. Dos aerolíneas de alto renombre, *Aeropapantla* y *Aerocenzontle*, ofrecen vuelos alrededor de Máxico. Aeropapantla ofrece vuelos directos desde cualquier ciudad hasta cualquier otra ciudad de Máxico. Aerocenzontle sólo ofrece vuelos directos desde cualquier ciudad de la isla Mayor hasta cualquier otra ciudad de la isla Mayor.
Cada aerolínea calcula qué porcentaje de sus propios vuelos directos conectan dos ciudades que se encuentran en el mismo estado. Así, se calcularon dos porcentajes en total, uno por cada aerolínea. Si sabemos que ambas aerolíneas obtuvieron el mismo porcentaje, ¿cuál es el menor número de ciudades que puede haber en la isla Mayor?

Solución. Aeropapantla ofrece un total de $(kn + 31)(kn + 30)$ vuelos directos, de los cuales $kn(n - 1) + 31 \cdot 30$ son entre ciudades del mismo estado. Aerocenzontle ofrece un total de $kn(kn - 1)$ vuelos directos, de los cuales $kn(n - 1)$ son entre ciudades del mismo estado. Como sabemos que los porcentajes de vuelos directos que conectan ciudades del mismo estado son iguales para las dos aerolíneas, tenemos que

$$\frac{kn(n-1) + 31 \cdot 30}{(kn + 31)(kn + 30)} = \frac{kn(n-1)}{kn(kn-1)},$$

esto es,

$$kn(kn-1)\Big(kn(n-1) + 31 \cdot 30\Big) = kn(n-1)(kn + 31)(kn + 30).$$

Sea $N = nk$ el número de ciudades en la isla Mayor. Entonces,

$$(N-1)(N(n-1) + 31 \cdot 30) = (n-1)(N + 31)(N + 30).$$

Expandiendo y agrupando por potencias de N, obtenemos que

$$N^2(n-1) + N(930 - n + 1) - 930 = N^2(n-1) + 61N(n-1) + 930(n-1),$$

de donde, $N(992 - 62n) = 930n$.
Sustityuendo $N = kn$ y dividiendo por 62, tenemos que $k(16 - n) = 15$, lo cual implica que k es un divisor positivo de 15. Como $k > 3$, hay dos opciones: $k = 5$ o $k = 15$. Si $k = 5$, entonces $n = 13$ y $N = 65$. Si $k = 15$, entonces $n = 15$ y $N = 225$. Por lo tanto, el menor número de ciudades que puede haber en la isla Mayor es 65.

Problema 4. (Nivel II) Se tiene una función g tal que para todo entero n:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 1, \\ \\ 0 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

También se tiene una función f que cumple lo siguiente para todos los enteros $n \geq 0$ y $m \geq 0$: $f(0, m) = 0$ y

$$f(n+1, m) = \Big(1 - g(m) + g(m) \cdot g(m - 1 - f(n, m))\Big)\Big(1 + f(n, m)\Big).$$

Encuentra todas las posibles funciones f que cumplen estas condiciones. Es decir, encuentra todas las asignaciones $f(m, n)$ que cumplen las propiedades de arriba para todos los enteros $n \geq 0$ y $m \geq 0$.

Solución. Demostraremos que la función f satisface $f(n, 0) = n$ cuando $m = 0$ y es la función residuo cuando $m > 0$, esto es, es la función que nos da el residuo de dividir el primer argumento por el segundo.
Primero demostraremos que $f(n, 0) = n$ para todo entero $n \geq 0$.
Por la definición de f, tenemos que

a) $f(0, 0) = 0$.

b) $f(n + 1, 0) = [1 - g(0) + g(0) \cdot g(-1 - f(n, 0))] [1 + f(n, 0)] = 1 + f(n, 0)$, para todo $n \geq 0$.

Por lo tanto, por inducción podemos ver que $f(n + 1, 0) = 1 + n$, si $f(n, 0) = n$.
Ahora demostraremos que $f(n, 1) = 0$ para todo entero $n \geq 0$. Comenzando con $f(0, 1) = 0$ y notando que, si $f(n, 1) = 0$, entonces por inducción obtenemos que

$$\begin{aligned} f(n + 1, 1) &= [1 - g(1) + g(1) \cdot g(-f(n, 1))] \cdot [1 + f(n, 1)] \\ &= g(-f(n, 1)) \cdot [1 + f(n, 1)] \\ &= g(-0) \cdot [1 + 0] = 0. \end{aligned}$$

Por último, demostraremos que $f(n, m) = r$, donde $0 \leq r \leq m - 1$ cumple que m divide a $n - r$, para todo $n \geq 0$ entero y $m \geq 2$ entero.
Como $g(m) = 1$, para $m \geq 2$, tenemos que la expresión $f(n + 1, m)$ se simplifica de la siguiente manera:

$$f(n + 1, m) = g(m - 1 - f(n, m)) \cdot [1 + f(n, m)] \,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f(0,m) &= 0,\\
f(1,m) &= g(m-1-f(0,m))\cdot[1+f(0,m)] = g(m-1) = 1,\\
f(2,m) &= g(m-1-f(1,m))\cdot[1+f(1,m)] = g(m-2)(1+1) = 2,\\
&\vdots\\
f(m-1,m) &= g(1)\cdot[1+f(m-2,m)] = 1\cdot[1+m-2] = m-1,\\
f(m,m) &= g(0)\cdot[1+f(m-1,m)] = 0\cdot[1+m-1] = 0.
\end{aligned}$$

Como la condición de f que da el valor de $f(n+1,m)$ es una fórmula recursiva que solo depende de $f(n,m)$, podemos argumentar que se ha formado un ciclo de tamaño m. Esto ocurre, por ejemplo, de la siguiente manera

$$f(n+km,m) = f(n,m) \quad\Rightarrow\quad f(n+1+km,m) = f(n+1,m).$$

Concluimos entonces que $f(r+km,m) = f(r,m)$ para todo $0\leq r\leq m-1$ y, por lo tanto, f es la función residuo siempre que $m>0$.

Segunda solución. Demostraremos que la función f está definida por

$$f(n,m) = \begin{cases} n & \text{si } m = 0,\\ \\ r & \text{si } m > 0,\end{cases}$$

donde r es el residuo de dividir n entre m.
Formalmente, r es definido utilizando el algoritmo de la división: existen enteros únicos q y r tales que $n = mq + r$ y $0\leq r < m$. *Nota:* Es común escribir $r = n \bmod m$. La demostración es por inducción sobre n (para todo $m\geq 0$). La base de inducción es equivalente a la condición $f(0,m) = 0$ dada en el problema, pues $f(0,0) = 0$ y el residuo de dividir 0 entre cualquier $m>0$ es 0. Para el paso inductivo, supongamos que el resultado es cierto para alguna $n\geq 0$ y escribimos $n = mq + r$ para enteros q y $0\leq r < m$.

- Si $m = 0$ entonces

$$f(n+1,0) = [1-g(0)+g(0)g(-1-f(n,0))]\cdot[1+f(n,0)] = 1+f(n,0) = n+1.$$

- Si $m>0$, entonces

$$\begin{aligned}
f(n+1,m) &= [1-g(m)+g(m)g(m-1-f(n,m)]\cdot[1+f(n,m)]\\
&= g(m-1-r)\cdot(r+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = m-1,\\ \\ r+1 & \text{si } 0\leq r\leq m-2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Lo que obtuvimos arriba es igual al residuo de dividir $n+1$ entre m pues

- el residuo de dividir $n+1$ entre m es 0 si $r = m-1$, porque $n+1 = m(q+1)+0$;
- el residuo de dividir $n+1$ entre m es $0 \leq r+1 < m$ siempre que $0 \leq r \leq m-2$, porque $n+1 = mq + (r+1)$.

Esto concluye la demostración.

Segundo día

Problema 5. (Nivel I) Mía tiene 2 palitos verdes de 3 cm cada uno, 2 palitos azules de 4 cm cada uno y 2 palitos rojos de 5 cm cada uno. Mía quiere formar un triángulo utilizando los 6 palitos como su perímetro, todos a la vez y sin encimarlos, doblarlos o romperlos. ¿Cuántos triángulos no congruentes puede formar?
Nota: Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen las mismas medidas. No importa el orden en que los palitos se usen para formar los lados, solo la medida de los lados formados.

Solución. Se pueden formar 10 triángulos no congruentes. Sea T uno de los triángulos y supongamos que tiene lados de longitudes a, b y c, tales que $3 \leq a \leq b \leq c$. El perímetro de T es $a+b+c = 3+3+4+4+5+5 = 24$. También sabemos que los lados satisfacen la desigualdad del triángulo, $a+b > c$, por lo que el lado más largo satisface $8 = \frac{24}{3} \leq c < \frac{24}{2} = 12$. Como los lados tienen longitudes enteras, se sigue que $c \in \{8, 9, 10, 11\}$.
Las ternas de enteros (a, b, c) que satisfacen todas estas condiciones son:

$$(8,8,8), (6,9,9), (7,8,9), (4,10,10), (5,9,10), (6,8,10), (7,7,10), (3,10,11),$$

$$(4,9,11), (5,8,11), (6,7,11).$$

Todas son realizables como triángulos usando los 6 palitos excepto la terna $(6, 7, 11)$, pues el lado de longitud 6 necesita utilizar los dos palitos verdes pero entonces el lado de longitud 7 ya no se puede formar. Las otras 10 ternas se realizan así:

$$\begin{aligned}
(8,8,8) &= (3+5, 3+5, 4+4), & (6,9,9) &= (3+3, 4+5, 4+5),\\
(7,8,9) &= (3+4, 3+5, 4+5), & (4,10,10) &= (4, 3+4+4, 5+5),\\
(5,9,10) &= (5, 4+5, 3+3+4), & (6,8,10) &= (3+3, 4+4, 5+5),\\
(7,7,10) &= (3+4, 3+4, 5+5), & (3,10,11) &= (3, 5+5, 3+4+4),\\
(4,9,11) &= (4, 4+5, 3+3+5), & (5,8,11) &= (5, 3+5, 3+4+4).
\end{aligned}$$

Segunda solución. Como en la primera solución, tenemos que el perímetro del triángulo es 24, lo cual implica que cada lado tiene longitu a lo más 11. Luego, cada lado utiliza a lo más 3 palitos y, por lo que tenemos dos posibilidades.
a) Los tres lados ulilizan un número diferente de palitos: 1, 2, y 3.
b) Cada lado utiliza 2 palitos.

a) El lado formado por los 3 palitos solo puede ser de longitud $10 = 3 + 3 + 4$ y $11 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4$. Esto genera las ternas

$$
\begin{aligned}
&(3+3+4, 4+5, 5) = (10, 9, 5),\\
&(3+3+4, 5+5, 4) = (10, 10, 4),\\
&(3+3+5, 4+5, 4) = (11, 9, 4),\\
&(3+3+5, 4+4, 5) = (3+4+4, 3+5, 5) = (11, 8, 5)\\
&(3+4+4, 5+5, 3) = (10, 10, 3).
\end{aligned}
$$

Estas 5 ternas cumplen la desigualdad del triángulo, por lo que generan 5 triangulos no congruentes.

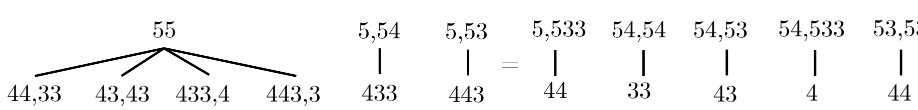
b) Las ternas que podemos formar que corresponden a triángulos con 2 palitos por lado son:

$$
\begin{aligned}
&(5+5, 4+4, 3+3) = (10, 8, 6),\\
&(5+5, 4+3, 4+3) = (10, 7, 7),\\
&(5+4, 5+4, 3+3) = (9, 9, 6),\\
&(5+3, 5+3, 4+4) = (8, 8, 8),\\
&(5+4, 5+3, 4+3) = (9, 8, 7).
\end{aligned}
$$

Estas 5 ternas cumplen la desigualdad del triángulo, por lo que generan 5 triángulos no congruentes.

Por lo tanto, en total hay 10 triángulos no congruentes.

Tercera solución. Podemos dibujar un diagrama de posibilidades, generado por las formas de colocar a los palitos rojos. Como las ternas satisfacen la desigualdad del triángulo, no puede haber dos lados de longitud 5 cada uno. Más aún, si 2 palitos rojos son parte del mismo lado, entonces ya no hay más palitos en ese lado. Los lados que se pueden formar utilizando al menos un palito rojo son: $5+5 = 10, 5, 5+4 = 9, 5+3 = 8$ y $5 + 3 + 3 = 11$. Las 10 ternas que generan triángulos no congruentes se muestran a continuación, donde utilizamos $55, 5, 54, 53$ y 533 para denotar estos lados.



Problema 6. (Niveles I y II) Alka encuentra escrito en un pizarrón un número n que termina en 5. Realiza una secuencia de operaciones con el número en el pizarrón. En cada paso, decide realizar una de las dos operaciones siguientes:

1) Borrar el número escrito m y escribir su cubo m^3.

2) Borrar el número escrito m y escribir el producto $2023m$.

Alka realiza cada operación un número par de veces en algún orden al menos una vez, y obtiene finalmente el número r. Si la cifra de las decenas de r es un número impar, encuentra todos los valores posibles que la cifra de las decenas de n^3 pudo haber tenido.

Solución. Empezamos por demostrar que si m termina en 5, entonces m^3 y $2023m$ ambos terminan en 5. En efecto, supongamos que m es un número que termina en 5, esto es, $m = 10k+5$ para algún entero k. Más aún, la paridad de la cifra de las decenas de m es precisamente la paridad de k. Demostraremos que la paridad de la cifra de las decenas se mantiene al realizar la operación 1) y cambia al realizar la operación 2).

a) Aplicando la operación 1) a m tenemos que

$$\begin{aligned}(10k+5)^3 &= 1000k^3 + 3 \cdot 100k^2 \cdot 5 + 3 \cdot 10k \cdot 25 + 125 \\ &= 100(10k^3 + 15k^2 + 7k + 1) + 10(5k+2) + 5.\end{aligned}$$

Entonces, la cifra de las decenas de m^3 es $5k+2 \pmod{10}$, el cual es igual a 2 (par) si k es par e igual a 7 (impar) si k es impar.

b) Aplicando la operación 2) a m tenemos que

$$2023(10k+5) = 20230k + 10115 = 100(202k + 101) + 10(3k+1) + 5.$$

Entonces, la cifra de las decenas de $2023m$ es $3k+1 \pmod{10}$, el cual es igual a $1, 7, 3, 9$ o 5 (impar) si k es par y termina en $0, 2, 4, 6$ u 8 respectivamente, e igual a $4, 0, 6, 2$ u 8 (par) si k es impar y termina en $1, 3, 5, 7$ o 9 respectivamente.

Como Alka realizó cada operación un número par de veces, la paridad de la cifra de las decenas fue cambiada un par de veces, volviendo a la paridad de la cifra de las decenas del número que Alka encontró escrito inicialmente en el pizarrón. Luego, tanto el número resultante como n, tienen como cifra de las decenas a un número impar. Habíamos visto anteriormente que la cifra de las decenas de n^3 es igual a 7 si n termina en 5 y su cifra de las decenas es impar. Por lo tanto, concluimos que la cifra de las decenas de n^3 es 7.

Problema 7. (Niveles I y II) Supongamos que a y b son números reales tales que $0 < a < b < 1$. Sean

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b+a}}, \qquad y = \frac{1}{b-a} - \frac{1}{b} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{1}{\sqrt{b-a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Muestra que x, y y z quedan siempre ordenados de menor a mayor de la misma manera, independientemente de la elección de a y b. Encuentra dicho orden entre x, y y z.

Solución. Demostraremos que $x < z < y$. Para esto, es suficiente demostrar que $x < z$ y que $z < y$.
Por la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{b+a}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\Big) \geq \sqrt{\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}}.$$

Por otro lado, como $b^2 - a^2 < b^2$, resulta que $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} > \frac{1}{b}$ y, por consiguiente,

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}} > \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{b+a}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right) > \frac{2}{\sqrt{b}}.$$

Reacomodando, concluimos que

$$z = \frac{1}{\sqrt{b-a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} > \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b+a}} = x.$$

Para demostrar que $z < y$, tenemos que $0 < 1 - \sqrt{b} < 1 - \sqrt{b-a}$ y $b > b - a > 0$. Por lo tanto,

$$\frac{1-\sqrt{b}}{b} < \frac{1-\sqrt{b-a}}{b-a},$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{1}{b-a} - \frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

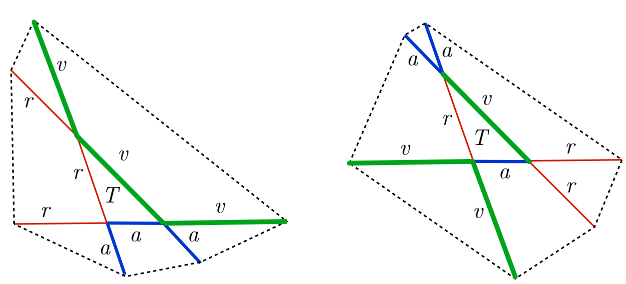
Reacomodando los términos, obtenemos que

$$z = \frac{1}{\sqrt{b-a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} < \frac{1}{b-a} - \frac{1}{b} = y.$$

Otra forma de demostrar que $z < y$. Como $0 < a < b < 1$, resulta que $\sqrt{b-a} < \sqrt{b} < 1$, lo cual implica que $\frac{1}{\sqrt{b-a}} > 1$ y $\frac{1}{\sqrt{b}} > 1$. Luego, $\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} > 2 > 1$ y, por lo tanto,

$$z = \frac{1}{\sqrt{b-a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} < \left(\frac{1}{\sqrt{b-a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{b-a} - \frac{1}{b} = y.$$

Problema 8. (Nivel II) Se tienen 9 palitos de madera: 3 azules de longitud a cada uno, 3 rojos de longitud r cada uno y 3 verdes de longitud v cada uno, tales que es posible formar un triángulo T con palitos de colores todos distintos. Dana puede formar dos arreglos, comenzando con T y utilizando los otros seis palitos para prolongar los lados de T, como se muestra en la figura. De esta manera, se pueden formar dos hexágonos cuyos vértices son los extremos de dichos seis palitos. Demuestra que ambos hexágonos tienen la misma área.

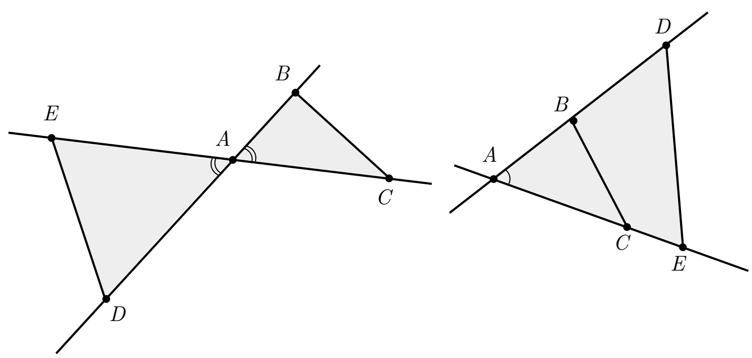


Nota: La figura de arriba solo indica la configuración que forma Dana, no el tamaño exacto de los palitos. Se podrían formar más arreglos distintos con los palitos, pero solo consideramos los dos que muestra la figura.

Solución. Sea t el área del triángulo T. Mostraremos que el área de ambos hexágonos es

$$h = t\left(\frac{(a+r+v)(a^2+r^2+v^2)}{abc} + 4\right).$$

Para determinar h usaremos la siguiente observación: Supongamos que los puntos A, B, D son colineales y los puntos A, C, E son colineales, de tal forma que $\angle BAC$ y $\angle EAD$ son exactmanente el mismo o son opuestos por el vértice A.



Entonces, los triángulos ABC y ADE satisfacen que

$$\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(ADE)} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\angle BAC)(AB\cdot AC)}{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\angle EAD)(AD\cdot AE)} = \frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}.$$

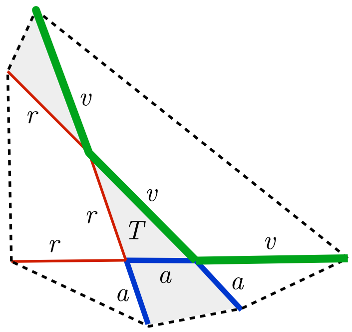
Si el triángulo ADE es el formado por los tres palitos diferentes, entonces

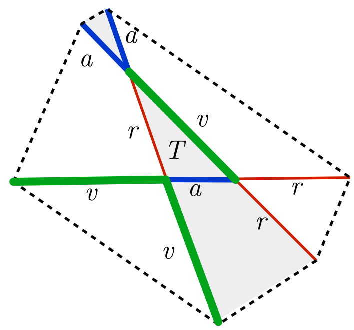
$$\text{Área}(ADE) = t\left(\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}\right).$$

Utilizamos esta observación con los pares de triángulos opuestos por cada vértice del triángulo T del centro. Por ejemplo, el área de la región sombreada de la siguiente figura es igual a $t\cdot\frac{rv+(r+a)(v+a)}{rv}$ en el primer hexágono y, es igual a $t\cdot\frac{a^2+(r+v)^2}{rv}$, en el segundo hexágono.

Haciendo esto para cada vértice de T y sumando, contamos el área de T tres veces, y todas las otras regiones de los hexágonos exactamente una vez. Por esto mismo, restamos t dos veces a nuestra suma para obtener el área total de cada hexágono. De este modo, para el primer hexágono el área se calcula como

$$\begin{aligned} &t\left(\frac{rv+(r+a)(v+a)}{rv} + \frac{va+(v+r)(a+r)}{va} + \frac{ar+(a+v)(r+v)}{ar} - 2\right)\\ =&t\left(\frac{3arv+(a^2+r^2+v^2)(a+r+v)}{arv} + 1\right) = t\left(\frac{(a^2+r^2+v^2)(a+r+v)}{arv} + 4\right). \end{aligned}$$





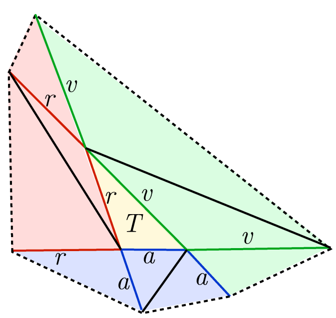
y, para el segundo hexágono, el área es

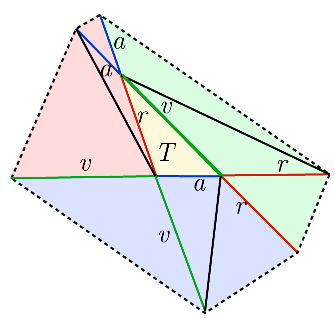
$$
\begin{aligned}
&t\left(\frac{a^2+(r+v)^2}{rv}+\frac{r^2+(v+a)^2}{va}+\frac{v^2+(a+r)^2}{ar}-2\right)\\
=&t\left(\frac{(a^2+r^2+v^2)(a+r+v)+3arv}{arv}+1\right)=t\left(\frac{(a^2+r^2+v^2)(a+r+v)}{arv}+4\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el área de ambos hexágonos es

$$
h=t\left(\frac{(a^2+r^2+v^2)(a+r+v)}{arv}+4\right).
$$

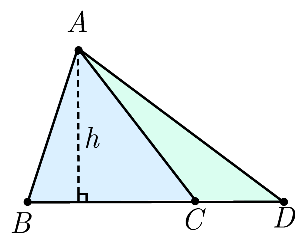
Segunda solución. Dividamos cada uno de los hexágonos en cuatro regiones como se muestra en la figura, donde una de ellas es el triángulo T.





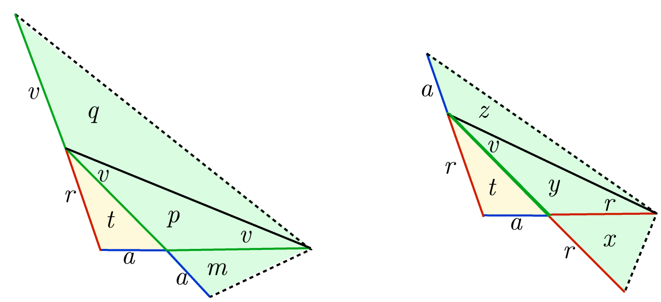
Para calcular el área de cada región, utilizaremos la siguiente observación: *Si dos triángulos comparten una altura, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases correspondientes*. Por ejemplo, como los triángulo ABC y ACD en la siguiente figura comparten la altura vertical de longitud h, tenemos que

$$
\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(ACD)}=\frac{BC\cdot h/2}{CD\cdot h/2}=\frac{BC}{CD}.
$$



Empecemos con una de las regiones del primer hexágono mostrada en la siguiente figura junto con el triángulo T (izquierda). La región está subdividida en 3 subregiones de áreas m, p y q. Como en la primera solución, t denota el área del triángulo T. Entonces, $\frac{m}{p} = \frac{a}{v}$, $\frac{p}{t} = \frac{v}{a}$ y $\frac{q}{p+t} = \frac{v}{r}$, por lo que $p = \frac{tv}{a}$ y

$$m + p + q = p \cdot \frac{a}{v} + p + p \cdot \frac{v}{r} + t \cdot \frac{v}{r} = t + t \cdot \frac{v^2(r+v+a)}{arv}.$$



De forma simétrica, las otras dos regiones tienen áreas iguales a $t + t\left(\frac{r^2(r+v+a)}{arv}\right)$ y $t + t\left(\frac{a^2(r+v+a)}{arv}\right)$. Junto con el triángulo T, el área total del primer hexágono es igual a

$$\begin{aligned} h_1 &= 4t + t\left(\frac{v^2(r+v+a)}{arv} + \frac{r^2(r+v+a)}{arv} + \frac{a^2(r+v+a)}{arv}\right) \\ &= t\left(4 + \frac{(a^2+r^2+v^2)(a+r+v)}{arv}\right). \end{aligned}$$

Ahora, nos fijamos en una región del segundo hexágono junto con el triángulo T y la subdividimos en 3 regiones de áreas x, y y z, como se muestra en la figura anterior (derecha). En este caso tenemos que $\frac{x}{y} = \frac{r}{v}$, $\frac{y}{t} = \frac{r}{a}$ y $\frac{z}{y+t} = \frac{a}{r}$, por lo que $y = \frac{tr}{a}$ y

$$x+y+z = y \cdot \frac{r}{v} + y + y \cdot \frac{a}{r} + t \cdot \frac{a}{r} = t \cdot \frac{r^2}{av} + t \cdot \frac{r}{a} + t + t \cdot \frac{a}{r} = t + t \cdot \frac{r^3 + r^2 v + a^2 v}{arv}.$$

De forma simétrica, las otras dos regiones tienen áreas iguales a $t + t\left(\frac{v^3+v^2a+r^2a}{arv}\right)$ y $t + t\left(\frac{a^3+a^2r+v^2r}{arv}\right)$. Junto con el triángulo T, el área total del segundo hexágono es igual a

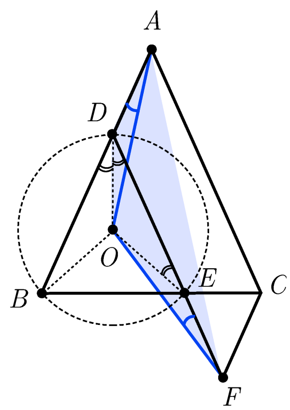
$$\begin{aligned}h_2 &= 4t + t\left(\frac{r^3+r^2v+a^2v}{arv} + \frac{v^3+v^2a+r^2a}{arv} + \frac{v^3+v^2a+r^2a}{arv}\right)\\ &= t\left(4 + \frac{(a^2+r^2+v^2)(a+r+v)}{arv}\right).\end{aligned}$$

Concluimos, notando que $h_1 = h_2$, esto es, los dos hexágonos tienen la misma área.

Prueba por Equipos, Niveles I y II

Problema 1. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y, sean D y E, puntos sobre los segmentos AB y BC, respectivamente, tales que las rectas DE y AC son paralelas. Se considera el punto F sobre la prolongación de DE de manera que $CADF$ sea un paralelogramo. Si O es el circuncentro del triángulo BDE, demuestra que los puntos O, F, A y D están sobre una misma circunferencia.

Solución. Primero notemos que el triángulo EFC es semejante al triángulo BAC y, por lo tanto, es isósceles, lo cual podemos ver por el criterio AA. Entonces, utilizando el paralelogramo $CADF$ y este triángulo isósceles tenemos que $DA = CF = EF$.

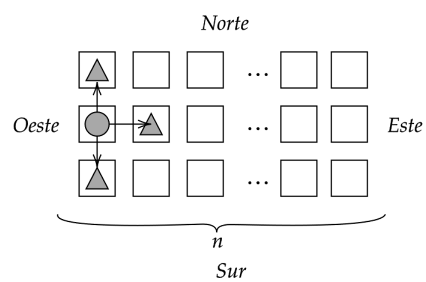


Como O es el circuncentro del triángulo BDE, tenemos que $OD = OE$. También, por ser O circuncentro del triángulo isósceles BDE, tenemos que $\angle ODB = \angle ODE$, lo cual es igual a $\angle OED$. Por lo tanto, por ser ángulos suplementarios correspondientes, tenemos que $\angle ODA = \angle OEF$. Por el criterio LAL y las tres observaciones anteriores, tenemos que los triángulos ODA y OEF son semejantes. Luego, los ángulos correspondiente $\angle DAO$ y $\angle EFO = \angle DFO$ son iguales. Por lo tanto, por ángulos inscritos, concluimos que $ODAF$ es un cuadrilátero cíclico.

Segunda solución. Como $CADF$ es un paralelogramo y el triángulo ABC es isósceles, tenemos que los triángulos BDE y EFC son isósceles con $ED = DB$ y $FE =$

$FC = DA$. Esto implica que $AD \cdot AB = FE \cdot FD$, esto es, las potencias de los puntos A y F con respecto al circuncírculo del triángulo BDE son iguales y, por lo tanto, $AO = FO$. Luego, por el criterio LLL, los triángulos ODA y OEF son semejantes, de donde se sigue que $\angle DAO = \angle EFO$ y, por consiguiente, $ODAF$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 2. En la ciudad de *Las Cobayas* las casas están distribuidas formando un arreglo rectangular de 3 filas y $n \geq 2$ columnas, como ilustra la figura. Mich planea mudarse ahí y quiere recorrer la ciudad para visitar algunas de las casas, de modo que visite al menos una casa de cada columna y no visite una misma casa más de una vez. En su recorrido, Mich puede moverse entre casas adyacentes; es decir, después de visitar una casa, puede continuar su recorrido visitando alguna de las casas vecinas al norte, sur, este u oeste, que son máximo cuatro. La figura ejemplifica una posición de Mich (círculo) y las casas hacia las cuales puede moverse (triángulos). Sea $f(n)$ la cantidad de formas en que Mich puede hacer su recorrido iniciando en una casa de la primera columna y terminando en una casa de la última columna. Demuestra que $f(n)$ es impar.



Solución. Utilizando la simetría de la ciudad, podemos asignar a cada camino, el camino que resulta al reflejar por la fila de en medio. Es decir, los pasos se reflejan de la siguiente manera:

- Ir de la fila de arriba a la de en medio se ve reflejado como ir de la fila de abajo a la de en medio y viceversa.
- Ir de la fila de en medio a la de arriba se ve reflejado como ir de la fila de en medio a la de abajo y viceversa.
- Moverse horizontalmente en la fila de arriba se ve como el mismo movimiento pero en la fila de abajo y viceversa.
- Moverse horizontalmente en la fila de en medio se ve igual reflejado.

Esto da una biyección del conjunto de caminos a sí mismo, donde el reflejado del reflejado da el camino original, por lo que la paridad de la cantidad de caminos, es la cantidad de caminos que son puntos fijos, es decir que son su mismo reflejado. Para ser su mismo reflejado, el camino debe iniciar en la fila de en medio (de lo contrario tiene distinto punto de inicio que su reflejado) y a partir de ahí solo puede ir hacia la derecha, ya que la primera vez que vaya hacia arriba este movimiento se reflejaría hacia abajo (siendo distinto) y vivecersa. Como hay exactamente un camino que cumple esto, que es ir desde la casa de en medio en la primera columna hacia la derecha hasta la última columna y ahí terminar, entonces la paridad es 1, que es impar.

Segunda solución. Usaremos inducción. Sea $P(k)$ el hecho de que $f(n)$ y la cantidad de *caminos que inician en la fila de en medio y cuyos primeros* k *movimientos son ir a la derecha* tienen la misma paridad. Primero probamos $P(0)$.
Consideramos un camino que cumple las condiciones y lo reflejamos como en la primera solución. Si el camino original inicia en la esquina superior izquierda, el reflejado inicia en la esquina inferior izquierda. De esta manera obtenemos una biyección entre los caminos que inician en la esquina superior izquierda y los caminos que inician en la esquina inferior izquierda, por lo que la paridad de $f(n)$ es igual a la paridad de la cantidad de caminos que inician en la fila de en medio. Así, $P(0)$ queda demostrado.
Ahora, demostraremos que $P(k)$ implica $P(k+1)$ siempre que $k \leq n-2$. Asumimos que la paridad $f(n)$ es la del número de caminos que inician en la fila de en medio y cuyos primeros k movimientos son a la derecha. Consideremos uno de dichos caminos y el momento en el que se han realizado los primeros $k \leq n-2$ pasos. Hay 3 posibilidades para el siguiente: ir a la derecha, hacia arriba, o hacia abajo.
Si se va hacia arriba, sigue ir a la derecha y lo que queda es el análogo a un camino que inicia en la esquina superior izquierda de un rectángulo con $n-k+1$ columnas, pues no se puede regresar a columnas anteriores y ya se pasó por dos casillas de la columna k-ésima (de izquierda a derecha). Regresar a dicha columna implica pasar por la única casilla restante y ya no sería posible llegar a la n-ésima columna sin pasar dos veces por una misma casa.
Si se va hacia abajo, el paso siguiente es a la derecha y el resto del camino es análogo a uno que inicia en la esquina superior izquierda en un rectángulo con $n-k+1$ columnas. Como estamos contando la misma cantidad de caminos que cuando se va arriba primero (por reflexión, nuevamente), la suma de lo que contamos en estos dos primeros casos es par. Por lo tanto $f(n)$, la cantidad de caminos que comienzan en el centro y con k movimientos a la derecha y la cantidad de caminos que comienzan en el centro y con $k+1$ movimientos a la derecha, tienen todos la misma paridad, es decir $P(k+1)$ queda demostrado.
Se concluye con inducción que $P(n-1)$, es decir que $f(n)$ tiene la misma paridad que la cantidad de caminos que inician en la fila de en medio y dan los primeros $n-1$ pasos a la derecha, los cuales son 3, que es impar.

Problema 3. Encuentra todas las ternas (a, b, c) de números reales todos distintos de cero que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
a^4 + b^2c^2 &= 16a,\\
b^4 + c^2a^2 &= 16b,\\
c^4 + a^2b^2 &= 16c.
\end{aligned}
$$

Solución. Es fácil ver que a, b y c son positivos. Por ejemplo, de la primera ecuación tenemos que $a = \frac{1}{16}(a^4 + b^2c^2) > 0$ ya que b y c son distintos de cero. De manera análoga, usando la segunda y la tercera ecuación del sistema, obtenemos que $b > 0$ y $c > 0$. Como las ecuaciones del sistema son simétricas, basta considerar los siguientes tres casos.

1) $a = b = c$. En este caso, el sistema de ecuaciones se reduce a $2a^4 = 16a$, que es equivalente a la ecuación $a^3 = 8$, ya que $a \neq 0$. Entonces, tenemos la única solución $a = b = c = 2$.

2) $a = b \neq c$. En este caso, el sistema de ecuaciones se convierte en

$$\begin{aligned} a^4 + a^2c^2 &= 16a, \\ c^4 + a^4 &= 16c. \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones, obtenemos que $(a^2 - c^2)c^2 = 16(a - c)$. Como $a \neq c$, resulta que $(a+c)c^2 = ac^2+c^3 = 16$, lo cual implica que $ac^3+c^4 = 16c = c^4+a^4$. Simplificando, obtenemos que $ac^3 = a^4$, de donde, $c^3 = a^3$, esto es, $a = c$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.

3) Los tres números a, b y c son distintos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b < c$. Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos que

$$(a + b)(a^2 + b^2 - c^2) = 16.$$

Restando ahora la tercera ecuación de la segunda, obtenemos que

$$(b + c)(b^2 + c^2 - a^2) = 16.$$

Como $0 < a + b < c + b$ y $0 < a^2 + b^2 - c^2 < b^2 + c^2 - a^2$ (pues $0 < a < b < c$), se sigue que

$$16 = (a + b)(a^2 + b^2 - c^2) < (b + c)(b^2 + c^2 - a^2) = 16,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.

Concluimos que la única solución del sistema de ecuaciones es $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.

Competencia Internacional de Matemáticas 2023 (Nivel Elemental)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2023 (BIMC 2023), se llevó a cabo de forma virtual del 1 al 7 de julio de 2023 y fue organizada por Bulgaria. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de plata, 4 medallas de bronce y 6 menciones honoríficas, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvo una medalla de bronce. En la BIMC 2023, participaron 336 competidores en nivel primaria y 320 en nivel secundaria, provenientes de 31 países. La mayor parte de los países que participaron, fueron del sudeste asiático (China, Corea del Sur, Tailandia, Taiwán, Vietnam, Hong Kong, entre otros). Los únicos países de América que participaron este año fuerom Bolivia, Estados Unidos, México y Perú.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. La mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.

Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2

problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.
En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB realizada en el mes de junio de 2022.

Los resultados individuales de los equipos de Primaria en la BIMC 2023 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Distinción**	**Equipo**
Juan Carlos Barragán Domínguez	Veracruz	Participación	A
Fernando Gael Martín Barajas	Ciudad de México	Participación	A
Samuel Ramírez Venegas	Jalisco	Participación	A
Elisa María Villareal Corona	Ciudad de México	M. Honorífica	A
Axel Ahtziri Ibáñez Chávez	Zacatecas	Participación	B
Ignacio Ostos Aponte	Nuevo León	M. Honorífica	B
Sebastián Preciado Molina	Sonora	M. Honorífica	B
Niza Daniela Sierra Jasso	Coahuila	M. Honorífica	B

Los resultados individuales de los equipos de Secundaria en la BIMC 2023 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Distinción**	**Equipo**
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Bronce	A
Takumi Higashida Martínez	Ciudad de México	Participación	A
Rodrigo Saldívar Mauricio	Zacatecas	M. Honorífica	A
Luis Veudi Vivas Pérez	Quintana Roo	Plata	A
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	Bronce	B
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	Bronce	B
Woojoong Kwon	Ciudad de México	Bronce	B
Leonardo Melgar Rubí	Morelos	M. Honorífica	B

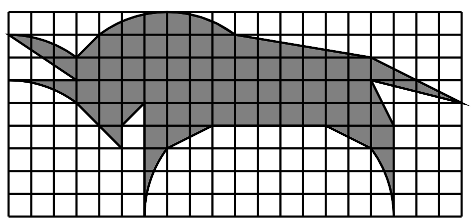
En la prueba por equipos, el equipo B de Secundaria obtuvo medalla de bronce. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo fueron: César Guadarrama Uribe (líder del Equipo A y colíder del Equipo B de Primaria), José Eduardo Cázares Tapia (líder del Equipo B y colíder del Equipo A de Primaria), Violeta Hernández Palacios (líder del Equipo A y colíder del Equipo B de Secundaria) y Leonardo Mikel Cervantes Mateos (líder del Equipo B y colíder del Equipo A de Secundaria). Los traductores de los exámenes fueron Jordi Andrés Martínez Álvarez (en

Primaria) y Héctor Flores Cantú (en Secundaria). El coordinador de México fue Hugo Villanueva Méndez.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la IMC del año 2023.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. ¿Cuál es el área, en cm^2, de la figura sombreada (en forma de toro) formada por seis arcos idénticos (llamados a, b, c, d, e, f) y quince segmentos, dado que la longitud del lado de cada cuadrito es 1 cm y cada uno de los seis arcos están en rectángulos de 1×3 o de 3×1?

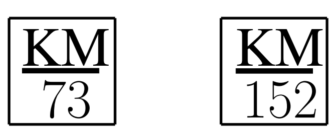


Problema 2. Treinta estudiantes de cinco grupos en una escuela, deciden unirse a la iniciativa “Dona un libro” y trajeron un total de 40 libros para la biblioteca. Estudiantes del mismo grupo trajeron la misma cantidad de libros y, estudiantes de diferentes grupos, trajeron una cantidad diferente de libros. Si cada estudiante donó al menos un libro, ¿cuántos estudiantes donaron exactamente un libro?

Problema 3. El producto de cinco enteros positivos consecutivos es 120 veces mayor que $\overline{ABABAB}$, donde A y B son dígitos diferentes de cero. ¿Cuál es el más grande de esos cinco números?

Problema 4. Un cuadrado perfecto es el cuadrado de algún entero. ¿Cuántos enteros del 1 al 2023 no son cuadrados perfectos, pero todos sus dígitos son cuadrados perfectos?

Problema 5. El Sr. Sun estaba viajando en un autobús viejo, que se movía a velocidad constante en una carretera, en la que están colocados marcadores que muestran la distancia recorrida desde el punto de inicio. En la figura se muestran dos ejemplos de dichos marcadores.



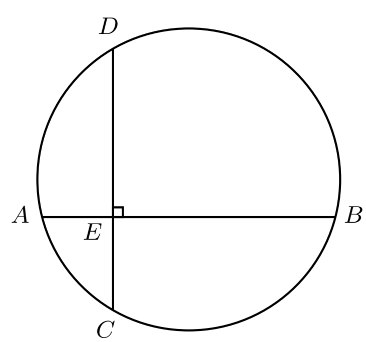
Justo antes de quedarse dormido, vio que el autobús estaba pasando un marcador de kilómetros con un número de dos dígitos. Después de exactamente una hora, el Sr. Sun abrió los ojos y vio que el autobús estaba pasando un marcador de kilómetros de tres dígitos y, recordó, que: el primer dígito era igual al segundo dígito del número que vio antes de quedarse dormido, el segundo dígito del número de tres dígitos era 0 y, el tercer dígito del número de tres dígitos, era igual al primer dígito del número que vio antes de quedarse dormido. El Sr. Sun volvió a dormir por exactamente dos horas y, al despertar, vio que el autobús estaba pasando un marcador de kilómetros con un número que era casi idéntico al segundo que vio, salvo que el segundo dígito había sido reemplazado por otro dígito. ¿Cuál era la velocidad, en km/h, del autobús?

Problema 6. ¿Cuál es la suma de todos los números de cuatro dígitos $\overline{abcd}$, con $a \neq 0$, tales que $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2023$?

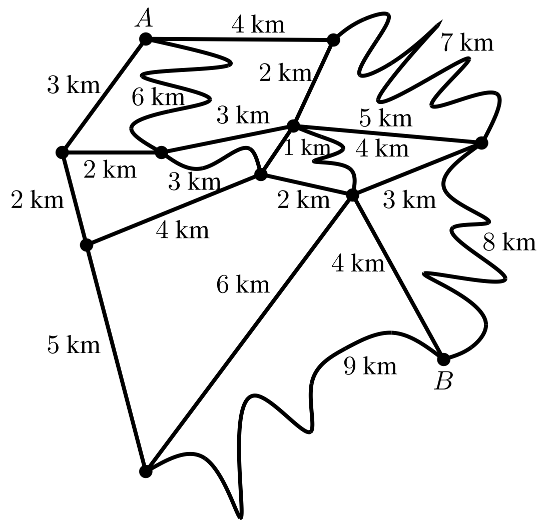
Problema 7. Alex tiene una hoja larga de papel de 6 cm de ancho y 94 cm de largo. Él quiere cortar tantos rectángulos como sea posible de esta hoja de tal forma que cada rectángulo tenga lados cuyas longitudes sean números enteros y su perímetro sea 20 cm. ¿Cuál es el mayor número de rectángulos que puede obtener?

Problema 8. Allen, Bob y Cindy viajan en un camino circular y empiezan a caminar desde la misma ubicación al mismo tiempo. Bob camina en sentido horario, mientras que Cindy y Allen caminan en sentido anti-horario. Todos caminan a velocidad constante. Después de un tiempo, Bob se encuentra con Cindy por primera vez. Tres minutos después, Bob se encuentra con Allen. Finalmente, otros 14 minutos después, Bob se encuentra con Cindy por segunda vez. Sabemos que la velocidad de Cindy es $\frac{3}{4}$ de la velocidad de Bob y que el camino circular mide 2023 metros. ¿Cuántos minutos después de que Bob se encuentra con Cindy por primera vez, se encontrará Bob con Allen por segunda vez?

Problema 9. Dos cuerdas perpendiculares en un círculo, AB y CD, se intersecan en un punto E, como se muestra en la figura. Si $AE = 28$ cm, $EB = 84$ cm y $CE = 42$ cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del círculo? (Utiliza la aproximación $\pi = \frac{22}{7}$).



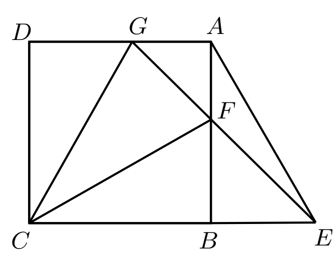
Problema 10. La figura mostrada es el mapa de todas las carreteras de una ciudad. ¿Cuál es la distancia más corta de A a B, en km, viajando solo a través de estas carreteras?



Problema 11. Cada pasajero en un tren tiene un boleto. Los boletos están enumerados con números de seis dígitos, iniciando por algún número mayor o igual que 100000. Se sabe que la cantidad de pasajeros cuyos boletos tienen un número que termina en 23, es $\frac{1}{108}$ de la cantidad total de pasajeros. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de pasajeros en el tren?

Problema 12. Se tiene una sucesión de enteros positivos. El primer término de la sucesión es 1, el segundo término es 2, el tercero es 3 y, el cuadrado de cada número, iniciando por el segundo, es igual a la suma de sus términos vecinos. Por ejemplo, para el segundo número, tenemos que $2^2 = 1 + 3$. ¿Cuál es el residuo cuando el 2023-ésimo término se divide por 11?

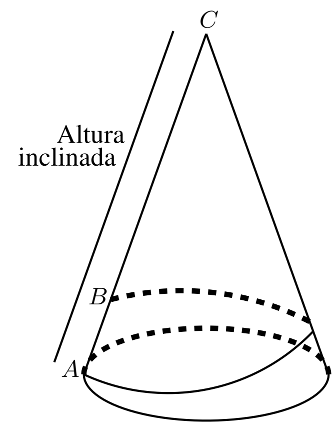
Problema 13. Sea $ABCD$ un cuadrado, tal que el punto E se encuentra en la prolongación de CB, de forma que $\angle BAE = 30°$ y, el punto G, se encuentra en AD de forma que $\angle BCG = 60°$, como se muestra en la figura. Si el área del triángulo CGF es x y el área del triángulo BEF es y, determina el valor de la razón $x : y$.



Problema 14. Cada celda de una cuadrícula de 100×100 se pinta con uno de 20 colores. Una celda se dice *solitaria* si su color es diferente del color de cada otra celda

en la misma fila y es diferente del color de cada otra celda en la misma columna. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de celdas solitarias en la cuadrícula?

Problema 15. Un cono circular con vértice C, tiene un punto A en la circunferencia de su base y un punto B en el segmento AC, como se muestra en la figura. Una soga de la menor longitud posible se enrolla una vez alrededor del cono, de tal forma que inicia en el punto A y termina en el punto B. Suponga que el diámetro de la base mide 6 cm y que la altura inclinada mide 12 cm. Si $AB = 3$ cm y D es el punto en la soga que está más cercano a C, ¿cuál es la longitud, en cm, de CD?



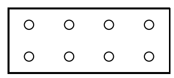
Examen por Equipos, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. Dado un hexágono regular, se construyen todos los posibles triángulos desde sus vértices. Se sabe que: Hay L posibles triángulos acutángulos, M posibles triángulos rectángulos y N posibles triángulos obtusángulos.
Dos triángulos se consideran distintos si tienen al menos un vértice diferente, aún cuando los triángulos sean congruentes. Encuentra el valor de $L \times M \times N$.

Problema 2. Alex, con solamente un billete de 20 dólares, fue a comprar comida. Mientras le entregaban su cambio, el cajero se distrajo y confundió dólares con centavos – es decir, le pagó los centavos del cambio con dólares y los dólares del cambio con centavos. Alex puso el cambio en su bolsillo sin mirarlo. Después de un rato, decide comprar una rebanada de pan. Pagó 15 centavos por la rebanada y se dio cuenta de que la cantidad que tenía ahora era el doble de lo que debería haber tenido después de pagar por la comida y la rebanada de pan (si el cajero no se hubiera equivocado). ¿Cuántos dólares y cuántos centavos era el cambio que debía recibir Alex después de comprar su comida (sin considerar la rebanada de pan)? (Nota: 1 dólar $=$ 100 centavos).

Problema 3. Dos repartidores, Alice y Bob, viajan a velocidades constantes diferentes. Alice sale del pueblo A hacia el pueblo B y, Bob, sale del pueblo B hacia el pueblo A, al mismo tiempo. Cuando se encuentran en el punto C, ambos dan la vuelta y regresan a sus puntos de partida. Después de un tiempo, Alice se da cuenta de que olvidó darle un paquete a Bob, así que da la vuelta de nuevo y alcanza a Bob a mitad del camino entre C y B. Después de entregarle el paquete, Alice da la vuelta para regresar al punto A y Bob continúa hacia B. Si la distancia entre A y B es 24 km, cuando Bob llegue al punto B, ¿cuál es la distancia, en km, entre Alice y el punto A?

Problema 4. Se tienen 8 círculos en un tablero rectangular, como se muestra en la figura. Las distancias entre cualquier par de círculos adyacentes, horizontal o verticalmente, son todas iguales. Boris quiere colorear algunos círculos de rojo. ¿De cuántas maneras puede Boris colorear algunos de los círculos, de forma tal que el tablero resultante no tenga ningún eje de simetría?



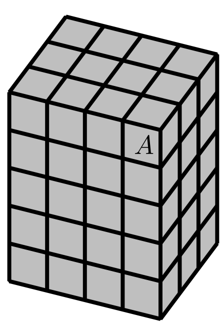
Problema 5. ¿Cuál es el entero positivo n más pequeño tal que n^2 termina en 9009?

Problema 6. El número 3 tiene las siguientes propiedades: es uno menos que un cuadrado perfecto y, cinco veces el número, es también uno menos que un cuadrado perfecto, esto es,

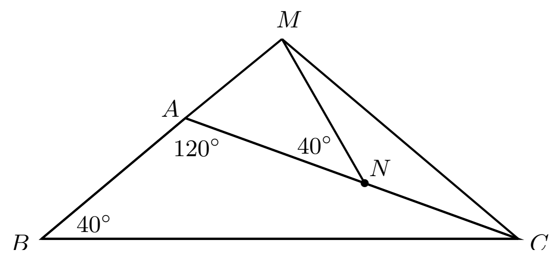
$$3 = 2^2 - 1,$$
$$5 \times 3 = 4^2 - 1.$$

24 es otro número con las mismas propiedades: $24 = 5^2 - 1$ y $5 \times 24 = 11^2 - 1$.
¿Cuál es el menor número mayor que 25 con las mismas propiedades?

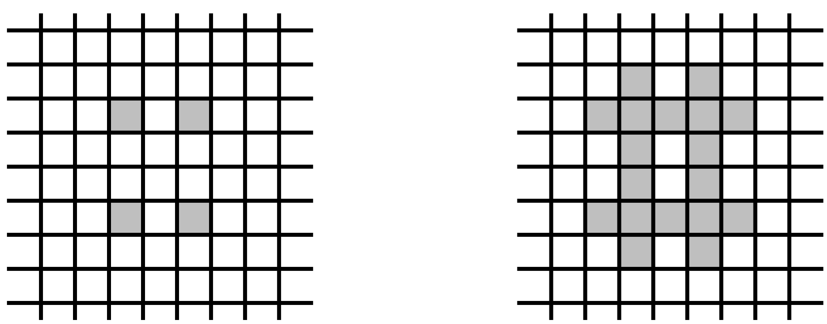
Problema 7. Un bloque de $a \times b \times c$ con $a \leq b \leq c \leq 20$, se forma con cubos unitarios. Cuando se mira desde un vértice, de tal forma que las tres caras que se intersecan en este vértice se pueden ver por completo, se pueden ver exactamente 487 cubos. ¿Cuántos cubos unitarios no son visibles? Escribe todas las respuestas posibles.
Por ejemplo, en la figura se muestra un bloque de $3 \times 4 \times 5$. Cuando se mira desde el vértice A, son visibles 36 cubos.



Problema 8. En el triángulo ABC, $\angle BAC = 120°$ y $\angle ABC = 40°$. Sea N un punto en AC tal que $AN = AB$. Sea M un punto en BA tal que $\angle ANM = 40°$, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la medida, en grados, de $\angle BMC$?

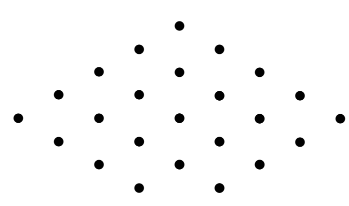


Problema 9. Un mago pinta de gris cuatro cuadritos de una cuadrícula infinita, como se muestra en la figura de la izquierda. El mago luego lanza un hechizo tal que, cada segundo, cada cuadrito que tiene al menos un lado en común con alguno de los cuadritos grises, se pinta también de gris. Por ejemplo, después de un segundo, habrá 18 cuadritos grises, como se muestra en la figura de la derecha. ¿Cuántos cuadritos grises habrá al pasar 60 segundos?



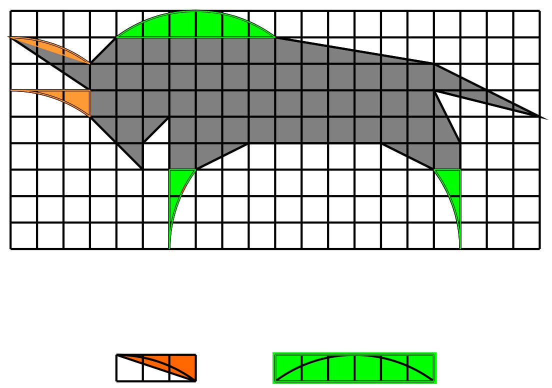
Inicio — Después de 1 segundo

Problema 10. El rombo que se muestra en la figura se forma usando 25 puntos en una red triangular. Las distancias entre cualesquiera dos puntos adyacentes es la misma. ¿Cuántos triángulos equiláteros pueden trazarse usando como vértices a tres puntos de los 25 dados?



Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. La respuesta es $64\ \mathrm{cm}^2$. Pintemos de naranja y verde las partes en las que el toro tiene curvas, como se muestra en la figura.



Juntando las dos partes naranjas, se forma un triángulo de altura 3 cm y base 1 cm, por lo que su área es de $\frac{3}{2}\ \mathrm{cm}^2$. Análogamente, uniendo las tres partes verdes, se forma un rectángulo de base 6 cm y altura 1 cm de área $6\ \mathrm{cm}^2$. Luego, el área de la región en gris es $\frac{113}{2}\ \mathrm{cm}^2$ y, por lo tanto, el área del toro es $\frac{3}{2} + 6 + \frac{113}{2} = 64\ \mathrm{cm}^2$.

Solución del Problema 2. La respuesta es 26. Tomemos a un estudiante de cada grupo. El mínimo número de libros que estos estudiantes trajeron es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Luego, los 25 alumnos restantes deben traer a lo más $40 - 15 = 25$ libros. Pero todos trajeron al menos un libro, así que estos 25 estudiantes trajeron exactamente 25 libros y, en consecuencia, cada uno trajo exactamente un libro. Por lo tanto, el número de estudiantes que trajo exactamente un libro es $1 + 25 = 26$.

Solución del Problema 3. La respuesta es 39. Sea

$$M = 120 \cdot \overline{ABABAB} = 120 \cdot 101010 \cdot \overline{AB} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{AB}.$$

Como $50^5 > 3 \cdot 10^8 > M$, todos los cinco números son menores que 50. Luego, 37 es uno de ellos, lo cual implica que todos son menores que 42. Considerando los factores 5, 7 y 13, obtenemos que 35 y 39 están también en el producto y, por lo tanto, $24 \cdot \overline{AB} = 36 \cdot 38$. Luego, $\overline{AB} = 57$ y $120 \cdot 575757 = 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39$.

Solución del Problema 4. La respuesta es 117. Los dígitos posibles para los números que queremos contar son 0, 1, 4, 9 y tales números pueden tener 1, 2, 3 o 4 dígitos. Analicemos cada caso.

a) Es imposible que los números deseados tengan un único dígito.

b) Los números deseados que tienen dos dígitos, son de la forma $\overline{ab}$. Hay 3 posibles valores para a (pues $a \neq 0$) y hay 4 posibles valores para b. Tenemos $3 \cdot 4 = 12$

números, de los cuales el 49 es excluido por ser cuadrado perfecto, esto es, tenemos 11 números en este caso.

c) Los números deseados que tienen tres dígitos son de la forma $\overline{abc}$. Hay 3 posibilidades para a, 4 para b y 4 para c. Luego, hay $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ de tales números, de los cuales 100, 144, 400, 441 y 900 son excluidos por ser cuadrados perfectos, esto es, tenemos 43 números en este caso.

d) Los números deseados que tienen cuatro dígitos son de la forma $\overline{abcd}$, con $a = 1$ (pues el número debe ser menor que 2023). Hay 4 posibilidades para b, 4 para c y 4 para d. Luego, hay $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ de tales números, de los cuales es excluido el 1444 por ser cuadrado perfecto, por lo que tenemos 63 números en este caso.

En total, tenemos $11 + 43 + 63 = 117$ números.

Solución del Problema 5. La respuesta es 45 km/hr. Si el primer número es $\overline{ab}$, entonces el segundo es $\overline{b0a}$ y el tercero es $\overline{bca}$, con $c \neq 0$. La diferencia

$$\overline{b0a} - \overline{aba} = (100b + a) - (10a + b) = 99b - 9a = 9(11b - a)$$

representa la distancia en km que el autobús ha recorrido en una hora y, por lo tanto, representa también su velocidad en km/h.
Análogamente, la diferencia $\overline{bca} - \overline{b0a} = \overline{c0} = 10c$ representa la distancia en km que el autobús ha recorrido en dos horas, así que $5c = 9(11b - a)$, lo cual implica que $9 \mid c$, por lo que $c = 9$.
Por lo tanto, en dos horas el autobús viajó $10 \cdot 9 = 90$ km y su velocidad era de 45 km/hr.

Solución del Problema 6. La respuesta es 4012. Como $\overline{abcd} \leq 2023$, tenemos que $a \leq 2$ y $a + b + c + d \leq 2 + 9 + 9 + 9 = 29$, por lo que $\overline{abcd} \geq 2023 - 29 = 1994$. Más aún, como $2 \cdot \overline{abcd} \equiv \overline{abcd} + a + b + c + d = 2023 \equiv 16 \pmod 9$, resulta que $\overline{abcd} \equiv 8 \pmod 9$. Los enteros entre 1994 y 2023 que dejan residuo 8 al dividirlos por 9 son 1997, 2006 y 2015. Es fácil ver que $1997+1+9+9+7 = 2015+2+0+1+5 = 2023$, pero $2006 + 2 + 0 + 0 + 6 = 2014 \neq 2023$, por lo que la suma buscada es $1997 + 2015 = 4012$.

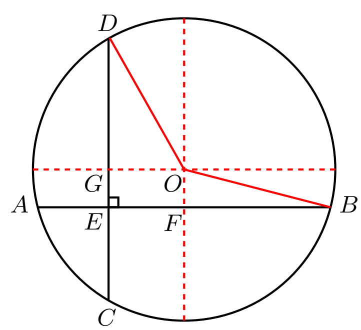
Solución del Problema 7. La respuesta es 61. Las medidas de los rectángulos con perímetro 20 son 1×9, 2×8, 3×7, 4×6, 5×5, 6×4, 7×3, 8×2 y 9×1, de los cuales los rectángulos de 1×9 y de 9×1 tienen la menor área de 9 cm^2. Como el área de la hoja es de $6 \cdot 94 = 564$ cm^2 y $564 = 9 \cdot 62 + 6$, Alex puede obtener 62 rectángulos de tamaños 1×9 o 9×1. Como $6 < 9$, no se puede obtener un rectángulo de ancho 9 cm y largo 1 cm. Además, como $94 = 9 \cdot 10 + 4$, Alex puede obtener a lo más $6 \cdot 10 = 60$ rectángulos de ancho 1 cm y largo 9 cm. Después de cortar estos 60 rectángulos, el área del papel no utilizado es de 24 cm^2, que es precisamente el área de un rectángulo de ancho 6 cm y largo 4 cm. Por lo tanto, Alex puede obtener otro rectángulo de perímetro 20 cm, haciendo un total de 61 rectángulos, de los cuales 60 son de tamaño 1×9 y uno es de tamaño 4×6.

Resta ver que 61 es el máximo número de rectángulos de perímetro 20 cm que se pueden obtener. Para ello, supongamos que Alex puede obtener 62 rectángulos. Como a lo más 60 rectángulos de 1×9 se pueden obtener, debe haber al menos dos con medidas diferentes. Pero cualquier rectángulo con medidas diferentes tiene un área de al menos $2 \cdot 8 = 16$ cm^2, por lo que el área de los 62 rectángulos es al menos $60 \cdot 9 + 2 \cdot 16 = 572$ cm^2, excediendo el área total de la hoja. Por lo tanto, es imposible obtener más de 61 rectángulos.

Solución del Problema 8. La respuesta es 23 minutos. De acuerdo con el problema, tenemos que Bob y Cindy se encuentran cada $3 + 14 = 17$ minutos. Como Bob se encuentra con Allen 3 minutos después de encontrarse con Cindy por primera vez, Bob y Allen se encuentran cada $3 + 17 = 20$ minutos. Por lo tanto, $20 + 20 - 17 = 23$ minutos después de que Bob se encuentra con Cindy por primera vez, Bob se encuentra con Allen por segunda vez.

Solución del Problema 9. La respuesta es 3185π cm$^2 \approx 10010$ cm^2. Sea O el centro de la circunferencia y, sean F y G, los pies de las perpendiculares desde O sobre AB y CD, respectivamente. Tenemos que

$$EF = AF - AE = \frac{AE + EB}{2} - AE = 28 \text{ cm}.$$



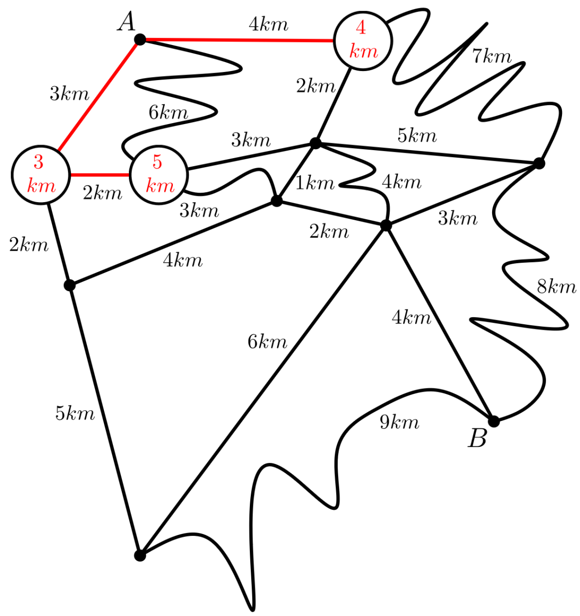
Si $GE = OF = x$ cm, entonces $DG = CG = CE + GE = 42 + x$. Como $DO = BO$ por ser radios, aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos DGO y BFO, tenemos que $DG^2 + GO^2 = BF^2 + OF^2$, esto es, $DG^2 + EF^2 = (BE - EF)^2 + OF^2$. Luego,

$$(42 + x)^2 + 28^2 = (84 - 28)^2 + x^2.$$

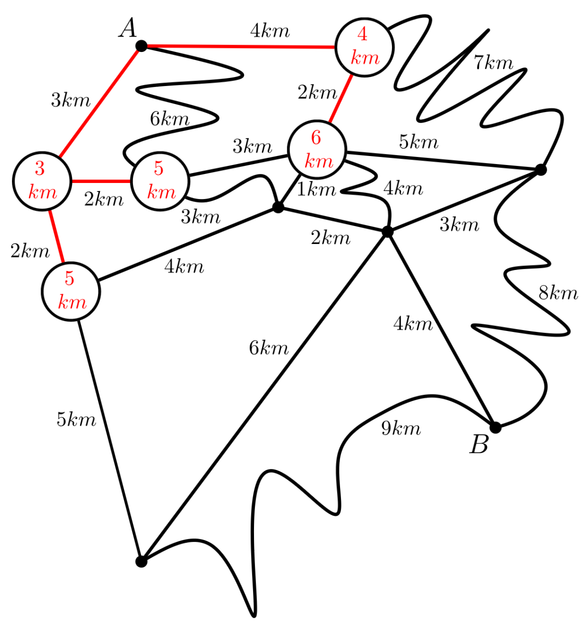
Simplificando esta ecuación, obtenemos que $84x = 588$, de donde $x = 7$. Así, $OF = 7$ cm y $BF = 56$ cm. Por lo tanto, $BO^2 = OF^2 + BF^2 = 7^2 + 56^2 = 3185$, por lo que el área del círculo es igual a $\pi \cdot BO^2 = 3185\pi$ cm$^2 \approx 10010$ cm^2.

Solución del Problema 10. La respuesta es 13 km. Para cada punto, marquemos la longitud del camino más corto desde A hasta ese punto y pintemos ese camino de color rojo.

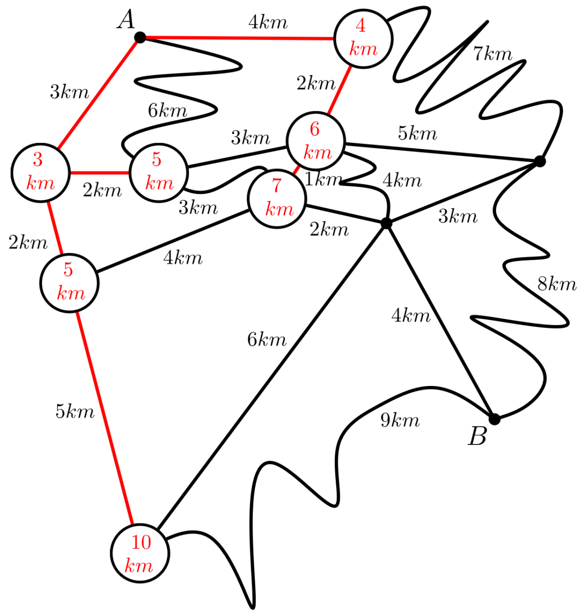
Paso (i)



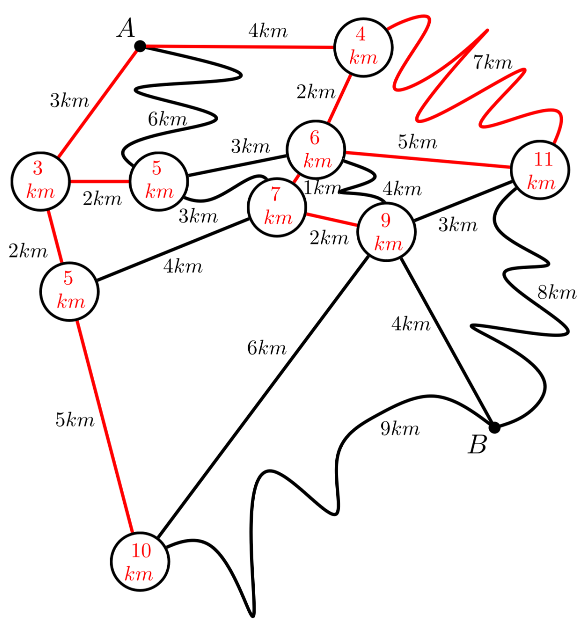
Paso (ii)



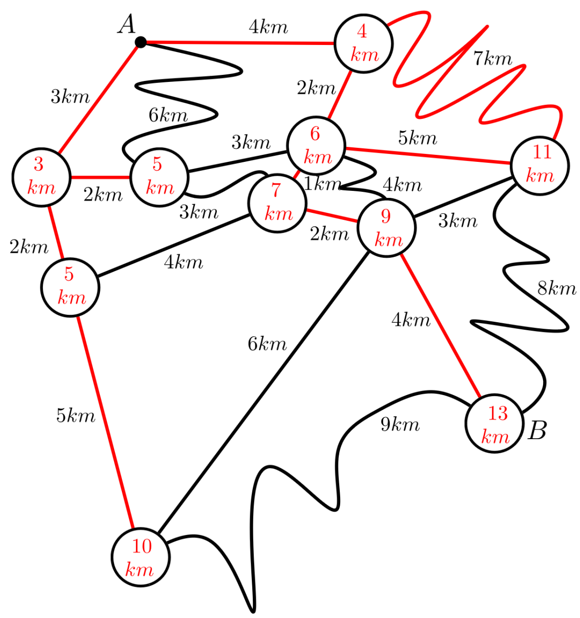
Paso (iii)



Paso (iv)



Paso (v)



Por lo tanto, el camino más corto entre A y B es de 13 km.

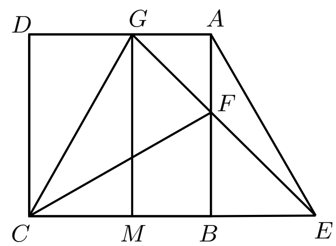
Solución del Problema 11. La respuesta es 1296. Sea K el número de pasajeros tales que los últimos dos dígitos son 23. Entonces, el número total de pasajeros es $108K$ y, entre cada 100 números consecutivos, debe haber uno que termine en 23, lo cual implica que $108K < 100(K + 1)$, de donde $K < 12.5$. Luego, el número de pasajeros es máximo cuando $K = 12$ y es igual a $108 \cdot 12 = 1296$ (por ejemplo, los números de los boletos son $100024, 100025, \ldots, 101319$, entre los cuales están $100123, 100223, \ldots, 101223$, que son 12 números cuyos últimos dos dígitos son 23).

Solución del Problema 12. La respuesta es 2. El cuarto término es $3^2 - 2 = 7$, el quinto es $7^2 - 3 = 46$ y el patrón es $1, 2, 3, 7, 46, \ldots$. Como el cuadrado de cada término es igual a la suma del término anterior y el siguiente, tenemos también que el residuo al dividir el cuadrado de cada término entre 11, es igual a la suma de los residuos al dividir entre 11 el término anterior y el siguiente, respectivamente. Por ejemplo, el residuo de 3 al dividir entre 11 es 3, el residuo de 7^2 al dividir entre 11 es 5, el residuo de 46 al dividir entre 11 es 2 y $5 = 2 + 3$. Reemplazando cada término por su residuo, obtenemos el siguiente patrón

$$1, 2, 3, 7, 2, 8, 7, 8, 2, 7, 3, 2, 1, 10, 0, 1, 1, 0, 10, 1, 2, 3, 7, 2, \ldots$$

que se repite cada 19 términos. Como $2023 = 106 \cdot 19 + 9$, el residuo del 2023-ésimo término al dividir entre 11 es el noveno término de la sucesión, que es 2.

Solución del Problema 13. La respuesta es 2. Sea M un punto sobre BC tal que GM y DC son paralelas, como se muestra en la figura.



De las hipótesis podemos concluir que los triángulos ABE y CGM tienen ángulos de 30°, 60°, 90° y que $AB = GM$. Entonces, $EB = CM = \frac{1}{2}AE$ lo cual implica que $EM = GM$.
Como BF y GM son paralelas, los triángulos EBF y EMG son semejantes, por lo que $EB = FB$. Como $FB = EB = CM$ y $GM = AB = BC$, los triángulos BCF y MGC son congruentes y, por lo tanto, tienen la misma área. Entonces,

$$(CGF) = (FBGC) - (BCF) = (FBGC) - (MGC) = (FBMG),$$

donde los paréntesis denotan área.
Como el triángulo ABE tiene ángulos de 30°, 60° y 90°, resulta que $\frac{EB^2}{AB^2} = \frac{1}{3}$, esto es, $\frac{EB^2}{GM^2} = \frac{1}{3}$. Luego, el área del triángulo BEF es $\frac{1}{3}$ del área del triángulo EMG y, por lo tanto, el área del trapecio $FBMG$ es $\frac{2}{3}$ del área del triángulo EMG, de donde se sigue que $x : y = 2 : 1 = 2$.

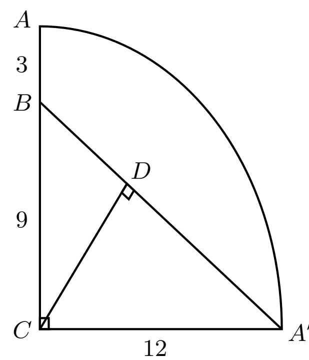
Solución alternativa. Supongamos que el lado del cuadrado mide 1 y sea $BE = t$. Los triángulos CGD y AEB son congruentes, ya que ambos tienen ángulos de 30°, 60°, 90° y $CD = AB$. Además, en el triángulo AEB tenemos que $\frac{EB^2}{AB^2} = \frac{1}{3}$, esto es, $t^2 = \frac{1}{3}$. Sea z el área del triángulo CFB. Como los triángulos GFA y EFB son semejantes (criterio AA), tenemos que

$$\frac{x}{z+y} = \frac{GF}{FE} = \frac{AG}{EB} = \frac{1-t}{t} \quad \text{y} \quad \frac{z}{y} = \frac{CB}{BE} = \frac{1}{t}.$$

Sustituyendo $z = \frac{y}{t}$ en la primera igualdad, obtenemos que $\frac{x}{y} = \frac{1-t^2}{t^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$.

Solución del Problema 14. La respuesta es 1900. No puede haber 20 celdas solitarias en una misma línea, así que en total, no podemos tener más de $19 \cdot 100$ celdas solitarias. Pintemos la celda en la fila i y columna j con el color del residuo de $i + j$ módulo 100, si el resultado está entre 1 y 19 inclusive, y del color 20 en cualquier otro caso. Como no hay dos celdas en la misma fila o columna que tengan el mismo residuo $i + j$ módulo 100, todas las celdas con colores entre 1 y 19 inclusive son solitarias. Por lo tanto, hay 19 celdas solitarias en cada fila o columna, dando un total de 1900.

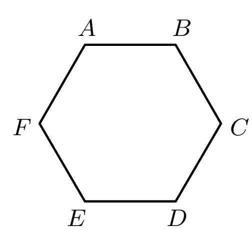
Solución del Problema 15. La respuesta es 7.2 cm. Cortemos el cono alrededor de AC y desdoblémoslo, obteniendo un sector circular.



Como el diámetro de la base del cono mide 6 cm, el arco $\widehat{AA'}$ de este sector mide $6\pi = \frac{24\pi}{4} = \frac{1}{4}(2\pi \cdot 12)$ cm. Por lo tanto, $\angle ACA' = 90°$. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo BCA', obtenemos que $BA' = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$, lo cual implica que $BA' = 15$ cm. Considerando el área del triángulo rectángulo BCA', obtenemos que $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12$. Por lo tanto, $CD = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7.2$ cm.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. Sean A, B, C, D, E y F, los vértices del hexágono regular, como se muestra en la figura.



Tenemos 2 triángulos acutángulos: ACE y BDF, por lo que $L = 2$. Tenemos 12 triángulos rectángulos: ABD, ABE, ACD, ACF, ADE, ADF, BCE, BCF, BDE, BEF, CDF y CEF, por lo que $M = 12$. Tenemos 6 triángulos obtusángulos: ABC, ABF, AEF, BCD, CDE y DEF, por lo que $N = 6$.
Por lo tanto, $L \times M \times N = 2 \times 12 \times 6 = 144$.

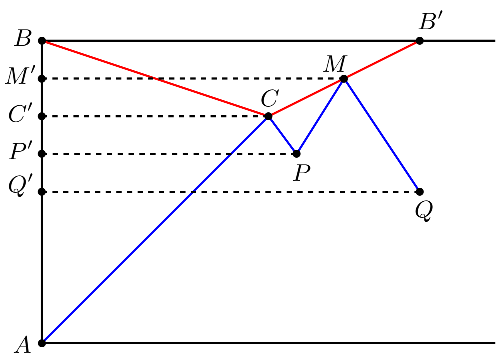
Solución del Problema 2. Si el cambio correcto es x dólares con y centavos, que es lo mismo que $100x + y$ centavos, entonces después de pagar 15 centavos por la rebanada de pan, Alex tendría $100x + y - 15$ centavos. En su lugar, recibió el cambio de $100y + x$

centavos y, después de pagar 15 centavos por la rebanada de pan, él tenía $100y+x-15$ centavos, que es el doble de $100x+y-15$ centavos. Tenemos entonces que

$$100y + x - 15 = 2(100x + y - 15),$$

esto es, $15 = 199x - 98y$, donde x, y son enteros positivos con $x < 20$. Como $98y$ es par y 15 es impar, necesariamente $199x$ debe ser un número impar y, en consecuencia, x también es impar, lo cual implica que los posibles valores de x son: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 y 19. De la ecuación $98y = 199x - 15$, se sigue que $199x - 15$ es divisible por 98, por lo que $199x - 15 - 2 \cdot 98x = 3x - 15$ también es divisible por 98. Como $0 < x < 20$, resulta que $-15 < 3x - 15 < 45$, por lo que la única opción es $3x - 15 = 0$, esto es, $x = 5$ y, por consiguiente, $y = 10$. Por lo tanto, el cambio correcto que Alex debió haber recibido es 5 dólares con 10 centavos.

Solución del Problema 3. Pongamos en el eje x al tiempo y en el eje y a la distancia. En el siguiente diagrama, las líneas azules representan el camino de Alice y las líneas rojas representan el camino de Bob. Sean C el punto donde se encuentran por primera vez, M el punto donde se encuentran por segunda vez y M es el punto medio de $B'C$.



Es claro que $BC = B'C$, por lo que $AC = CP + PM + MQ$ y $CP + PM = MQ$. Como M es el punto medio de $B'C$, tenemos que $M'C' = M'B$. Además, de la relación $CP + PM = MQ$, tenemos que $M'Q' = C'P' + P'M'$.
Luego,

$$C'P' + P'M' = M'C' + C'P' + P'Q',$$

esto es, $P'M' = M'C' + P'Q'$. Luego, $M'C' + C'P' = M'C' + P'Q'$, de donde se sigue que $C'P' = P'Q'$.
Como $AC = CP+PM+MQ$, tenemos que $AC' = C'P'+P'M'+M'Q'$. Además, como $M'P' = M'C' + C'P'$ y $M'Q' = M'C' + C'P' + P'Q'$, obtenemos que

$$AC' = C'P' + M'C' + C'P' + M'C' + C'P' + P'Q'. \qquad (20)$$

También tenemos que

$$AC' = C'P' + P'Q' + Q'A. \qquad (21)$$

De (20) y (21), obtenemos que

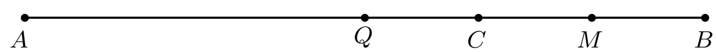
$$C'P' + P'Q' + Q'A = C'P' + M'C' + C'P' + M'C' + C'P' + P'Q',$$

esto es,

$$Q'A = M'C' + C'P' + M'C' + C'P' = M'C' + C'P' + M'B + P'Q' = Q'B,$$

lo que significa que Q' es el punto medio de AB y, por lo tanto, $AQ = 12$ km.

Solución alternativa. Sean M el punto medio de CB y Q el punto en el que se encuentra Alice cuando Bob llega al punto B.



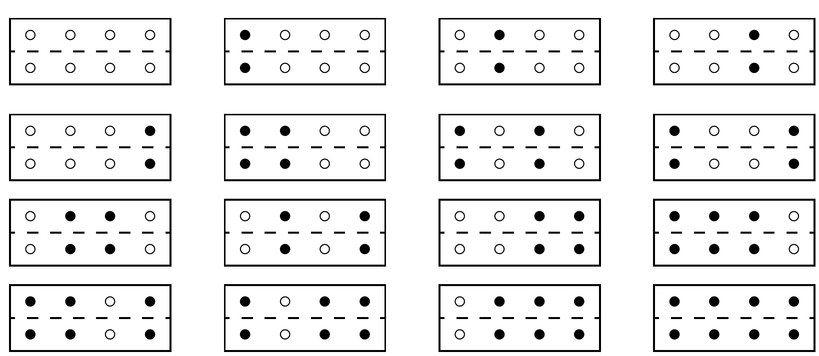
Como el tiempo que le tomó a Alice para ir de A a C es el mismo tiempo que le tomó a Bob ir de B a C y, el tiempo que le tomó a Alice ir de M a Q, es el mismo tiempo que le tomó a Bob ir de M a B, tenemos que $\frac{AC}{BC} = \frac{MQ}{MB}$, lo cual implica que

$$MQ = \frac{MB \cdot AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AC}{BC} = \frac{1}{2}AC.$$

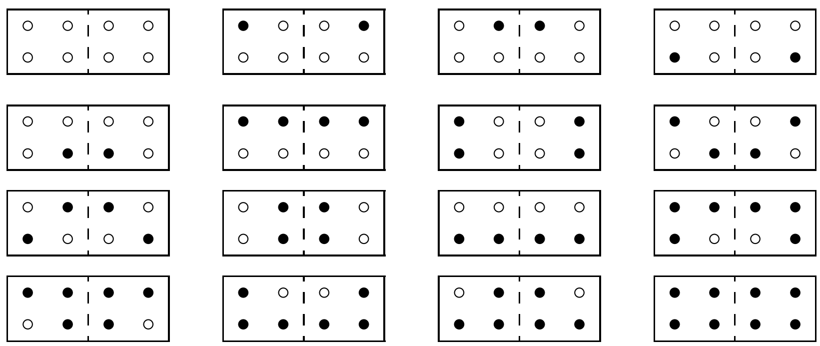
Por lo tanto,

$$AQ = AB - QB = AB - (MQ + MB) = AB - \frac{1}{2}(AC + CB) = AB - \frac{1}{2}AB$$
$$= \frac{1}{2}AB = 12 \text{ km}.$$

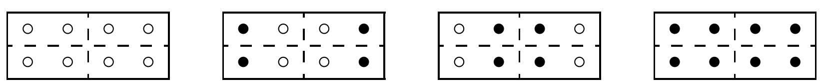
Solución del Problema 4. Por conveniencia, consideramos también el tablero sin colorear. Al colorear los círculos, hay $2^8 = 256$ posibles configuraciones en el tablero, incluyendo el tablero sin colorear.
Existen 16 configuraciones para el tablero resultante, que tienen un eje de simetría horizontal, como se muestra a continuación.



Existen 16 configuraciones del tablero resultante que tiene un eje de simetría vertical, como se muestra a continuación.



Existen 4 configuraciones del tablero resultante que tienen un eje de simetría vertical y un eje de simetría horizontal, como se muestra a continuación.



Por lo tanto, hay $256-16-16+4=228$ maneras de colorear al menos un círculo de tal forma que el tablero resultante no tenga ningún eje de simetría.

Solución del Problema 5. Observemos que n debe terminar en 3 o en 7, por lo que podemos escribir $n=10a\pm 3$ para algún entero positivo a. Entonces,

$$(10a\pm 3)^2=100a^2\pm 60a+9=10^4M+9009,$$

lo cual implica que

$$5a^2\pm 3a=500M+450, \tag{22}$$

de donde se sigue que $5\mid a$.
Luego, $\pm 3a=500M+450-5a^2$ es múltiplo de 25, así que $a=25b$ para algún entero positivo b. Sustituyendo en la relación (22) y simplificando, obtenemos que $125b^2\pm 3b=20M+18$, esto es, $3(\pm b-6)=5(4M-25b^2)$ y, por lo tanto, $5\mid(\pm b-6)$.
Si $5\mid(b-6)$, entonces los valores posibles de b son: $1,6,11,\ldots$.
Si $5\mid(b+6)$, entonces los valores posibles de b son: $4,9,14,\ldots$.
Si $b=1$, entonces $a=25$, lo cual implica que $n=25\cdot 10-3=247$ o $n=25\cdot 10+3=253$. Luego, $n^2=247^2=61009$ o $n^2=253^2=64009$, pero ninguno satisface las condiciones del problema.
Si $b=4$, entonces $a=100$, lo cual implica que $n=100\cdot 10-3=997$ o $n=100\cdot 10+3=1003$. Luego, $n^2=997^2=994009$ o $n^2=1003^2=1006009$, pero ninguno satisface las condiciones del problema.
Si $b=6$, entonces $a=150$. Luego, $n=150\cdot 10-3=1497$ o $n=150\cdot 10+3=1503$.

Luego, $n^2 = 1497^2 = 2241009$ o $n^2 = 1503^2 = 2259009$. Es fácil ver que $n = 1503$ es una solución válida, por lo que $b = 6$ da la solución más pequeña que es $n = 1503$.

Solución del Problema 6. Sea x el número buscado y sea $n^2 = x + 1$. Buscamos que $5x + 1 = 5n^2 - 4$ sea un cuadrado perfecto. Notemos que los cuadrados perfectos son congruentes con 0 o 1 módulo 3.
Si n es múltiplo de 3, entonces $5n^2 - 4 \equiv -4 \equiv 2 \pmod 3$, que no puede ser un cuadrado perfecto, así que $3 \nmid n$. Además, cualquier cuadrado perfecto es congruente con 0, 1, 2 o 4 módulo 7.
Si n es múltiplo de 7, entonces $5n^2 - 4 \equiv 3 \pmod 7$, que no puede ser un cuadrado perfecto.
Si $n \equiv 3$ o $4 \pmod 7$, entonces $5n^2 - 4 \equiv 6 \pmod 7$, que no puede ser un cuadrado perfecto.
Luego, $n \equiv 1, 2, 5$ o $6 \pmod 7$ y, como n^2 debe ser mayor que 25, los posibles valores de n son: $8, 13, 16, 19, 20, 22, \ldots$.
Si $n = 8$, entonces $x = n^2 - 1 = 63$, pero $5x + 1 = 316$ no es un cuadrado perfecto.
Si $n = 13$, entonces $x = n^2 - 1 = 168$ y $5x + 1 = 841 = 29^2$ es un cuadrado.
Por lo tanto, la respuesta es $x = 168$.

Solución alternativa. Sea x el número buscado y sea $n^2 = x + 1 > 25$. Necesitamos que $5x + 1 = 5n^2 - 4$ sea el cuadrado de algún entero positivo.

a) Si $n^2 = 36$, entonces $5n^2 - 4 = 180 - 4 = 176$ no es un cuadrado.

b) Si $n^2 = 49$, entonces $5n^2 - 4 = 245 - 4 = 241$ no es un cuadrado.

c) Si $n^2 = 64$, entonces $5n^2 - 4 = 320 - 4 = 316$ no es un cuadrado.

d) Si $n^2 = 81$, entonces $5n^2 - 4 = 405 - 4 = 401$ no es un cuadrado.

e) Si $n^2 = 100$, entonces $5n^2 - 4 = 500 - 4 = 496$ no es un cuadrado.

f) Si $n^2 = 121$, entonces $5n^2 - 4 = 605 - 4 = 601$ no es un cuadrado.

g) Si $n^2 = 144$, entonces $5n^2 - 4 = 720 - 4 = 716$ no es un cuadrado.

h) Si $n^2 = 169$, entonces $5n^2 - 4 = 845 - 4 = 841 = 29^2$ es un cuadrado.

Por lo tanto, $x = n^2 - 1 = 168$.

Solución del Problema 7. El número de cubos visibles es

$$abc - (a-1)(b-1)(c-1) = ab + bc + ca - a - b - c + 1.$$

Luego, por la condición del problema, a, b y c deben satisfacer la ecuación

$$ab + ac + bc - a - b - c + 1 = 487.$$

Sumando de ambos lados $c(c-1)$ y factorizando el lado izquierdo, obtenemos que

$$(a + c - 1)(b + c - 1) = 487 + c(c - 1). \tag{23}$$

Es fácil ver que las condiciones $1 \leq a \leq b \leq c$, implican que $c \leq a + c - 1 \leq 2c - 1$ y $c \leq b + c - 1 \leq 2c - 1$.

a) Si $c = 20$, el lado derecho de (23) es $867 = 3 \cdot 17^2$, que no tiene factores entre $c = 20$ y $2c - 1 = 39$, inclusive.

b) Si $c = 19$, el lado derecho de (23) es 829, que es primo.

c) Si $c = 18$, el lado derecho de (23) es $793 = 13 \cdot 61$ y, el factor primo 61, es mayor que $2c - 1 = 35$.

d) Si $c = 17$, el lado derecho de (23) es $759 = 3 \cdot 11 \cdot 23 = 23 \cdot 33$. Si $a + c - 1 = 23$ y $b + c - 1 = 33$, obtenemos que $a = 7$ y $b = 17$.

e) Si $c = 16$, el lado derecho de (23) es 727, que es primo.

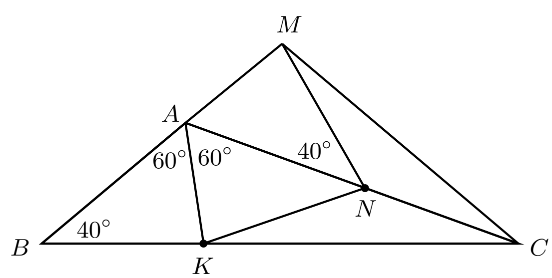
f) Si $c = 15$, el lado derecho de (23) es $697 = 17 \cdot 41$ y, el factor primo 41, es mayor que $2c - 1 = 29$.

g) Si $c = 14$, el lado derecho de (23) es $669 = 3 \cdot 223$ y, el factor primo 223, es mayor que $2c - 1 = 27$.

h) Si $c \leq 13$, entonces $c(c-1) \leq 13 \cdot 12 = 156 < 162$, esto es, $c^2 - c - 162 < 0$, lo cual implica que el lado derecho de (23) es mayor que $(2c-1)^2$, por lo que no existen soluciones en este caso.

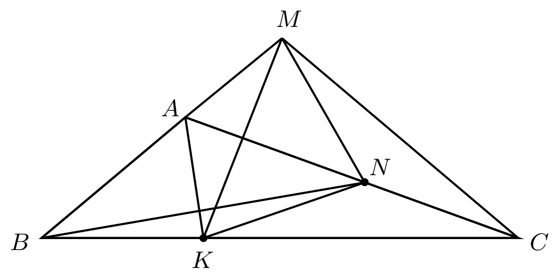
Por lo tanto, el prisma rectangular es de dimensiones $7 \times 17 \times 17$ y el número de cubos unitarios que no son visibles es $(7-1) \cdot (17-1) \cdot (17-1) = 1536$.

Solución del Problema 8. Sea K el punto en BC tal que $\angle BAK = \angle KAN = 60^\circ$.



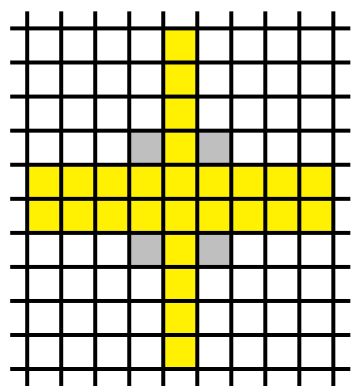
Como $AN = AB$, se sigue que los triángulos ABK y ANM son congruentes por el criterio ALA. Además, como $\angle BAK = \angle KAN = 60^\circ$ y $AN = AB$, los triángulos ABK y AKN también son congruentes por el criterio LAL. Esto implica que $\angle AKN = 80^\circ$, $\angle CKN = 20^\circ$, $\angle ANK = 40^\circ$, $\angle CNK = 140^\circ$ y $BK = NK = MN$. Luego, tenemos que $\angle NKC = \angle NCK = 20^\circ$, por lo que el triángulo KNC es isósceles. Como $\angle KNC = \angle MNC = 140^\circ$ y $NK = MN$, tenemos que los triángulos KNC y MNC son congruentes por el criterio LAL, por lo que $\angle CMN = \angle CKN = 20^\circ$. Por lo tanto, $\angle BMC = \angle AMN + \angle CMN = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$.

Solución alternativa. Sea K el punto en BC, tal que AK es perpendicular a BN. Como el triángulo BAN es isósceles, tenemos que AK es bisectriz del ángulo $\angle BAN$ y es mediatriz de BN. Como N es el punto simétrico de B respecto de AK, tenemos que $\angle ANK = \angle ABK = 40°$ y $BK = NK$.



Por otra parte, tenemos que $\angle BAK = \angle KAC = 60°$, así que $\angle MAC = 60°$. Por lo tanto, los triángulos BAK y NAM son congruentes, por lo que $AK = AM$, $BK = MN$ y $NK = NM$.
Luego, AC es la mediatriz de MK, lo cual implica que $\angle MCB = 40°$ y, por lo tanto, $\angle BMC = 180° - \angle MBC - \angle MCB = 100°$.

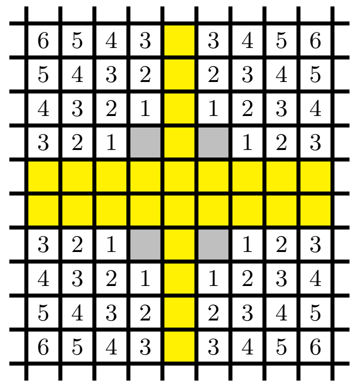
Solución del Problema 9. Dividamos la cuadrícula en cuatro regiones blancas y una región amarilla en forma de cruz, como se muestra a continuación.



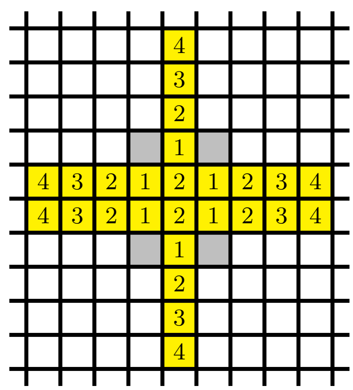
Observemos que en cada región blanca, $n+1$ cuadritos se vuelven grises después del n-ésimo segundo, por lo que en total hay

$$4(1+2+3+\cdots+(n+1)) = 4\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = 2n^2+6n+4$$

cuadritos grises en las cuatro regiones blancas después de n segundos.
En la siguiente figura, cada número en cada cuadrito representa la cantidad de segundos que tarda en volverse gris.

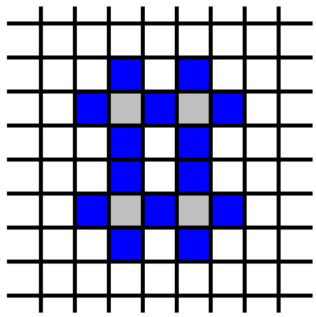


En la región amarilla en forma de cruz, 14 cuadritos se volverán grises después de los primeros 2 segundos y, 6 cuadritos más, se volverán grises después de cada segundo. Luego, tenemos $14+6(n-2) = 6n+2$ cuadritos grises en total después de n segundos. En la siguiente figura, cada número representa la cantidad de segundos que tarda el cuadrito correspondiente en volverse gris.

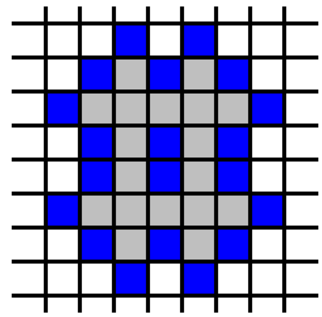


Por lo tanto, el número total de cuadritos grises después de $n \geq 2$ segundos es igual a $2n^2 + 12n + 6$. En particular, después de 60 segundos, el número de cuadritos grises es $2 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60 + 6 = 7200 + 720 + 6 = 7926$.

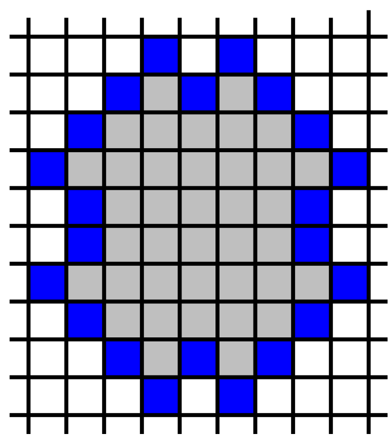
Solución alternativa. Sea $S_0 = 4$ y, para cada $n \geq 1$, sea S_n el número de cuadritos grises después de n segundos. Tenemos que $S_1 = 4 + 14 = 18$, $S_2 = S_1 + 20 = 38$ y $S_3 = S_2 + 22 = 60$. En las siguientes figuras, cada cuadrito azul se convertirá en gris en el siguiente segundo. Luego, si P_n denota el número de cuadritos azules que se convertirán en grises en el n-ésimo segundo, tenemos que $P_1 = 14$, $P_2 = 20$, $P_3 = 22$ y $S_n = S_{n-1} + P_n$.



Inicio



Después de 1 segundo



Después de 2 segundos

Por otro lado, para cada $n > 2$, tenemos que

$$P_{n+1} = P_n + 4 = P_{n-1} + 2 \cdot 4 = P_{n-2} + 3 \cdot 4 = \cdots = P_3 + 4(n-2) = 4n + 14,$$

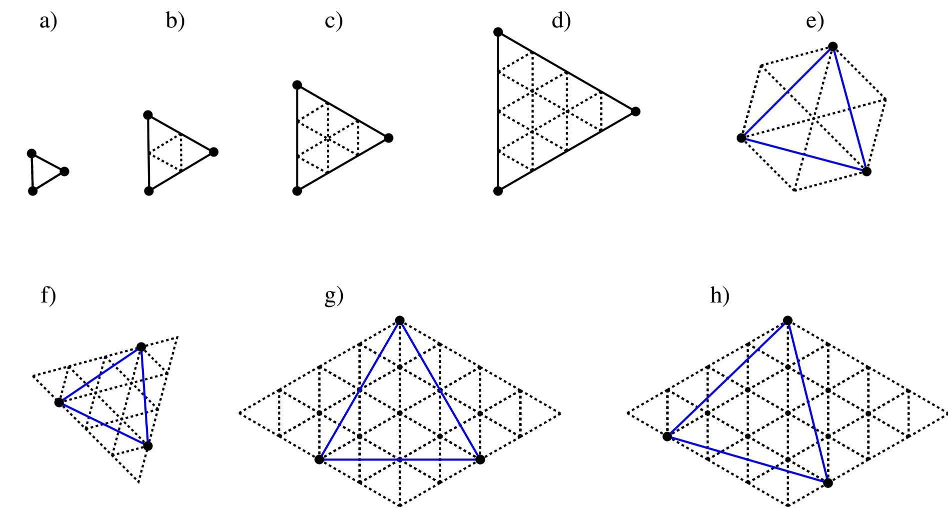
por lo que

$$\begin{aligned} S_{60} &= S_{59} + P_{60} = S_{59} + 4 \cdot 59 + 14, \\ S_{59} &= S_{58} + P_{59} = S_{58} + 4 \cdot 48 + 14, \\ S_{58} &= S_{37} + P_{58} = S_{57} + 4 \cdot 57 + 14, \\ &\vdots \\ S_4 &= S_3 + P_4 = S_3 + 4 \cdot 3 + 14. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

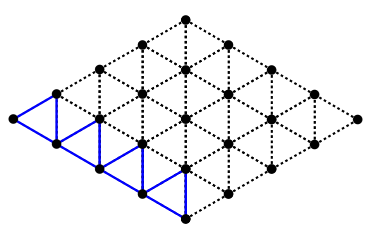
$$\begin{aligned} S_{60} &= S_3 + 4(59 + 58 + 57 + \cdots + 4 + 3) + 14 \cdot 57 = 60 + 4 \cdot \frac{62 \cdot 57}{2} + 14 \cdot 57 \\ &= 7926. \end{aligned}$$

Solución del Problema 10. Si nos fijamos en los triángulos equiláteros de diferentes tamaños con tres puntos como vértices, tenemos 8 tipos, los cuales mostramos a continuación.

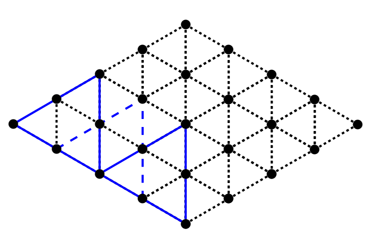


Ahora contaremos el número de triángulos de cada tipo.

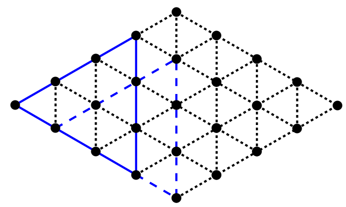
a) Como los triángulos pueden ser volteados y tenemos cuatro filas, hay $4(4 \cdot 2) = 32$ posibilidades.



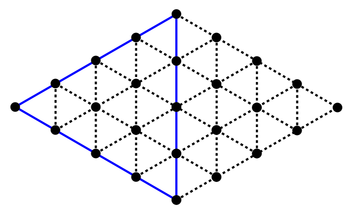
b) Se puede mover hasta tres líneas (tres veces) y voltearlo, por lo que hay $2(3 \cdot 3) = 18$ posibilidades.



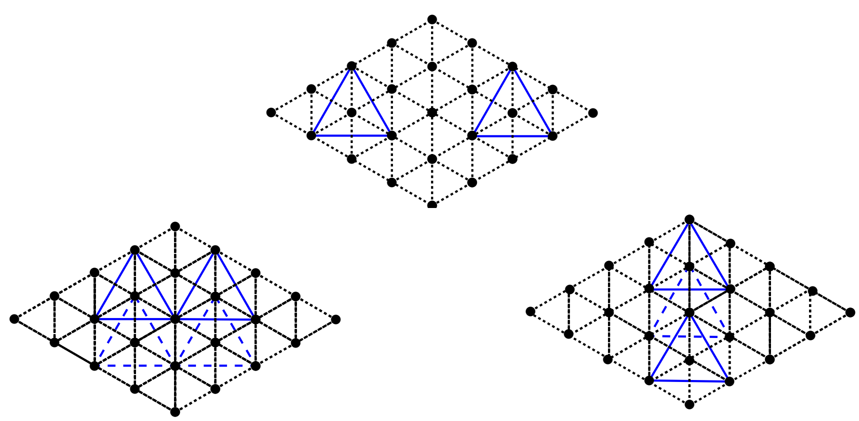
c) Se puede mover hasta dos líneas (dos veces) y voltearlo, por lo que hay $2(2 \cdot 2) = 8$ posibilidades.



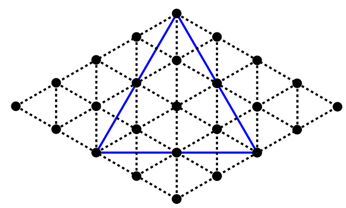
d) Solo hay 2 triángulos, que son simétricos.



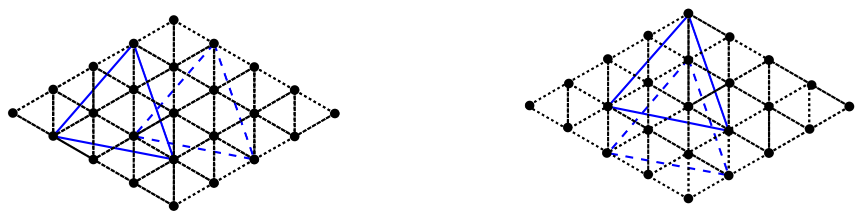
e) Considerando la simetría vertical, tenemos $2(1+2+3+2+1) = 18$ posibilidades.



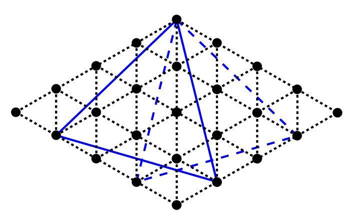
f) Considerando la simetría vertical, tenemos 2 posibilidades.



g) Considerando las simetrías horizontales y verticales, tenemos $2(2 \cdot 4) = 16$ posibilidades.



h) Considerando la simetría vertical, tenemos $2 \cdot 2 = 4$ posibilidades.



Por lo tanto, hay $32 + 18 + 8 + 2 + 18 + 2 + 16 + 4 = 100$ triángulos equiláteros.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

64^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 2 al 13 de julio de 2023, se llevó a cabo la 64^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO por sus siglas en inglés), de forma presencial, en Chiba, Japón. El equipo que representó a México, consiguió un resultado histórico para el país. El joven estudiante de Aguascalientes, Rogelio Guerrero Reyes, de 17 años, ganó medalla de oro. Esta es la quinta medalla de oro que se logra desde 1981 en que México ha participado en una IMO.

El equipo mexicano estuvo integrado por

- Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
- Mateo I. L. A. (Ciudad de México).
- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
- Eric Ransom Treviño (Nuevo León).
- Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).
- Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa).

Además de la medalla de oro obtenida por Rogelio, se obtuvieron 3 medallas de plata: Omar, Víctor y Eric. También se obtuvieron 2 medallas de bronce: Luis Eduardo y Mateo.

En la 64^a IMO compitieron más de 600 alumnos entusiastas de las matemáticas de 112 países, “no solo para luchar por el honor, sino también para contribuir a una comunidad internacional más allá de las fronteras, religiones y política”, explican los organizadores de la IMO. Gracias al puntaje obtenido por el equipo, México se coronó también en primer lugar Iberoamericano y logró un histórico lugar 14 en el medallero general.

Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Kevin Beuchot Castellanos (jefe de la delegación), Ignacio Barradas Bribiesca (tutor) y Adán Medrano Martín del Campo (observador A), quienes se encargaron de la revisión del examen de los concursantes mexicanos, así como de la discusión con el jurado para ratificar los puntajes del equipo mexicano.

A continuación presentamos los problemas de la 64^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Determina todos los enteros compuestos $n > 1$ que satisfacen la siguiente propiedad: si $d_1, d_2, \ldots, d_k$ son todos los divisores positivos de n con $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, entonces d_i divide a $d_{i+1} + d_{i+2}$ para cada $1 \leq i \leq k-2$.

(Problema sugerido por Colombia).

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$. Sea Ω el circuncírculo de ABC. Sea S el punto medio del arco $\widehat{CB}$ de Ω que contiene a A. La perpendicular por A a BC corta al segmento BS en D y a Ω de nuevo en $E \neq A$. La paralela a BC por D corta a la recta BE en L. Sea ω el circuncírculo del triángulo BDL. Las circunferencias ω y Ω se cortan de nuevo en $P \neq B$. Demuestra que la recta tangente a ω en P corta a la recta BS en un punto de la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$.

(Problema sugerido por Portugal).

Problema 3. Para cada entero $k \geq 2$, determina todas las sucesiones infinitas de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots$ para las cuales existe un polinomio P de la forma $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, con $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ enteros no negativos, tal que

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

para todo entero $n \geq 1$.

(Problema sugerido por Malasia).

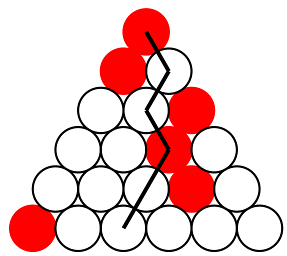
Problema 4. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ números reales positivos, todos distintos entre sí, tales que

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

es entero para todo $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Demuestra que $a_{2023} \geq 3034$.

(Problema sugerido por Holanda).

Problema 5. Sea n un entero positivo. Un *triángulo japonés* consiste en $1+2+\cdots+n$ círculos iguales acomodados en forma de triángulo equilátero de modo que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, la fila número i contiene i círculos, de los cuales exactamente uno de ellos se pinta de rojo. Un *camino ninja* en un triángulo japonés es una sucesión de n círculos que comienza con el círculo de la fila superior y termina en la fila inferior, pasando sucesivamente de un círculo a uno de los dos círculos inmediatamente debajo de él. En el siguiente dibujo se muestra un ejemplo de un triángulo japonés con $n = 6$, junto con un camino ninja en ese triángulo que contiene dos círculos rojos.



$n = 6$

En términos de n, determina el mayor k tal que cada triángulo japonés tiene un camino ninja que contiene al menos k círculos rojos.

(Problema sugerido por Holanda).

Problema 6. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean A_1, B_1, C_1, puntos interiores de ABC tales que $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ y,

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Las rectas BC_1 y CB_1 se cortan en A_2, las rectas CA_1 y AC_1 se cortan en B_2 y las rectas AB_1 y BA_1 se cortan en C_2.

Demuestra que si el triángulo $A_1B_1C_1$ es escaleno, entonces los tres circuncírculos de los triángulos AA_1A_2, BB_1B_2 y CC_1C_2 pasan todos por dos puntos comunes.

(Nota: un triángulo escaleno es un triángulo cuyos tres lados tienen longitudes distintas).

(Problema sugerido por Estados Unidos).

XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Del 21 al 29 de julio de 2023 se llevó a cabo en La Herradura, La Paz, El Salvador, la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC), en la que participaron 12 países y un total de 43 estudiantes. Una vez más y por quince años consecutivos, México se ha posicionado como el líder indiscutible de esta competencia, obteniendo el primer lugar por países. En esta ocasión, México obtuvo una puntuación histórica de 142 puntos quedando por encima de Colombia (84 puntos) y El Salvador (64 puntos), quienes ocuparon el segundo y tercer lugar por países, respectivamente.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Juan Luis Manríquez Sequera (Baja California Sur).
- Iker Torres Terrazas (Chihuahua).
- Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos).
- Leonardo Melgar Rubí (Morelos).

Leonardo, Andrea e Iker obtuvieron medallas de oro, mientras que Juan Luis obtuvo medalla de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Antonio Gómez Ortega (líder) y Denisse Alejandra Escobar Parra (tutora).

A continuación, presentamos los problemas de la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Una *coloración* del conjunto de los enteros mayores o iguales que 1, debe hacerse con la siguiente regla: cada número se colorea de azul o rojo, de manera que la suma de cualesquiera dos números (no necesariamente distintos) del mismo color, sea azul. Determinar todas las coloraciones posibles del conjunto de los enteros mayores o iguales a 1, que sigan esta regla.

Problema 2. Octavio escribe un entero $n \geq 1$ en una pizarra y luego inicia un proceso en el que en cada paso borra el número entero k escrito en la pizarra y lo reemplaza por uno de los siguientes números, siempre que el resultado sea entero:

$$3k - 1, \quad 2k + 1, \quad \frac{k}{2}.$$

Demostrar que para todo entero $n \geq 1$, Octavio puede llegar a escribir en la pizarra el número 3^{2023} luego de una cantidad finita de pasos.

Problema 3. Sean a, b y c números reales positivos tales que $ab + bc + ca = 1$. Demostrar que

$$\frac{a^3}{a^2 + 3b^2 + 3ab + 2bc} + \frac{b^3}{b^2 + 3c^2 + 3bc + 2ca} + \frac{c^3}{c^2 + 3a^2 + 3ca + 2ab} > \frac{1}{6(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Problema 4. Un número de cuatro cifras $n = \overline{abcd}$, donde a, b, c y d son dígitos, con $a \neq 0$, se denomina *guanaco*, si el producto $\overline{ab} \times \overline{cd}$ es un divisor positivo de n. Encontrar todos los números guanacos que existen.

Problema 5. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y Γ la circunferencia que pasa por A, B y C. Sean D el punto diametralmente opuesto a A en Γ y ℓ la recta tangente en D a Γ. Sean P, Q y R las intersecciones de BC con ℓ, de AP con Γ tal que $Q \neq A$ y de QD con la altura del triángulo ABC por A, respectivamente. Se definen el punto S como la intersección de AB con la recta ℓ y el punto T como la intersección de AC con la recta ℓ. Probar que S y T pertenecen a la circunferencia que pasa por A, Q y R.

Problema 6. En un estanque se encuentran $n \geq 3$ piedras dispuestas en una circunferencia.

Una princesa quiere etiquetar las piedras con los números $1, 2, \ldots, n$ en algún orden y después colocar algunos sapos sobre las piedras. Una vez que todos los sapos estén ubicados, empiezan a saltar en el sentido de las manecillas del reloj, de acuerdo a la siguiente regla: cuando un sapo llega a la piedra etiquetada con el número k, espera k minutos y luego salta a la piedra adyacente.

Si en ningún momento dos sapos pueden ocupar la misma piedra, ¿cuál es la mayor cantidad de sapos para los cuales la princesa puede etiquetar las piedras, antes de colocar los sapos? Para este máximo, mostrar cómo la princesa puede etiquetar las piedras y cómo colocar los sapos.

Nota: Una piedra se considera ocupada por dos sapos al mismo tiempo solo si existen dos sapos que estén simultáneamente en esta piedra por al menos un minuto.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

64^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

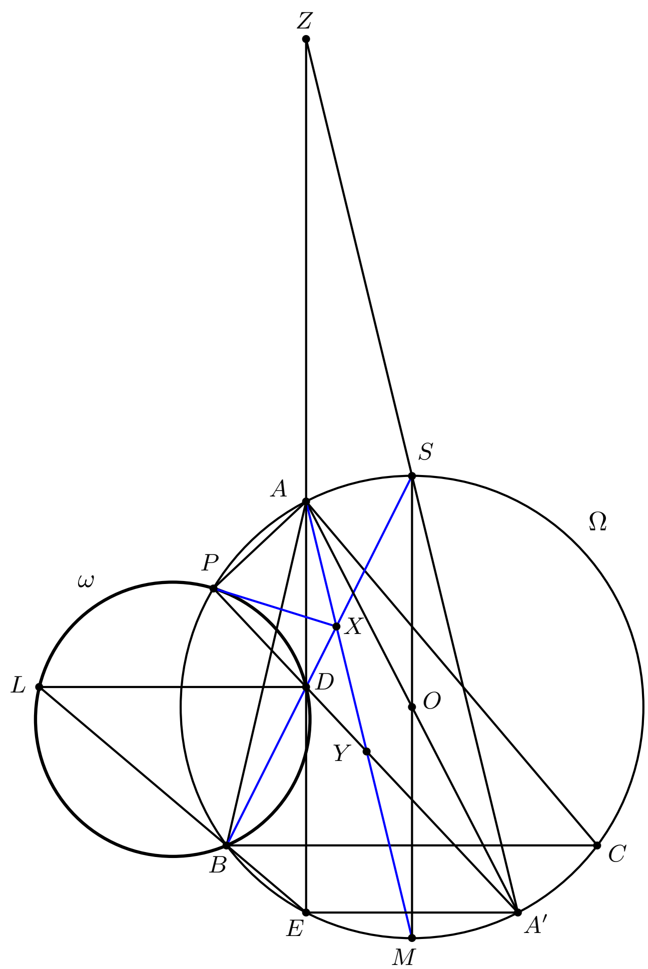
A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 64^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Luis Eduardo Martínez Aguirre). Como n es compuesto, tenemos que $k \geq 3$. Sea $d_2 = p$ un número primo. Notemos que d_{k-2} divide a la suma

$$d_{k-1} + d_k = \frac{n}{p} + n,$$

pues $d_2 d_{k-1} = n$. Como $d_{k-2} = \frac{n}{d_3}$, tenemos que $\frac{n}{d_3}x = \frac{n(1+p)}{p}$ para algún entero x, esto es, $px = d_3(p+1)$, lo cual implica que $p \mid d_3$. Como d_3 es el segundo divisor más pequeño de n, o bien d_3 es primo o $d_3 = p^2$. Como $p = d_2$ divide a d_3 y $d_2 < d_3$, d_3 no puede ser primo. Esto significa que $d_3 = p^2$.
Demostraremos que $d_{i+1} = p^i$ por inducción en i. El casos $i = 1, i = 2$ ya los tenemos. Supongamos que $d_{i-1} = p^{i-2}$ y $d_i = p^{i-1}$. Tenemos que $d_{i-1} \mid d_i + d_{i+1}$, esto es, $p^{i-2} \mid p^{i-1} + d_{i+1}$. Luego, $p \mid d_{i+1}$ y, como no hay otro divisor primo intermedio, tenemos que $d_{i+1} = p^i$, concluyendo la inducción.
Por lo tanto, tenemos que $n = d_k = p^{k-1}$. Es fácil comprobar que, en efecto, $n = p^{k-1}$ cumple la condicion del problema, pues los divisores son de n son $1, p, p^2, \ldots, p^{k-1}$, cada uno divide a los dos siguientes y, por lo tanto, a su suma.

Solución del problema 2. (Solución de Eric Ransom Treviño). Sea A' el punto diametralmente opuesto a A en Ω. Demostraremos que P, D y A' son colineales. En efecto, notemos que $\angle DPB = \angle BLD$ por ser cíclico en ω. Luego, $\angle DLB = \angle EAC = \angle EAC$, donde la primera igualdad se da porque DL y BC son parelelas y, la segunda igualdad, por el cíclico en Ω. Finalmente, tenemos que $\angle EAC = \angle BAA'$ ya que la altura y el diámetro son isogonales. De aquí que $\angle BPD = \angle BAA'$ y, por lo tanto, PD corta a Ω en A'.



Sea M el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A. Tenemos que AM es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Sean X la intersección de AM con SB, Y la intersección de AM con $A'P$ y Z la intersección de AE con $A'S$. Demostraremos que X es el punto donde concurren las rectas AM, BS y la tangente a ω por P.
Veamos que $XA = XY$. Tenemos que $A'S$ y AM son paralelas, ya que $\angle A'MA = 90° = \angle MAS$ al ser AA' y MS diametralmente opuestos. Como $\angle A'EZ = 90°$ y $SA' = SE$, pues por ser AA' y AE isogonales tenemos que $\widehat{EM} = \widehat{MA'}$, resulta que S es el punto medio de la hipotenusa del triángulo $ZA'E$ y, por lo tanto, $SZ = SA'$. Ahora, por la homotecia desde D en los triángulos DAY y DZA', tenemos que X es el punto medio de AY. En el triangulo APY, como $\angle APY = 90°$, tenemos que $PX = XA = XY$. Además, los triángulos XAD y XBA son semejantes, ya que

$$\angle XDA = \widehat{AS} + \widehat{BE} = \widehat{MA'} + \widehat{A'C} = \angle MAC = \angle BAX.$$

Luego, $\angle XAD = \widehat{EM} = \widehat{MA'} = \widehat{AS} = \angle XAB$ y, por lo tanto, tenemos que $XP^2 = AX^2 = XD \cdot XB$, lo cual implica que XP es tangente a ω y, por consiguiente, X es el punto que queríamos.

Solución del problema 3. (Solución de Rogelio Guerrero Reyes). Primero demostraremos que la sucesión a_n es no decreciente. Supongamos que existe un entero n tal que $a_n > a_{n+1}$. Entonces, $p(a_n) > p(a_{n+1})$, esto es,

$$a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k} > a_{n+2}a_{n+3}\cdots a_{n+k+1}.$$

Dividiendo entre los factores comunes $a_{n+2}\cdots a_{n+k}$, obtenemos que $a_{n+1} > a_{n+k+1}$. Con esto, sabemos que también hay algún $n+1 \leq s \leq n+k$ tal que $a_s > a_{s+1}$ y, además, $a_{n+1} > a_{n+k+1} \geq a_{s+1}$. Supongamos, que no existe tal s. Entonces, cada uno de los números $a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots, a_{n+k}$ es mayor que a_{n+k+1}, pues si alguno a_{s+1} fuera menor que a_{n+k+1}, entonces $a_s > a_{n+k+1} \geq a_{s+1}$. Pero, si $a_{n+k} > a_{n+k+1}$, entonces podemos tomar $s = n+k$. Luego, el valor s cumple. Tenemos entonces que $a_{n+1} > a_{s+1}$ y, como $a_s > a_{s+1}$, podemos repetir este argumento. Esto nos genera una secuencia $a_{s_1} > a_{s_2} > \cdots$ que es infinita. Pero esto no es posible, pues cada a_{s_i} es un entero positivo. Por lo tanto, no puede suceder que $a_n > a_{n+1}$ y, por consiguiente, la secuencia es no decreciente.

Demostraremos ahora que la secuencia a_i toma infinitos valores distintos o es la secuencia constante. Si a_i no tomara infinitos valores distintos, como la secuencia es no decreciente, si M es el mayor valor posible que toma la secuencia, entonces a partir de cierto término la secuencia es $M, M, M, \ldots$. Demostramos que todos los términos anteriores también son iguales a M. En efecto, si a_i es tal que $a_j = M$ para todo $j \geq i+1$, entonces $P(M) = M^k = M^k + c_{k-1}M^{k-1} + \cdots + c_0$ y, por consiguiente, $c_i = 0$ para todo i. Ahora, si $P(a_i) = a_{i+1}\cdots a_{i+k} = M^k$, entonces $a_i^k = M^k$ y, por consiguiente, $a_i = M$. Luego, podemos hacer esto para todo i y, por lo tanto, la secuencia es constante y el polinomio es $P(x) = x^k$. Entonces, podemos asumir que a_i toma infinitos valores distintos.

Definiendo $x_{i,n} = a_{i+n} - a_i \geq 0$, tenemos que

$$P(a_i) = (a_i + x_{i,1})(a_i + x_{i,2})\cdots(a_i + x_{i,k}).$$

Demostraremos que $x_{i,n}$ está acotado para todo i con $1 \leq n \leq k$. En efecto, supongamos que $x_{i,n} > c_{k-1} + \cdots + c_0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
P(a_i) &= (a_i + x_{i,1})\cdots(a_i + x_{i,n})\cdots(a_i + x_{i,k}) \\
&> a_i^{k-1} + (a_i + c_{k-1} + \cdots + c_0) \\
&= a_i^k + (c_{k-1} + \cdots + c_0)a_i^{k-1} \\
&\geq a_i^k + c_{k-1}a_i^{k-1} + \cdots + c_1 a_i + c_0 \\
&= P(a_i),
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

Como sabemos que $x_{i,n}$ está acotado para $1 \leq n \leq k$, por el principio de las casillas infinito la secuencia $s_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$ tiene un valor que se repite infinitas veces.

Entonces, hay infinitos valores de i donde $x_{i,1} = b_1, x_{i,2} = b_2, \ldots, x_{i,k} = b_k$. Además, como la sucesión a_i es no decreciente, tenemos que $x_{i,1} \leq x_{i,2} \leq \cdots \leq x_{i,k}$, lo cual implica que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k$. Por lo tanto,

$$P(a_i) = (a_i + b_1)(a_i + b_2)\cdots(a_i + b_k)$$

para infinitos valores de i, por lo que el polinomio es

$$P(x) = (x + b_1)(x + b_2)\cdots(x + b_k).$$

No puede haber otra secuencia d_i tal que $x_{i,1} = d_1, \ldots, x_{i,k} = d_k$ para infinitos valores de i, pues si la hubiera

$$\prod_{i=1}^{k}(x + b_i) = P(x) = Q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x + d_i),$$

lo cual implicaría que existe un entero N tal que $x_{i,j} = b_j$ para $i > N$.
Ahora, para $i > N$ tenemos que $a_{i+1} = a_i + x_{i,1} = a_i + b_1$, pues sabemos que $x_{i,1} = b_1$ ya que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k$. Entonces a partir de N, la secuencia es una progresión aritmética. Esto implica que $b_j = jb_1$, por lo que

$$P(x) = (x + b_1)(x + 2b_1)\cdots(x + kb_1).$$

Ahora demostraremos que también podemos continuar hacia abajo y ver que $a_{i+1} = a_i + b_1$ para el menor i para el que no sabemos que esto es cierto.
Renombremos $b_1 = b$. Tenemos que $a_{i+1} = a_i + b$ para $i > n$. Entonces,

$$P(a_n) = (a_n + b)(a_n + 2b)\cdots(a_n + kb) = a_{n+1}(a_{n+1} + b)\cdots(a_{n+1} + (k-1)b),$$

donde la primera igualdad se sigue por la definición de P y, la segunda, por la condición del problema. Notemos que si $a_{n+1} > a_n + b$, entonces el producto de la derecha es mayor y, si $a_{n+1} < a_n + b$, el producto de la derecha es menor, por lo que debemos tener que $a_{n+1} = a_n + b$. Luego, a_i debe ser una progresión aritmética con diferencia b y el polinomio es $P(x) = (x + b)(x + 2b)\cdots(x + kb)$.
Por lo tanto, las únicas sucesiones que cumplen son las progresiones aritméticas con el polinomio $P(x) = (x + b)(x + 2b)\cdots(x + kb)$. (La sucesión constante es una progresión aritmética con $b = 0$).

Solución del problema 4. (Solución de Víctor Manuel Bernal Ramírez). Para cada entero $1 \leq n \leq 2023$, sean $b_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y $c_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. Tenemos que $a_1 = \sqrt{x_1 \cdot \frac{1}{x_1}} = 1$. Probaremos que $a_{i+2} \geq a_i + 3$.
Primero veamos que no es posible que $a_i = a_{i+1}$, pues para que tengamos esto necesitamos que $\sqrt{(b_i + x_{i+1})(c_i + \frac{1}{x_{i+1}})} = \sqrt{b_i c_i}$, lo cual no es posible pues $x_i > 0$ y $\frac{1}{x_i} > 0$. Como a_{i+1} es un número entero, concluimos que $a_{i+1} \geq a_i + 1$.
Ahora, veamos que $a_{i+2} \geq a_i$. Basta ver que no es posible que $a_{i+2} = a_{i+1} + 1 = a_i + 2$. Supongamos que $k = a_{i+1} = a_i + 1$. Entonces, $k^2 = b_i c_i$,

$$(k+1)^2 = (b_i + x_{i+1})\left(c_i + \frac{1}{x_{i+1}}\right) = k + b_i \frac{1}{x_{i+1}} + c_i x_{i+1} + 1$$

si y solo si

$$2k = b_i \frac{1}{x_{i+1}} + c_i x_{i+1} = c_i x_{i+1} + \frac{k^2}{c_i x_{i+1}} \geq 2\sqrt{k^2} = 2k,$$

donde la desigualdad se sigue por MA-MG y, como se da la igualdad, necesariamente $c_i x_{i+1} = k$.
De manera análoga, como $(k+1)^2 = b_{i+1} c_{i+1}$,

$$(k+2)^2 = (b_{i+1} + x_{i+2}) \left(c_{i+1} + \frac{1}{x_{i+2}} \right),$$

tenemos que $k + 1 = c_{i+1} x_{i+2}$.
Usando esto, obtenemos que

$$\frac{c_{i+1}}{c_i} = \frac{c_i + \frac{1}{x_{i+1}}}{c_i} = 1 + \frac{1}{c_i x_{i+1}} = 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k},$$

lo cual implica que

$$\frac{x_{i+2}}{x_{i+1}} = \frac{\left(\frac{k+1}{c_{i+1}}\right)}{\left(\frac{k}{c_i}\right)} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{c_i}{c_{i+1}} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = 1.$$

Luego, $x_{i+1} = x_{i+2}$ y, por lo tanto, no se puede tener $a_i + 2 = a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$, lo que significa que $a_{i+2} \geq a_i + 3$.
Con la desigualdad que probamos, concluimos que $a_{2023} \geq a_1 + 3(1011) = 3034$.

Solución del problema 5. (Solución de Mateo I. L. A.). La respuesta es $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Para ver que esto es el máximo, podemos ver el siguiente acomodo:
En la fila i, el círculo rojo está en la posición $(i, 2(i - 2^{\lfloor \log_2 i \rfloor}) + 1)$. Podemos ver que esto funciona, pues entre las filas 2^k y 2^{k+1}, un camino ninja solo puede pasar por a lo más un círculo rojo. Esto es pues de un círculo en posición (r, s) (fila r, posición s), se puede llegar a $(r+1, s)$ o $(r+1, s+1)$, pero por como coloreamos los círculos rojos, en cada fila están en una sucesión $1, 3, 5, \ldots$, entonces ninguno se puede alcanzar sumando 1 repetidamente al pasar de fila. Por lo tanto, se tiene a lo más un círculo rojo entre cada potencia de 2 y nos da la cota de $\lfloor \log_2 n \rfloor$.
Ahora mostraremos que podemos garantizar esta cantidad. Para esto, escribiremos un número $c(i, j)$ dentro de cada círculo (i, j). En $(1, 1)$ ponemos $c(1, 1) = 1$, para (i, j) escribimos $c(i, j) = \text{máx}(c(i-1, j-1), c(i-1, j))$ si el círculo no es rojo y, si es rojo, sumamos 1 (consideramos $c(i, j) = 0$ si (i, j) no existe, por ejemplo si $j = 0$). Este proceso asigna a cada círculo, el máximo número de círculos rojos en un camino ninja que pasa por él.
Para demostrar nuestra cota, basta probar que cuando $n = 2^k$ hay un círculo con un número asignado mayor o igual que $k + 1$. Probaremos esto viendo que la suma de los números en la fila 2^k es $k2^k + 1$ y, por el principio de las casillas, hay un círculo (i, j) con $c(i, j) \geq k + 1$. Solo necesitamos ver esto para $n = 2^k$, pues si $n = 2^k + r < 2^{k+1}$, entonces $\lfloor \log_2 n \rfloor = k$ y nos limitamos a ver las primeras 2^k filas y hay un camino ninja

que pasa por al menos $k+1$ círculos rojos y, por lo tanto, también hay uno si continúa por las siguientes r filas.
Haremos inducción en k. La base de inducción es $k=0$ y, para $k=1$, es claro que la suma es 1. Supongamos que para algún entero $k \geq 1$, la suma de la fila 2^k es $k2^k+1$. Sea S_i la suma de los números en los círculos de la fila i. Entonces,

$$S_{i+1} \geq S_i + \max_j c(i,j) + 1.$$

En efecto, supongamos que (i,j) es tal que $c(i,j)$ es máximo en la fila i. Hacemos el siguiente emparejamiento: si $k<j$, entonces $(i,k) \leftrightarrow (i+1,k)$ y, si $k>j$, entonces $(i,k) \leftrightarrow (i+1,k+1)$. Sabemos que en ambos casos, $c(i,k) \leq c(i+1,k), c(i+1,k+1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= \sum_{k=1}^{i+1} c(i+1,k) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} c(i+1,k) + c(i+1,j) + c(i+1,j+1) + \sum_{k=j+1}^{i+1} c(i+1,k+1) \\ &\geq \sum_{k=1}^{j-1} c(i,k) + 2c(i,j) + \sum_{k=j+1}^{i} c(i,k) + 1 \\ &= S_i + c(i,j) + 1. \end{aligned}$$

El $+1$ en la desigualdad se sigue de que hay un círculo rojo en la fila $i+1$, por lo que para ese círculo $(i+1,k)$, tenemos que $c(i+1,k) = c(i,k)+1$ o $c(i+1,k+1) = c(i,k)+1$.
Por la hipótesis de inducción, tenemos que $S_{2^k} \geq k2^k+1$ y el máximo en la fila es al menos $k+1$ por el principio de las casillas. Por lo tanto, tenemos que $S_{2^k+1} \geq k2^k+1+k+1+1$ y se puede ver que $S_{2^k+r} \geq k2^k+1+r(k+1+1)$, ya que en cada fila siguiente el máximo sigue siendo al menos $k+1$. Luego, en la fila 2^{k+1} la suma es al menos $S_{2^{k+1}} = S_{2^k+2^k} \geq k2^k+1+2^k(k+2) = k2^{k+1}+2^{k+1}+1 = (k+1)2^{k+1}+1$, que es lo que queríamos demostrar.

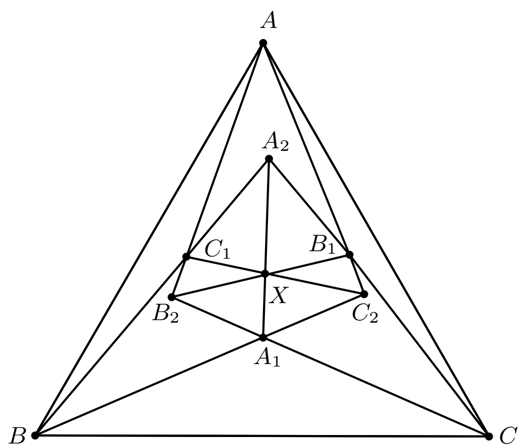
Solución del problema 6. Sean δ_A, δ_B y δ_C, los circuncírculos de los triángulos AA_1A_2, BB_1B_2 y CC_1C_2, respectivamente. La estrategia general de la solución es determinar dos puntos distintos con la misma potencia respecto de δ_A, δ_B y δ_C.

Afirmación. A_1 es el circuncentro del triángulo A_2BC y las respectivas variaciones cíclicas.

Demostración. Como A_1 está sobre la mediatriz de BC y dentro del triángulo BA_2C, es suficiente demostrar que $\angle BA_1C = 2\angle BA_2C$. Esto último es consecuencia de que

$$\begin{aligned}\angle BA_2C &= \angle A_2BA + \angle BAC + \angle ACA_2\\ &= \frac{1}{2}\,(180^\circ - \angle AC_1B) + (180^\circ - \angle CB_1A) + 60^\circ\\ &= 240^\circ - \frac{1}{2}\,(480^\circ - \angle BA_1C)\\ &= \frac{1}{2}\angle BA_1C.\end{aligned}$$

$\square$



Por los circuncentros de la afirmación anterior, tenemos que

$$\angle B_1B_2C_1 = \angle B_1B_2A = \angle B_2AB_1 = \angle C_1AC_2 = \angle AC_2C_1 = \angle B_1C_2C_1,$$

lo que significa que el cuadrilátero $B_1C_1B_2C_2$ es cíclico. De manera análoga se puede demostrar que los cuadriláteros $C_1A_1C_2A_2$ y $A_1B_1A_2B_2$ también son cíclicos.
Observemos que el hexágono $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ no es cíclico ya que

$$\angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 + \angle A_2B_1C_2 = 480^\circ \neq 360^\circ.$$

Ahora podemos aplicar el teorema del eje radical a los tres círculos, para demostrar que A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 concurren en un punto X el cual tiene la misma potencia con respecto a δ_A, δ_B y δ_C.
Supongamos que el circuncírculo del triángulo A_2BC interseca a δ_A en $A_3 \neq A_2$. De manera análoga definimos a los puntos B_3 y C_3.

Afirmación. BCB_3C_3 es cíclico.

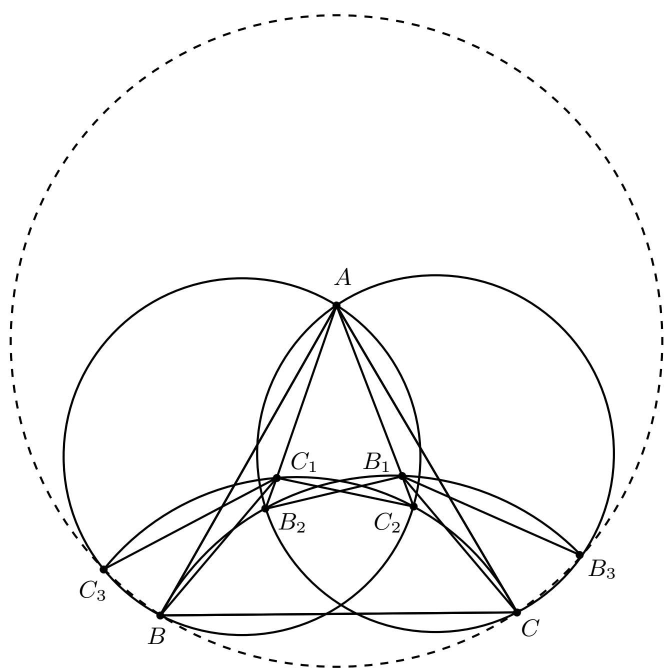
Demostración. Usando ángulos dirigidos, tenemos que

$$\begin{aligned}\angle BC_3C &= \angle BC_3C_2 + \angle C_2C_3C = \angle BAC_2 + \angle C_2C_1C\\ &= 90^\circ + \angle(C_1C, AC_2) + \angle C_2C_1C \qquad \text{(ya que } CC_1 \perp AB)\\ &= 90^\circ + \angle C_1C_2B_1.\end{aligned}$$

De manera análoga, se puede demostrar que $\angle CB_3B = 90^\circ + \angle B_1B_2C_1$. Luego, usando que $B_1C_1B_2C_2$ es cíclico, obtenemos que

$$\angle BB_3C = 90^\circ + \angle C_1B_2B_1 = 90^\circ + \angle C_1C_2B_1 = \angle BC_3C,$$

de donde se sigue el resultado. □



De manera análoga, se puede demostrar que CAC_3A_3 y ABA_3B_3 son cíclicos. Observemos que el hexágono $AC_3BA_3CB_3$ no es cíclico, porque si lo fuera, entonces el cíclico AB_2CB_3 implicaría que B_2 está sobre la circunferencia ABC, lo cual es imposible ya que B_2 está dentro del triángulo ABC. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema del eje radical a los tres círculos para obtener que AA_3, BB_3 y CC_3, concurren en un punto Y el cual tiene la misma potencia con respecto a δ_A, δ_B y δ_C.

Antes de terminar, haremos unas observaciones técnicas.

- Sea O el centro del triángulo ABC. Tenemos que

$$\angle BA_1C = 480^\circ - \angle CB_1A - \angle AC_1B > 480^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 120^\circ,$$

por lo que A_1 está dentro del triángulo BOC. Obtenemos resultados análogos para B_1, C_1 y, por consiguiente, los triángulos BA_1C, CB_1A y AC_1B, tienen interiores disjuntos. Esto implica que $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ es un hexágono convexo. Por lo tanto, X está sobre el segmento A_1A_2 y, por ende, está dentro de δ_A.

- Como A_1 es el centro de A_2BC, tenemos que $A_1A_2 = A_1A_3$ y, usando el cíclico $AA_2A_1A_3$, obtenemos que las rectas AA_2 y $AA_3 \equiv AY$ son reflexiones en la recta AA_1. Como X está sobre el segmento A_1A_2, la única forma en que $X \equiv Y$ es si A_1 y A_2 están ambos sobre la mediatriz de BC. Pero esto forza a B_1 y C_1 ser también reflexiones en esta línea, lo que significa que $A_1B_1 = A_1C_1$, lo que contradice que el triángulo $A_1B_1C_1$ es escaleno.

En conclusión, tenemos puntos distintos X, Y, con la misma potencia con respecto a δ_A, δ_B y δ_C, por lo que estos círculos tienen un eje radical común. Como X está dentro de δ_A (y análogamente δ_B y δ_C), este eje radical interseca a los círculos en dos puntos y, por lo tanto, δ_A, δ_B y δ_C tienen dos puntos en común.

Comentario. Una construcción alternativa para el punto Y, se sigue observando que

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\angle BAA_2}{\operatorname{sen}\angle A_2AC} &= \frac{\frac{A_2B}{AA_2}\operatorname{sen}\angle A_2BA}{\frac{A_2C}{AA_2}\operatorname{sen}\angle ACA_2} = \frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle C_1BA}{\operatorname{sen}\angle ACB_1}\\ &= \frac{\operatorname{sen}\angle B_1CB}{\operatorname{sen}\angle CBC_1}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle C_1BA}{\operatorname{sen}\angle ACB_1}\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\operatorname{sen}\angle BAA_2}{\operatorname{sen}\angle A_2AC}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle CBB_2}{\operatorname{sen}\angle B_2BA}\cdot\frac{\operatorname{sen}\angle ACC_2}{\operatorname{sen}\angle C_2CB} = 1.$$

Luego, por el teorema de Ceva, AA_2, BB_2 y CC_2 concurren y, de esta forma, podemos construir el conjugado isogonal de este punto de concurrencia, el cual resulta ser Y.

XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

Solución del problema 1. (Solución de Leonardo Melgar Rubí). Notemos que todos los enteros pares son azules ya que se pueden expresar como $2n = n + n$, que claramente son dos enteros positivos del mismo color.
Asumamos que $2k + 1$ es el primer impar azul, lo que quiere decir que $2k + 1$ y 2 son azules, por lo que $2k+3 = 2(k+1)+1$ es azul. Es decir, si tenemos un número impar de color azul, podemos asegurar que el siguiente impar también será azul. Luego, si $2k + 1$ es el primer impar azul, a partir de aquí todos los números serán azules.

Por lo que podemos concluir que todas las coloraciones posibles se ven de dicha manera, es decir, todos los pares son azules y todos los impares a partir de cierto número lo son también. Estas coloraciones son únicas y funcionan.

Solución del problema 2. (Solución de Andrea Sarahí Cascante Duarte). Sean $A(k) = 3k - 1$, $B(k) = 2k + 1$ y $C(k) = \frac{k}{2}$. Procederemos por inducción sobre k.
Base inductiva. Para ver que $k = 1$ cumple, notemos que $1 = 3^0$. Por lo que probaremos el siguiente lema.
Lema. Podemos llegar a 3^{k+1} partiendo de 3^k, mediante la siguiente secuencia de pasos: A, C, B.
Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A(3^k) &= 3^{k+1} - 1, \\ C(3^{k+1} - 1) &= \frac{3^{k+1} - 1}{2}, \\ B\left(\frac{3^{k+1} - 1}{2}\right) &= 2\left(\frac{3^{k+1} - 1}{2}\right) + 1 = 3^{k+1}. \end{aligned}$$

□

Por lo que del 3^0 podemos llegar al 3^1 y luego podemos llegar al 3^2 y así sucesivamente, hasta llegar al 3^{2023}. De manera que partiendo del 1 podemos llegar a 3^{2023}.
Si $k = 2$, podemos llegar a 1 únicamente aplicando C. Al llegar al 1, sabemos que podemos llegar al 3^{2023}, por lo que para $k = 2$ también se cumple.
Si $k = 3$, ya vimos que las potencias de 3 cumplen por el Lema.
Si $k = 4$, como $C(4) = 2$ y 2 cumple, entonces 4 también.
Si $k = 5$, tenemos que $B(5) = 11$, $A(11) = 32$, $C(32) = 16$, $C(16) = 8$, $C(8) = 4$ y, como ya tenemos que 4 cumple, entonces 5 también cumple.
De base inductiva tenemos que los números del 1 al 5 funcionan.
Hipótesis de inducción. Supongamos que podemos llegar a 3^{2023} desde los números del 1 al n.
Paso inductivo. Demostraremos que podemos llegar a 3^{2023} desde el número $n + 1$. Dividiremos en casos, dependiendo de la paridad de $n + 1$.

a) $n + 1$ *es par.* Si hacemos $C(n + 1) = \frac{n+1}{2}$, claramente es un número entero que está en el intervalo de los números que ya cumplen por la hipótesis de inducción.

b) $n + 1$ *es impar.* En este caso, consideraremos 4 subcasos.

   - $n + 1 = 8m + 1$ *con m un entero no negativo.* En este caso, tenemos que

     $$8m + 1 \xrightarrow{B} 16m + 3 \xrightarrow{A} 48m + 8 \xrightarrow{C} 24m + 4 \xrightarrow{C} 12m + 2 \xrightarrow{C} 6m + 1$$

     y claramente, $6m+1 < 8m+1$. Luego, por la hipótesis de inducción, tenemos que $8m + 1$ cumple.

- $n+1 = 8m+3$ *con m un entero no negativo.* En este caso, tenemos que

$$8m+3 \xrightarrow{A} 24m+8 \xrightarrow{C} 12m+4 \xrightarrow{C} 6m+2$$

y claramente, $6m+2 < 8m+3$. Luego, por la hipótesis de inducción, tenemos que $8m+3$ cumple.

- $n+1 = 8m+5$ *con m un entero no negativo.* En este caso, tenemos que

$$8m+5 \xrightarrow{B} 16m+11 \xrightarrow{A} 48m+32 \xrightarrow{C} 24m+16 \xrightarrow{C} 12m+8 \xrightarrow{C} 6m+4$$

y claramente, $6m+4 < 8m+5$. Luego, por la hipótesis de inducción, tenemos que $8m+5$ cumple.

- $n+1 = 8m+7$ *con m un entero no negativo.* En este caso, tenemos que

$$8m+7 \xrightarrow{A} 24m+20 \xrightarrow{C} 12m+10 \xrightarrow{C} 6m+5$$

y claramente, $6m+5 < 8m+7$. Luego, por la hipótesis de inducción, tenemos que $8m+7$ cumple.

Luego, desde $n+1$ impar podemos llegar a 3^{2023}.

Esto concluye la inducción.

Solución del problema 3. (Solución de Iker Torres Terrazas). Sean

$$\begin{aligned} A &= a(a^2+3b^2+3ab+2bc) = a^3+3ab^2+3a^2b+2abc, \\ B &= b(b^2+3c^2+3bc+2ca) = b^3+3bc^2+3b^2c+2abc, \\ C &= c(c^2+3a^2+3ca+2ab) = c^3+3a^2c+3c^2a+2abc. \end{aligned}$$

Observemos que $A+B+C = (a+b+c)^3$. Entonces, aplicando la desigualdad útil[3] tenemos que

$$\begin{aligned} &\frac{a^3}{a^2+3b^2+3ab+2bc} + \frac{b^3}{b^2+3c^2+3bc+2ca} + \frac{c^3}{c^2+3a^2+3ca+2ab} \\ &= \frac{a^4}{A} + \frac{b^4}{B} + \frac{c^4}{C} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{A+B+C} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^3}. \end{aligned}$$

Como $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ (pues $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$ y $a^2+c^2 \geq 2ac$), se sigue que

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^3} \geq \frac{\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^2}{(a+b+c)^3} = \frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c)^3} = \frac{a+b+c}{9}.$$

[3]**Desigualdad útil.** Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos, se cumple que:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

La igualdad se da si y solo si existe un número real λ tal que $a_i = \lambda x_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostraremos que

$$\frac{a+b+c}{9} > \frac{1}{6\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}, \tag{24}$$

lo que concluirá la prueba.
Observemos que

$$\frac{a+b+c}{9} > \frac{1}{6\left(a^2+b^2+c^2\right)^2},$$

si y solo si

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)^2},$$

si y solo si

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)^2 > \frac{3}{2},$$

si y solo si

$$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)^4 > \frac{9}{4},$$

si y solo si

$$(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca))(a^2+b^2+c^2)^4 > \frac{9}{4}. \tag{25}$$

Como las desigualdades (24) y (25) son equivalentes, basta demostrar la desigualdad (25).
Tenemos que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca = 1$ (pues $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$ y $a^2+c^2 \geq 2ac$), por lo que $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 1+2 = 3$ y $(a^2+b^2+c^2)^4 \geq 1^4 = 1$, de donde se sigue que

$$(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca))(a^2+b^2+c^2)^4 \geq 3 > \frac{9}{4},$$

como queríamos.

Solución del problema 4. (Solución de Juan Luis Manríquez Sequera). Sean $A = \overline{ab}$ y $B = \overline{cd}$. Queremos que el producto $A \cdot B$ sea un divisor positivo de $\overline{AB} = 100A + B$. En particular, $A \mid 100A + B$ y $B \mid 100A + B$.
Como $A \mid 100A + B$ y sabemos que $A \mid 100A$, resulta que $A \mid B$, esto es, $AK = B$ para algún entero positivo K. Además, como $B \mid 100A + B$ y $B \mid B$, se sigue que $B \mid 100A$. Sustituyendo la igualdad anterior, obtenemos que $AK \mid 100A$, de donde $K \mid 100$, por lo que los valores posibles de K son: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. Ahora analizaremos cada caso.

a) Si $K = 1$, la condición inicial es $A \cdot A \mid 100A + A$, esto es, $A^2 \mid 101A$, lo cual implica que $A \mid 101$. Como 101 es primo, $A = 1$ o $A = 101$, lo cual no es posible, ya que A es un número de dos dígitos.

b) Si $K = 2$, la condición inicial es $A \cdot 2A \mid 100A + 2A$, esto es, $2A^2 \mid 102A$, lo cual implica que $A \mid 51$. Los divisores positivos de 51 son 1, 3, 17 y 51. Como A debe ser un número de dos dígitos, las opciones son $A = 17$ o $A = 51$, lo cual implica que $B = 2 \cdot 17 = 34$ o $B = 2 \cdot 51 = 102$. Sin embargo, como B es un número de a lo más dos dígitos, la única opción es $A = 17$ y $B = 34$. Verificamos que $17 \cdot 34 = 578 \mid 1734$, por lo que 1734 es guanaco.

c) Si $K = 4$, la condición inicial es $A \cdot 4A \mid 100A + 4A$, esto es, $4A^2 \mid 104A$, lo cual implica que $A \mid 26$. Los divisores positivos de 26 son 1, 2, 13 y 26, pero como A es de dos dígitos, las posibilidades son $A = 13$ o $A = 26$, lo cual implica que $B = 52$ o $B = 104$. Sin embargo, como B es un número de a lo más dos dígitos, la única opción es $A = 13$ y $B = 52$. Verificamos que $13 \cdot 52 = 676 \mid 1352$, por lo que 1352 es guanaco.

d) Si $K = 5$, la condición inicial es $A \cdot 5A \mid 100A + 5A$, esto es, $5A^2 \mid 105A$, lo cual implica que $A \mid 21$. Los divisores positivos de 21 son 1, 3, 7 y 21, pero como A es de dos dígitos, la única opción es $A = 21$, lo cual implica que $B = 105$. Sin embargo, como B tiene a lo más dos dígitos, no hay soluciones en este caso.

e) Si K es alguno de los números 10, 20, 25, 50 o 100, entonces $k \geq 10$, lo cual implica que $B \geq 10a$. Pero, como A es un número de dos dígitos, B tendría al menos 3 dígitos, lo cual no es posible ya que B tiene a lo más dos dígitos. Luego, no hay soluciones en este caso.

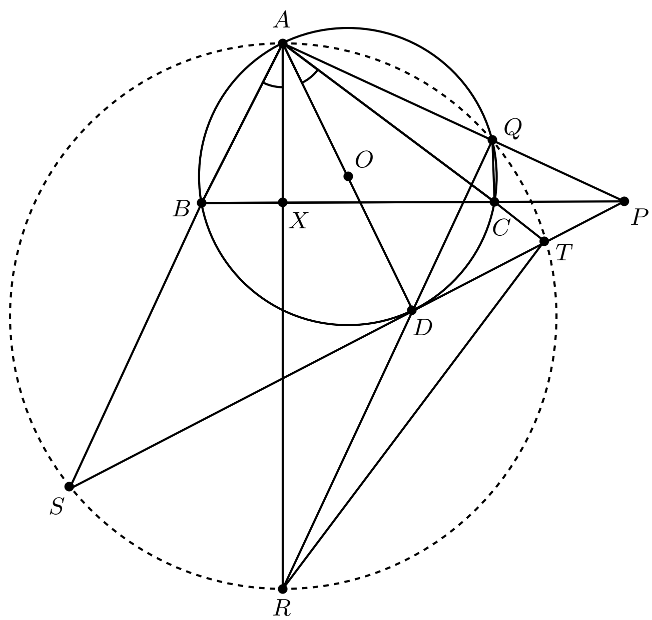
Por lo tanto, los únicos números guanacos de 4 dígitos son: 1734 y 1352.

Solución del problema 5. (Solución de Andrea Sarahí Cascante Duarte). Comenzaremos demostrando el siguiente resultado.
Lema. En un triángulo ABC con circuncentro O y ortocentro H, se cumple que

$$\angle BAH = \angle CAO.$$

Demostración. Sea $\angle OAC = \alpha$. Como $OA = OC$, tenemos que $\angle ACO = \alpha$, lo cual implica que $\angle AOC = 180^\circ - 2\alpha$. Además, como $\angle AOC$ es un ángulo central, tenemos que $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$ y, como AH y BC son perpendiculares, se sigue que $\angle BAH = \angle CAO$. □

Continuando con la solución del problema, sean X el punto de intersección de AR con BP y $\angle BAX = \theta$. Aplicando el lema anterior, tenemos que $\angle DAT = \theta$, ya que D es diametralmente opuesto a A en Γ. Como ℓ es tangente a la circunferencia Γ en D, se sigue que AD y ℓ son perpendiculares y, como AD es un diámetro, tenemos que DQ y AQ son perpendiculares. Luego, $\angle ATP = 90^\circ + \theta$ y $\angle DQC = \theta$. Además, como DQ y AP son perpendiculares, tenemos que $\angle CQP = 90^\circ - \theta$. En consecuencia, $\angle CQP + \angle CTP = 180^\circ$, por lo que el cuadrilátero $CQPT$ es cíclico. Además, como $\angle RXP = \angle RQP = 90^\circ$, tenemos que el cuadrilátero $RPQX$ también es cíclico.



Por lo tanto, tenemos que $AQ \cdot AP = AC \cdot AT$ y $AQ \cdot AP = AR \cdot AX$, por lo que $AC \cdot AT = AR \cdot AX$, lo cual implica que el cuadrilátero $XCTR$ es cíclico, esto es, $\angle RXC + \angle RTC = 180°$. Como $\angle RXC = 90°$, resulta que $\angle RTC = 90°$ y, como $\angle ATD = 90° - \theta$, concluimos que $\angle DTR = \theta$. Luego, $\angle SAR = \angle STR = \theta$, por lo que $ATRS$ también es cíclico, esto es, $\angle ATR + \angle ASR = 180°$, de donde obtenemos que $\angle ASR = 180° - \angle ATR = 180° - 90° = 90°$. Entonces, tenemos que $\angle RQA = \angle RTA = 90°$, por lo que T está en el circuncírculo del triángulo AQR y $\angle RQA = \angle RSA = 90°$. Por lo tanto, S está en el circuncírculo del triángulo AQR, que es lo que queríamos demostrar.

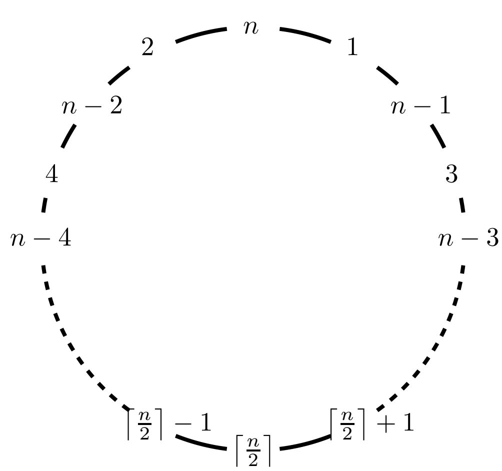
Solución del problema 6. (Solución de Leonardo Melgar Rubí). Comenzaremos demostrando el siguiente resultado.

Lema. No puede haber 2 parejas de sapos adyacentes al inicio.

Demostración. Supongamos que hay 2 parejas de sapos adyacentes al inicio (b_i, b_{i+1}) y (b_j, b_{j+1}), con $i \neq j$. Entonces, hay dos sapos en piedras adyacentes al inicio. Sin pérdida de generalidad, supongamos que están en las piedras a_i y a_{i+1}, con $a_i \neq n$. Tenemos que $a_i < n$ si y solo si $x = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_k < a_{i+1} + \cdots + a_k + a_{k+1}$, donde a_{k+1} es la piedra con el número n. Después de x minutos, el sapo que inicialmente estaba en a_i terminará en a_{k+1} y, después de x minutos, el sapo que inicialmente estaba en a_{i+1}, seguirá en a_{k+1}, ya que tuvo que haber llegado antes a a_{k+1} y que el sapo b_i (ya que avanzan en sentido de las manecillas del reloj). El sapo b_{i+1} se retira de a_{k+1} después de x minutos, es decir, dentro de al menos $x+1$ minutos. Por lo tanto, durante el minuto x, el sapo que estaba en a_i y el sapo que estaba en a_{i+1}, ambos estarán en

a_{k+1}, lo que contradice que $n \neq a_i$ y que $i \neq j$. Por lo tanto, no puede haber 2 parejas de sapos adyacentes al inicio. $\square$

Continuando con la solución del problema, demostraremos que el máximo número de sapos es $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Primero demostraremos que no es posible tener más sapos.
Si n es par, esto es, $n = 2m$, entonces asumiremos que la princesa puede colocar más de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sapos, esto es, al menos puede colocar $m + 1$. Separemos en paquetes de 2 como $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \ldots, (a_{2m-1}, a_{2m})$, donde los a_i son los números de piedras en ese orden. Por lo que hay m paquetes y al menos $m + 1$ sapos, entonces hay al menos 2 sapos en un mismo paquete al inicio. Supongamos que este paquete es (a_{2j}, a_{2j+1}). Entonces, tenemos dos sapos en piedras adyacentes a_{2i+1}, a_{2i+2} y en a_{2j}, a_{2j+1}. Notamos entonces que $a_{2i+1} \neq a_{2j}$. Por lo tanto, estos 2 pares de sapos adyacentes son distintos y, por el lema previo, esto es una contradicción. De manera análoga, podemos hacer el mismo proceso separando en paquetes de 2 como $(a_2, a_3), (a_4, a_5), \ldots, (a_{2m}, a_1)$.
Ahora si n es impar, esto es $n = 2m + 1$, entonces asumimos que la princesa pudo colocar más de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sapos, es decir, al menos puede colocar $m+2$. Consideremos a_i tal que hay un sapo en a_i y no hay sapos en a_{i-1} y a_{i+1}. Si no fuera el caso, habría 2 pares de sapos adyacentes al inicio (lo cual es una contradicción) o no hay sapos. Por lo que resta colocar al menos $m + 1$ sapos en $2m - 2$ piedras, por lo que podemos separarlas en $m - 1$ paquetes de dos piedras adyacantes. Por el principio de las casillas, no puede haber 3 sapos en 2 piedras, por lo que hay 2 paquetes adyacentes con 2 sapos y, por el lema anterior, esto es una contradicción.
Entonces, sin importar la paridad de n, la princesa no puede colocar más de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Ahora veremos que el máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ es alcanzable con el siguiente acomodo:



colocando un sapo en las piedras en posición impar, contando desde el 1 en el sentido de las manecillas del reloj. Es decir, alternando: una piedra tiene un sapo y la siguiente no y así sucesivamente, comenzando en la piedra con el 1.
Para ver que efectivamente funciona, supongamos lo contrario. Veamos que después de

$\frac{n(n+1)}{2}$ minutos, todos regresan al acomodo inicial con el tiempo inicial. Es decir, solo nos interesan los primeros $\frac{n(n+1)}{2}$ minutos. Supongamos que b_i y b_{i+x} están en a_k en algún punto simultáneamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < i+x \leq k$. Tenemos que b_i llega después de b_{i+x} a a_k porque tiene que recorrer más piedras (lo que se traduce en más minutos). Observemos que b_i llega a a_k en $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{k-1}$ y b_{i+x} se va de a_k en $a_{i+x}+\cdots+a_{k-1}+a_k$. Luego, si están al menos un minuto ambos sapos en a_k, entonces b_i llega a a_k antes de que b_{i+x} se vaya, esto es,

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{k-1} < a_{i+x} + \cdots + a_{k-1} + a_k$$

si y solo si

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+x-1} < a_k \leq n,$$

lo que es una contradicción, ya que

$$n \leq a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+x-1}$$

pues $a_i + a_{i+1} \geq n$ para todo a_i y $x \geq 2$, a menos que a_i sea n, en cuyo caso se cumple.

Por lo tanto, $n \leq a_i + \cdots + a_{i+x-1} < a_k \leq n$ contradice que había dos sapos en una misma piedra por al menos 1 minuto. Por lo tanto, es posible alcanzar el máximo con este acomodo.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*

2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*

3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

José Eduardo Cázares Tapia

David Cossío Ruiz

Kenya Verónica Espinosa Hurtado

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Myriam Hernández Ketchul

Ana Paula Jiménez Díaz

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

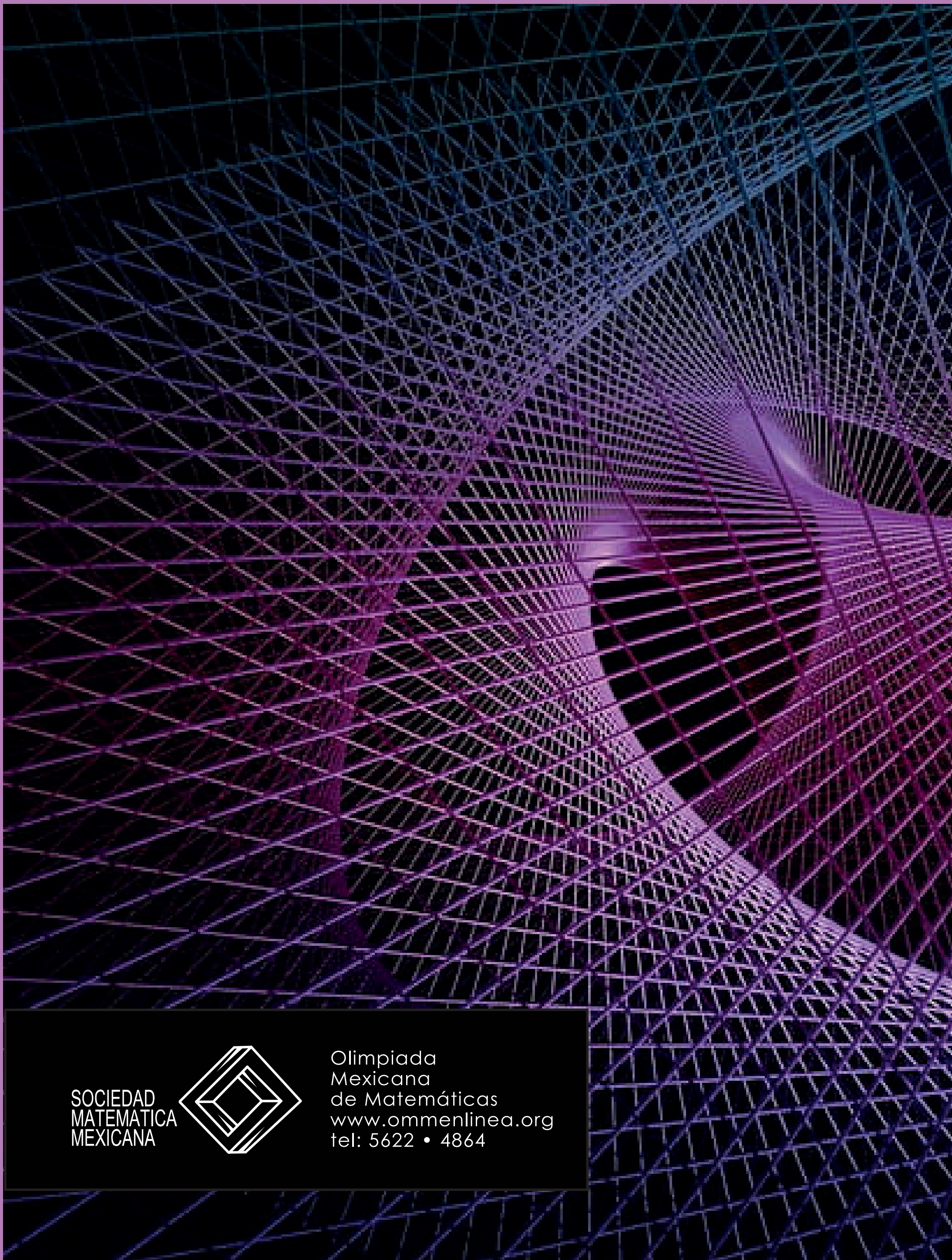
Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Rita Vázquez Padilla

Hugo Villanueva Méndez



SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864