ISSN 2954-4971

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

17 • 01

Información legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS (Año 17, No. 1, Marzo de 2025) es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A. C.

Dirección: Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Del. Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México.
Tel.: 55-5849-6709
Email: smm@smm.org.mx
Sitio web: https://www.smm.org.mx
Editor responsable: Pedro David Sánchez Salazar.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Año 2025, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán, C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
https://www.ommenlinea.org

Editor en jefe:
Pedro David Sánchez Salazar
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
Mérida, C.P. 97203
Yucatán

Marzo de 2025

Índice general

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral auspiciada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemáticas simples y elegantes, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

La Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) desde los albores de ésta. Este programa sólo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido en el desarrollo científico del

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

Probando identidades combinatorias con caminos

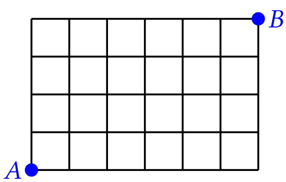
Pedro David Sánchez Salazar
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

Resumen. *En este artículo se presenta una forma de demostrar las identidades básicas con coeficientes binomiales que se suelen estudiar en los entrenamientos, pero interpretando a los coeficientes binomiales como el número de maneras en que se pueden recorrer ciertas cuadrículas.*

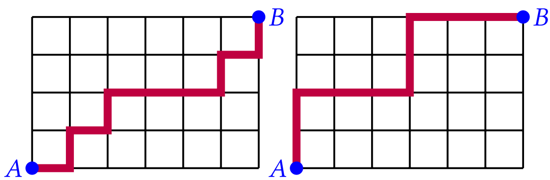
Caminos en cuadrículas

Uno de los problemas más conocidos y tradicionales que se presenta a los alumnos que empiezan a entrenar sobre combinaciones es el problema de *recorrer una cuadrícula*. Si no lo conoces, aquí te lo presentamos.

Problema 1. ¿Cuántos caminos hay siguiendo las líneas de la cuadrícula en la siguiente figura, desde el punto A hasta el punto B, si únicamente se permite hacer movimientos hacia la derecha o hacia arriba?



A continuación mostramos un par de caminos posibles.



El problema anterior también es conocido como el problema de los caminos de longitud mínima porque los caminos que estamos considerando son precisamente los caminos más cortos posibles que hay entre el punto A y el punto B.

La solución usual de este problema consiste en convertir el problema de contar caminos en un problema de contar *palabras*, observando que podemos escribir cada recorrido mediante una sucesión de letras H y letras V, en donde cada paso horizontal corresponde con una letra H y cada paso vertical con una letra V. Por ejemplo, los dos recorridos mostrados arriba corresponderían a las palabras $HVHVHHHVHV$ y $VVHHHVVHHH$ respectivamente.

Ahora, observamos que cada palabra que obtenemos tiene exactamente 6 letras H y 4 letras V, porque siempre hay 6 movimientos horizontales y 4 verticales en cualquier recorrido; una consecuencia de lo anterior es que cualquier palabra obtenida tendrá exactamente 10 letras.

Pensando un poco más sobre esta relación nos podemos convencer también que la correspondencia va en ambas direcciones: cada recorrido es una palabra con 6 letras H y 4 letras V y, por otro lado, cualquier palabra que tiene 6 letras H y 4 letras V necesariamente describe un recorrido. En otras palabras, hemos obtenido lo que en matemáticas se denomina una *biyección*.

Las biyecciones son como caldo de pollo para el alma de quien hace combinatoria porque, cada vez que tenemos una biyección entre dos conjuntos (en este caso, un conjunto de recorridos y un conjunto de palabras), necesariamente esos dos conjuntos poseen la misma cantidad de elementos y, si podemos determinar esa cantidad en un conjunto, automáticamente habremos determinado la cantidad de elementos en el otro.

Dicho de otra foma, si queremos saber cuántos caminos hay en la figura, basta saber cuántas posibles palabras con 6 letras H y 4 letras V se pueden formar, pero lo anterior es equivalente a tener $6 + 4 = 10$ espacios por llenar y *escoger* 6 de ellos para poner las letras H (quedando fijos los otros espacios con la letra V). Sin embargo, el número de formas de escoger 6 cosas (espacios) cuando se tienen 10 está dado por: $\binom{10}{4}$.

A modo de recordatorio, el símbolo $\binom{m}{k}$ se lee "*combinaciones de m en k*" o simplemente "*m en k*" y representa el número de formas en que puedes elegir (sin importar el orden) k objetos cuando tienes m posibilidades. En los libros de texto escolares pueden encontrarse otras notaciones, como $m\mathrm{C}k$, o C_k^m, pero en las olimpiadas la notación estándar es $\binom{m}{k}$. Existen varias formas de calcular el valor exacto, una de ellas usando factoriales, aunque preferimos la siguiente expresión para el valor de $\binom{10}{4}$:

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210,$$

en donde el numerador tiene $k = 4$ factores que van descendiendo desde $m = 10$. Otra forma de referirse a los números $\binom{m}{k}$ es como *coeficientes binomiales*.

Dado que $\binom{10}{4} = 210$, hay 210 palabras formadas por 6 letras H y 4 letras V y debido a la biyección antes construida, también habrá 210 caminos en la figura. $\square$

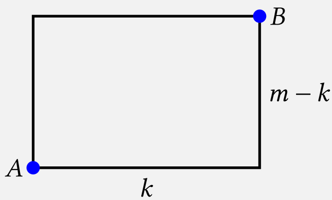
En el problema inicial, el hecho de que la cuadrícula tuviera 6 de ancho y 4 de alto no era relevante; pudimos haber considerado una cuadrícula que tuviese a casillas de ancho y b casillas de alto. Si repetimos el análisis, veremos que cada camino corresponde a una palabra que tiene a letras H y b letras V, por lo que siempre serán palabras de longitud $a+b$. Dado que el número de palabras corresponderá a escoger a de las $a+b$ posiciones para poner las letras H, nos permite concluir el siguiente resultado.

El número de recorridos en una cuadrícula de $a \times b$ que van de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha y en los que sólo se puede avanzar hacia la derecha o hacia arriba está dado por:

$$\binom{a+b}{a}.$$

Pero también podemos pensarlo de la forma inversa: dado un coeficiente binomial $\binom{m}{k}$, ¿qué cuadrícula tendría esa cantidad de caminos? Y, bajo este punto de vista, el resultado anterior lo podemos reescribir del siguiente modo.

El coeficiente binomial $\binom{m}{k}$ corresponde a la cantidad de recorridos de longitud mínima sobre una cuadrícula de tamaño $k \times (m-k)$.



Identidades combinatorias

Otro de los temas más comunes en los entrenamientos de combinatoria en las olimpiadas de matemáticas es la demostración de las propiedades que cumplen los coeficientes binomiales. Por ejemplo, las más básicas aparecen en el siguiente problema.

Problema 2. Si $0 \leq k \leq m$ son números enteros no negativos, demuestra que:

- $\binom{m}{m} = 1$.
- $\binom{m}{0} = 1$.
- $\binom{m}{1} = m$.

Tradicionalmente, ese tipo de identidades se demuestran de una manera algebraica (expresando cada coeficiente binomial como un cociente de producto de factoriales) o interpretando los coeficientes binomiales como formas de escoger objetos.

Para ilustrarlo, presentamos las demostraciones tradicionales.

- El valor de $\binom{m}{m}$ es 1 porque sólo hay una forma de elegir m objetos cuando tienes m objetos: escogiéndolos todos.
- El valor de $\binom{m}{0}$ es 1 porque sólo hay una forma de elegir 0 objetos cuando tienes m objetos: no escogiendo ninguno[1].
- El valor de $\binom{m}{1}$ es m porque hay m formas de elegir un sólo objeto cuando tienes m objetos.

Las primeras tres demostraciones son tan "directas" que pareciera que estamos andando en círculos, así que vamos a revisar una un poco más interesante.

Problema 3 (Identidad de simetría)**.** Si k y m son números enteros tales $0 \leq k \leq m$, entonces siempre se cumple

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}.$$

Demostración. El valor de $\binom{m}{k}$ es el número de formas en que podemos elegir k elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Sin embargo, observemos que cada vez que elegimos k de ellos, al mismo tiempo estamos determinando cuáles $m-k$ no son elegidos. Dicho de otra manera, podemos formar un conjunto de k elementos decidiendo cuáles $m-k$ elementos no están en el conjunto y, dado que esta última decisión la podemos hacer de $\binom{m}{m-k}$ formas, necesariamente se cumplirá $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$. □

Otra identidad fundamental sobre combinaciones es la denominada *identidad de Pascal*, la cual discutimos a continuación.

Problema 4 (Identidad de Pascal)**.** Si $1 \leq k \leq m$, entonces

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}.$$

Demostración. Una manera común de explicar porqué se cumple dicha identidad es considera un salón en donde hay m niños. El lado izquierdo, $\binom{m}{k}$, cuenta el número de formas en que se puede hacer un equipo con k estudiantes.

[1]Podría parecer que la cantidad es cero, pero esa es una confusión común. Estamos contando formas de hacer la elección, no cuántos objetos se eligen. De manera más precisa, $\binom{m}{0}$ cuenta la cantidad de subconjuntos con 0 elementos que tiene $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ y esa cantidad no es cero, ya que el conjunto vacío tiene cero elementos y, por lo tanto, sí hay una forma de hacer la elección.

Ahora consideremos un niño en específico, digamos Miguel. Cuando se forma un equipo, existen dos posibilidades: que Miguel haya sido seleccionado en el equipo o que no haya sido seleccionado en el equipo.

En el primer caso (cuando Miguel está en el equipo), podemos determinar la cantidad de formas de hacer los equipos observando que sólo necesitamos escoger cuáles $k-1$ de los otros $m-1$ estudiantes también estarán en el equipo. Pero el número de formas de elegir $k-1$ alumnos cuando hay $m-1$ para escoger es precisamente $\binom{m-1}{k-1}$.

En el segundo caso (cuando Miguel no está en el equipo), para formar un equipo hay que escoger k alumnos (dado que aún no hemos incluido a nadie), pero sólo tenemos $n-1$ para escoger (debido a que Miguel no está en el equipo). Esta elección la podemos hacer de $\binom{n-1}{k}$ formas.

Así, la cantidad total de equipos la podemos calcular sumando las cantidades obtenidas en ambos casos y concluimos entonces que el valor de $\binom{m}{k}$ debe coincidir con la suma $\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$. □

Como ejemplo final vamos a considerar una identidad adicional.

Problema 5 (Identidad de Vandermonde)**.** Si a, b, k son números enteros, entonces

$$\binom{a+b}{k} = \binom{a}{0}\binom{b}{k} + \binom{a}{1}\binom{b}{k-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{k-2} + \cdots + \binom{a}{k}\binom{b}{0}.$$

Demostración. Consideremos un salón de clase donde hay a niñas y b niños. Entonces $\binom{a+b}{k}$ cuenta el número de formas en que podemos tomar un equipo de k estudiantes.

Observemos ahora que el lado derecho de la identidad cuenta también el número de maneras en que podemos tomar un equipo de k estudiantes, pero separando en casos dependiendo de cuántas niñas hay en el equipo.

- Si un equipo tiene 0 niñas y k niños, lo podemos formar escogiendo 0 niñas de $\binom{a}{0}$ formas y luego eligiendo k niños de $\binom{b}{k}$ formas. Por lo tanto, el total es $\binom{a}{0}\binom{b}{k}$.
- Si un equipo tiene 1 niña y $k-1$ niños, lo podemos formar escogiendo 1 niña de $\binom{a}{1}$ formas y luego eligiendo $k-1$ niños de $\binom{b}{k-1}$ formas. Por lo tanto, el total es $\binom{a}{1}\binom{b}{k-1}$.
- Si un equipo tiene 2 niñas y $k-2$ niños, lo podemos formar escogiendo 2 niñas de $\binom{a}{2}$ formas y luego eligiendo $k-2$ niños de $\binom{b}{k-2}$ formas. Por lo tanto, el total es $\binom{a}{2}\binom{b}{k-2}$.

Y así sucesivamente... La cantidad total de formas de hacer el equipo es la suma de las cantidades en cada caso y, por ende,

$$\binom{a+b}{k} = \binom{a}{0}\binom{b}{k} + \binom{a}{1}\binom{b}{k-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{k-2} + \cdots + \binom{a}{k}\binom{b}{0}.$$

Antes de concluir la prueba, te puedes preguntar qué sucede cuando no hay suficientes niños o niñas para hacer la elección en ciertos casos. Por ejemplo, si hubiera $a = 6$ niñas, $b = 3$ niños y quisiéramos formar equipos de $k = 5$ estudiantes. Algunos términos que aparecerían en el lado derecho son $\binom{3}{4}$ y $\binom{3}{5}$. Esos valores son iguales a cero (dado que hay cero formas de elegir 4 niños cuando sólo hay 3, por ejemplo) y no alteran el valor total de la suma. En general, si $k > m$, entonces $\binom{m}{k} = 0$. $\square$

Identidades y caminos

Finalmente hemos llegado al punto interesante de esta propuesta: también es posible demostrar las identidades en la sección anterior considerando a los coeficientes binomiales como formas de hacer recorridos y no sólo como formas de hacer elecciones (de números, niños, etc.)

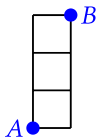
Consideremos las primeras tres identidades.

- $\binom{m}{m} = 1$.
- $\binom{m}{0} = 1$.
- $\binom{m}{1} = m$.

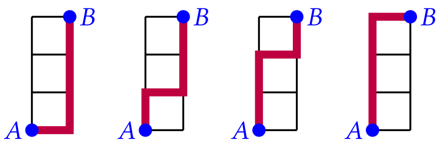
Demostración. Bajo la interpretación de caminos, $\binom{m}{m}$ nos está contando el número de formas de recorrer una cuadrícula que tiene $a = m$ casillas de ancho y $b = m - m = 0$ casillas de alto, es decir, un segmento. Pero, de un extremo a a otro, un segmento se puede recorrer de sólo una forma y, por lo tanto, $\binom{m}{m} = 1$.

Por otro lado, $\binom{m}{0}$ es el número de formas de recorrer una cuadrícula que tiene $a = 0$ casillas de ancho y $b = m - 0 = m$ casillas de alto, por lo que también es un segmento y solo habrá una forma de recorrerlo (de un extremo a otro).

Para $\binom{m}{1}$ necesitamos considerar una cuadrícula que tenga $a = 1$ casillas de ancho y $b = m - 1$ casillas de alto. Por ejemplo, la siguiente figura es la cuadrícula que corresponde a $\binom{4}{1}$.



La cuadrícula del ejemplo se puede recorrer de las 4 maneras siguientes.



Observemos que son 4 dado que hay exactamente 4 pasos horizontales posibles; es decir, cada recorrido está determinado por cuál de los 4 pasos horizontales se está usando. Y dado que en una cuadrícula de $1 \times (m-1)$ hay m pasos horizontales posibles, tendremos $\binom{m}{1} = m$. $\square$

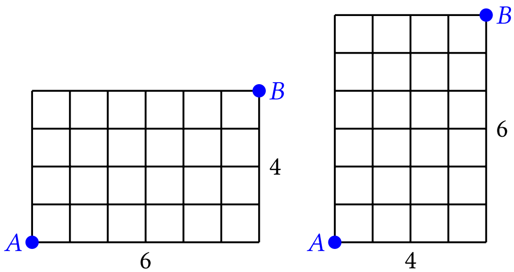
Armados de esta interpretación, vamos a intentar demostrar las otras identidades de la sección anterior.

Problema 6 (Identidad de simetría)**.** Si k y m son números enteros tales $0 \leq k \leq m$, entonces siempre se cumple

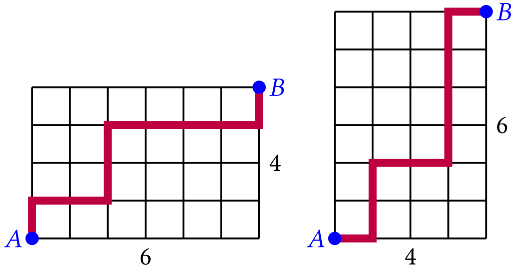
$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}.$$

Demostración. El valor de $\binom{m}{k}$ es el número de recorridos dentro de una cuadrícula de tamaño $k \times (m-k)$, mientras que $\binom{m}{m-k}$ es el número de recorridos dentro de una cuadrícula de tamaño $(m-k) \times (m-(m-k))$, pero como $m-(m-k) = k$, estamos recorriendo una cuadrícula de $(m-k) \times k$.

A manera de ilustración de lo anterior, consideremos $\binom{10}{6}$ y $\binom{10}{10-6} = \binom{10}{4}$. Las cuadrículas que están siendo consideradas son



Ahora bien, las cantidades $\binom{10}{6}$ y $\binom{10}{4}$ son iguales porque ambas están contando el número de formas de recorrer la misma cuadrícula, salvo que se ha hecho un intercambio entre horizontal y vertical. De este modo, cualquier recorrido de la primera (que tiene 6 casillas horizontales y 4 verticales), al intercambiar las direcciones, se convierte en un recorrido de la segunda (que tiene 4 casillas horizontales y 6 verticales). Como ilustración, en la siguiente figura tenemos un ejemplo específico de recorrido y podemos observar que, cada vez que en la primera hacemos una movimiento *hacia arriba*, en la segunda estamos haciendo un movimiento *hacia la derecha* y viceversa. Cualquier camino de la cuadrícula de la izquierda corresponde con un camino en la cuadrícula de la derecha y todo camino de la cuadrícula de la derecha viene de un camino en la cuadrícula de la izquierda. Por lo tanto, debe haber exactamente la misma cantidad de recorridos en ambas.



El mismo argumento aplica de forma general para establecer $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$. $\square$

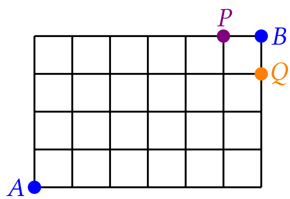
Pasamos ahora a la identidad de Pascal:

Problema 7 (Identidad de Pascal)**.** Si $1 \leq k \leq m$, entonces

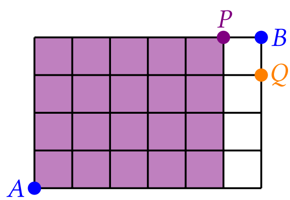
$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}.$$

Demostración. El lado izquierdo nos sugiere trabajar en una cuadrícula de $k \times (m-k)$. Queremos determinar la cantidad de recorridos, pero esta vez los recorridos los dividiremos en dos casos: recorridos cuyo último movimiento es horizontal y recorridos cuyo último movimiento es vertical.

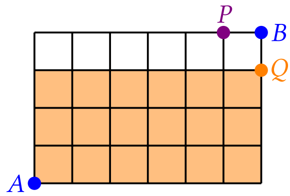
Otra manera de describir los casos es que todos los recorridos se dividen en aquellos que pasan por el punto P y en aquellos que pasan por el punto Q:



Nos preguntamos entonces ¿cuántos recorridos pasan por el punto P? La observación crucial es que los caminos que llegan a P y luego se mueven horizontalmente, son equivalentes a recorrer una cuadrícula de $(k-1) \times (m-k)$ porque tiene la misma altura que la original pero el ancho disminuye en 1.



De manera similar, el número de caminos que llegan a Q y luego terminan avanzando en vertical, lo podemos calcular observando que es igual al número de formas de recorrer una cuadrícula de tamaño $k \times (m-k-1)$, ya que tiene el mismo ancho que la original pero su altura disminuye en 1.



Combinando ambos casos obtenemos la identidad buscada:

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}.$$

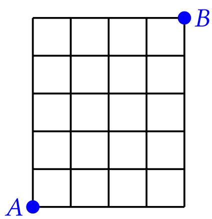
$\square$

Finalmente, cuando interpretamos la identidad de Vandermonde desde el punto de vista de caminos de longitud mínima, descubrimos que es una generalización de la identidad de Pascal sólo que, en vez de tomar los puntos que están a la izquierda y debajo de la esquina final, tomamos puntos en una diagonal distinta.

A manera de ejemplo consideremos el caso particular en el cual $a = 3, b = 6$ y $k = 4$. La identidad de Vandermonde correspondiente es

$$\binom{3+6}{4} = \binom{3}{0}\binom{6}{4} + \binom{3}{1}\binom{6}{3} + \binom{3}{2}\binom{6}{2} + \binom{3}{3}\binom{6}{1} + \binom{3}{4}\binom{6}{0}.$$

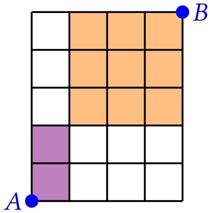
El lado izquierdo es igual a $\binom{9}{4}$ y nos indica que estamos contando recorridos en cuadrículas de 4×5.



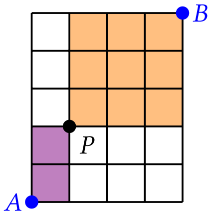
Intuimos que la suma del lado derecho es una descomposición en casos del mismo conteo. Fijémonos en un sumando específico, digamos $\binom{3}{1}\binom{6}{3}$, e interpretemos su significado en términos de recorridos.

Por un lado, $\binom{3}{1}$ está contando recorridos dentro de un rectángulo de tamaño 1×2, y por otro lado $\binom{6}{3}$ está contando recorridos dentro de un rectángulo de 3×3. El hecho de que los coeficientes binomiales aparecen en un producto indica que estamos haciendo primero un recorrido y, a continuación, realizamos otro recorrido.

La visualización correspondiente a la interpretación anterior es que $\binom{3}{1}\binom{6}{3}$ está contando aquellos recorridos que se mueven dentro de las siguientes zonas.



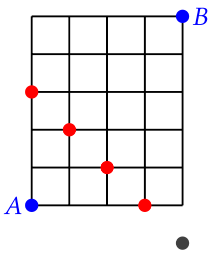
Pero otra manera de describir el término es que $\binom{3}{1}\binom{6}{3}$ cuenta justamente aquellos recorridos que pasan por el punto P en la siguiente figura:



Así, la descomposición en casos correspondiente a

$$\binom{3+6}{4} = \binom{3}{0}\binom{6}{4} + \binom{3}{1}\binom{6}{3} + \binom{3}{2}\binom{6}{2} + \binom{3}{3}\binom{6}{1} + \binom{3}{4}\binom{6}{0}$$

es dividir los recorridos dependiendo de por cual punto marcado en la siguiente figura pasa cada uno, observando que el término gris es igual a cero porque $\binom{3}{4} = 0$ y eso nos dice que ningún recorrido pasará por el punto marcado de gris.

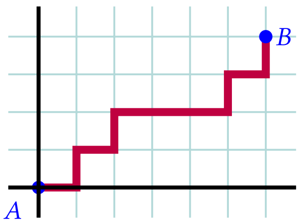


Se deja como ejercicio al lector completar la demostración general de esta identidad.

Para concluir hacemos la observación de que el problema de recorrer cuadrículas también lo podemos expresar en términos de recorridos en un sistema de coordenadas.

> Si $0 \leq k \leq m$, el número $\binom{m}{k}$ es igual al número de recorridos consistentes en pasos unitarios a la derecha o hacia arriba, que van del punto con coordenadas $(0,0)$ al punto con coordenadas $(k, m-k)$.

Por ejemplo, $\binom{10}{4}$ cuenta el número de caminos de la coordenada $(0,0)$ a la coordenada $(4,6)$.



Usando esta interpretación de caminos se propone al lector que demuestre la siguiente identidad.

Problema 8. Si m es un número entero no negativo, entonces

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m.$$

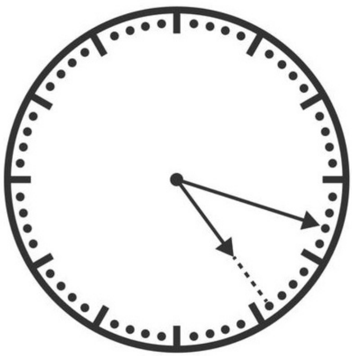
Bibliografía

- Benjamin, Arthur T. y Quinn, Jennifer J. *Proofs that Really Count. The Art of Combinatorial Proof.* The Mathematical Association of America. Dolciani Mathematical Expositions, Vol. 27 (2003), ISBN 0883853337.

Problemas de práctica

A continuación encontrarás diez problemas de práctica que seleccionamos especialmente para este número. Aprovechamos la ocasión para solicitar tu apoyo para enriquecer esta sección de la revista. Si tienes problemas inéditos que te gustaría compartir con nosotros, puedes contactarnos enviando un mensaje a `revistaomm@gmail.com`: ¡recibiremos con mucho gusto todas tus propuestas!

Problema 1. Un reloj de pared se cayó al piso y, por el impacto, todos los números se desprendieron de su carátula. El reloj se quedó marcando la hora que era cuando se cayó; al levantarlo del piso, el reloj lucía como se indica en la figura que se presenta enseguida. ¿A qué hora fue que se cayó dicho reloj?



Problema 2. Alicia, Beatriz y Claudia son amigas. Con ayuda de la información que se proporciona a continuación, determine los datos de cada una de ellas.

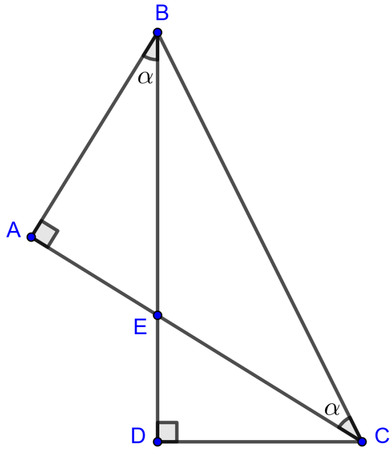
a) Beatriz no es García.

b) López es secretaria en una oficina.

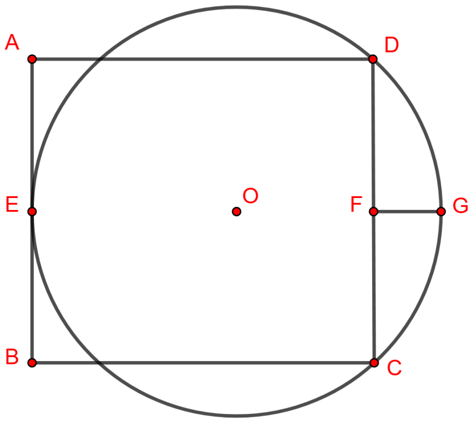
c) La actriz se llama Claudia.

d) La maestra no es Méndez.

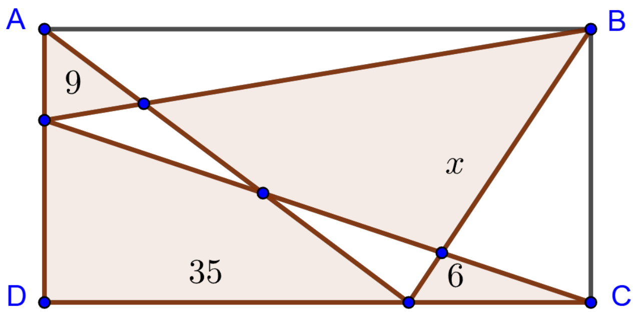
Problema 3. Considere el diagrama que se muestra a continuación. Si AB = CD, ¿a cuánto es igual α?



Problema 4. Considere la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro O que se muestra en el siguiente diagrama. Se sabe que C, D, E y G son puntos sobre $\mathscr{C}$. Se cumple además que A y B son puntos en la tangente por E de la circunferencia $\mathscr{C}$ y que ABCD es un cuadrado. Si F es el punto medio de CD, CD $\perp$ FG y FG $= \frac{\sqrt{2}}{4}$, ¿a cuánto es igual el área de ABCD?



Problema 5. ABCD es un rectángulo y los números indican las áreas de las respectivas regiones sombreadas. ¿Cuánto vale x?



Problema 6. En un conferencia había 5 estudiantes de secundaria y 6 estudiantes universitarios, entre otros asistentes. Antes de que el conferencista iniciara con su exposición, todos los presentes se saludaron de mano pero se observó que ninguno de los estudiantes de secundaria saludó a alguno de los estudiantes universitarios (y viceversa). Se contaron 61 saludos en total. ¿Cuántos personas había en la conferencia?

Problema 7. Los miembros de un club van a pagar una cuenta de \$ 600 en partes iguales. Si hubiera habido 20 miembros más, el costo para cada miembro hubiera sido de un peso menos. Calcule el número de miembros del club y la cuota que cada uno va a pagar.

Problema 8. Demuestre que $2024^{10} > 10(1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + 2023^9)$.

Problema 9. Determine todas las tercias de números primos (p, q, r) tales que $q \equiv 3 \pmod 4$ y $p^q - r^p = 2023$.

Problema 10. Decimos que un número primo es *suburbano* si divide a la suma de todos números primos menores que él. Determine si existen dos números primos suburbanos consecutivos.

Soluciones a los problemas de práctica

Solución 1.

Observando la posición de la manecilla de las horas vemos que habían transcurrido 48 minutos de la hora al momento de que el reloj se cayó. De esto se desprende que el minutero se encuentra entre las marcas en las que iban el 9 y el 10 y, por consiguiente, el reloj debió caer a las $10:48$. $\square$

Solución 2.

Podemos organizar la información dada en un tabla.

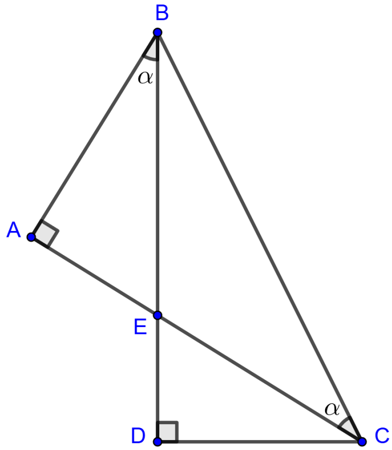
Nombre	Apellido	Empleo
Alicia		
Beatriz		
Claudia		Actriz

El objetivo es completar la tabla con los datos de las tres amigas. Puesto que Beatriz no se apellida García, entonces hay dos opciones para su apellido: López o Méndez. *Asumiendo* que su apellido es Méndez, el llenado de la tabla proseguiría como se se muestra a continuación (los números entre paréntesis indican el orden seguido para ingresar la información correspondiente a la tabla):

Nombre	Apellido	Empleo
Alicia		Maestra (2)
Beatriz	Méndez (1)	
Claudia		Actriz

Se anotó maestra como empleo para Alicia porque en el planteamiento del problema se señaló que el apellido de la maestra no podía ser Méndez. En este punto ha surgido un **conflicto** en el llenado de la tabla pues no hay otra opción más que reportar que el empleo de Beatriz es de secretaria en una oficina pero la condición b en el planteamiento del problema estipula que el apellido de la amiga que trabaja como secretaria es López. El **conflicto** proviene de suponer que el apellido de Beatriz es Méndez; ergo, el apellido de Beatriz es López y ella está empleada como secretaria en una oficina. Luego, Alicia es la maestra y su apellido es García (pues el apellido de la maestra no es Méndez) y el apellido de la actriz Claudia es Méndez. □

Solución 3.

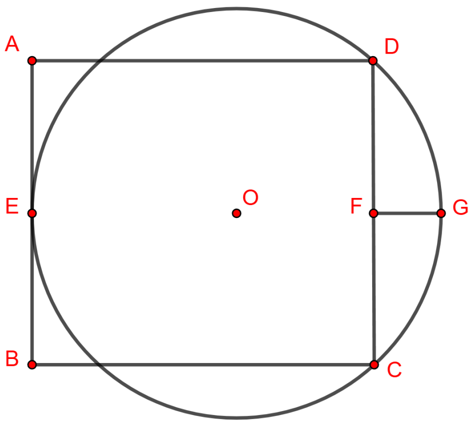


Puesto que AB = CD, $\measuredangle$ BAE = $\measuredangle$ EDC y $\measuredangle$ EBA = 90° − $\measuredangle$ AEB = 90° − $\measuredangle$ DEC = $\measuredangle$ ECD, el criterio de congruencia ALA nos permite afirmar que $\triangle$ BAE = $\triangle$ CDE. Se tiene así que BE = CE y, en consecuencia, el triángulo BEC es isósceles. De lo anterior se desprende que el ángulo DBC = α; sin embargo, sobre ese ángulo también cabe decir que es igual a

$$90^\circ - \measuredangle \mathrm{EBA} - \measuredangle \mathrm{ECB} = 90^\circ - 2\alpha.$$

Al resolver la ecuación $\alpha = 90^\circ - 2\alpha$ llegamos a que $\alpha = 30^\circ$. □

Solución 4.



Supongamos que el lado del cuadrado mide ℓ y que el radio de la circunferencia mide

r. Puesto E, O, F y G son colineales se sigue que

$$\ell + \frac{\sqrt{2}}{4} = 2r. \tag{1}$$

Por otra parte, al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo OFD se desprende que

$$\left(r - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = r^2. \tag{2}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior y haciendo las reducciones que corresponden obtenemos que

$$2\ell^2 - 4\sqrt{2}r + 1 = 0. \tag{3}$$

Sustituyendo el lado izquierdo de (1) en (3) llegamos a que

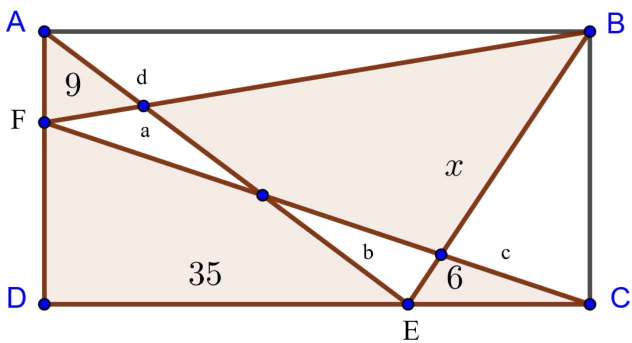
$$2\ell^2 - 2\sqrt{2}\left(\ell + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 1 = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$\ell^2 - \sqrt{2}\ell = 0.$$

Se tiene así que $\ell = \sqrt{2}$ y, por consiguiente, el área de ABCD es igual a $\ell^2 = 2$. $\square$

Solución 5.



En lo que sigue, las letras a, b, c y d denotan las áreas de las regiones triangulares que las contienen.

Puesto que el área de $\triangle$ ABE es la mitad del área de ABCD se sigue que

$$x + \mathrm{b} + \mathrm{d} = (9 + \mathrm{a} + 35) + (6 + \mathrm{c}). \tag{4}$$

Por otra parte, al tenerse que el área de $\triangle$BCF también es la mitad del área de ABCD se colige que

$$x + \mathrm{a} + \mathrm{c} = (35 + \mathrm{b} + 6) + (9 + \mathrm{d}). \tag{5}$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5) lado a lado se obtiene que

$$2x + a + b + c + d = 70 + 18 + 12 + a + b + c + d;$$

de aquí podemos concluir que

$$x = \frac{70 + 18 + 12}{2} = 50.$$

□

Solución 6.

Denotemos con x al total de asistentes a la conferencia que no eran estudiantes ni de secundaria ni del nivel universitario.

Hubo cinco tipos de saludos en el evento: los que se dieron entre los estudiantes de secundaria, los que se dieron los estudiantes de secundaria con los asistentes que no eran ni de secundaria ni de universidad, los que se dieron entre los estudiantes universitarios, los que se dieron entre los universitarios y los asistentes que no eran ni de secundaria ni de universidad y, finalmente, los que se dieron los asistentes que no eran ni de estudiantes de secundaria ni universitario entre ellos. El total de saludos del primer tipo fue igual $\frac{(5)(4)}{2} = 10$; el total de saludos del segundo tipo fue $\frac{(x+5)(x+4)}{2}$; el total de saludos del tercer tipo fue $\frac{(6)(5)}{2} = 15$; el total de saludos del cuarto tipo fue igual a $\frac{(x+6)(x+5)}{2}$ y, por último, el total de saludos que se dieron entre los asistentes que no eran ni estudiantes de secundaria ni universitarios fue igual a $\frac{(x)(x-1)}{2}$. Ergo, la incógnita x satisface la ecuación:

$$10 + \frac{(x+5)(x+4)}{2} + 15 + \frac{(x+6)(x+5)}{2} + \frac{(x)(x-1)}{2} = 61.$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$(x+5)^2 + \frac{(x)(x-1)}{2} - 36 = 0$$

o bien como

$$3x^2 + 19x - 22 = 0.$$

Aplicando la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado podemos concluir que

$$x = \frac{-19 + \sqrt{19^2 - 4(3)(-22)}}{6} = 1.$$

Por consiguiente, en la conferencia había $5 + 6 + 1 = 12$ personas. □

Solución 7.

Denotemos con m al número de integrantes del club. Originalmente cada uno de ellos tiene que pagar $600/m$ pesos. Si el total de integrantes del club es $m+20$ entonces el pago de cada uno de ellos es igual a $600/(m+20)$; puesto que se menciona que el incremento en integrantes daría lugar a una disminución de un peso en el pago individual entonces podemos plantear la siguiente ecuación para la incógnita m:

$$\frac{600}{m+20} = \frac{600}{m} - 1.$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$m^2 + 20m - 12000 = 0.$$

Aplicando la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado se obtiene que

$$m = 100.$$

Concluimos así que el número de miembros del club es 100 y que cada uno de ellos ha de pagar \$ 6. □

Solución 8.

Mediante inducción matemática demostraremos la siguiente afirmación general:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)^{10} > 10(1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + n^9). \tag{6}$$

La afirmación se cumple para $n = 1$ pues, en tal caso, el lado izquierdo es 2^{10} mientras que el lado derecho es igual a 10.

Supongamos que la desigualdad (6) se cumple para n donde n es un número positivo fijo (pero arbitrario). A partir de este supuesto demostraremos que la desigualdad también es válida para $n+1$. Por la hipótesis de inducción tenemos que

$$1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + n^9 + (n+1)^9 \quad < \quad \frac{(n+1)^{10}}{10} + (n+1)^9.$$

Para llegar a la conclusión deseada basta con establecer la desigualdad

$$\frac{(n+1)^{10}}{10} + (n+1)^9 < \frac{(n+2)^{10}}{10}. \tag{7}$$

Esta desigualdad se puede reescribir como

$$10(n+1)^9 < (n+2)^{10} - (n+1)^{10};$$

expresada de esta forma su validez es una consecuencia directa de la fórmula para factorizar una diferencia de dos décimas potencias. En efecto,

$$(n+2)^{10}-(n+1)^{10}=\sum_{k=0}^{9}(n+2)^{9-k}(n+1)^k>\sum_{k=0}^{9}(n+1)^9=10(n+1)^9.$$

□

Solución 9.

Hay dos casos: $r=2$ o $r\equiv 1 \pmod 2$.

- PRIMER CASO: $r=2$ En este caso la ecuación deviene en

$$p^q=2023+2^p.$$

Lo de la izquierda es divisible por p y, por el pequeño teorema de Fermat, lo de la derecha es congruente con 2025 módulo p. De esto se sigue que $p=3$ o $p=5$ pero ninguna de estas opciones para p origina una terna (p,q,r) que satisfaga la ecuación original.

- SEGUNDO CASO: r es impar. En este caso p tiene que ser igual a 2 y la ecuación dada deviene en

$$2^q=2023+r^2.$$

Como $q\equiv 3 \pmod 4$ se sigue que $2^q\equiv 8 \pmod 5$ y entonces

$$r^2=2023-2^q\equiv 3-8\equiv -5 \pmod 5.$$

De esto último se desprende que $r=5$ (*a fortiori*). Concluimos así que la única terna que satisface la ecuación original es $(p=2,q=11,r=5)$. □

Solución 10.

Denotemos con p_n al n-ésimo número primo. Necesitamos determinar si existen números enteros $n>1$ tales que

$$p_n \mid p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}$$

y

$$p_{n+1} \mid p_1+p_2+\cdots+p_n.$$

Si denotamos con k a la suma $p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}$, entonces de la primera relación de divisibilidad se sigue que

$$k=p_n\cdot Q \tag{8}$$

para algún número entero positivo Q y, de la segunda relación de divisibilidad, se desprende que

$$k + p_n = p_{n+1} \cdot R \tag{9}$$

para algún número entero positivo R. Combinando (8) y (9) obtenemos que

$$p_n(Q+1) = p_{n+1} \cdot R.$$

De esto se sigue que $p_{n+1} \mid (Q+1)$ y, en consecuencia,

$$p_{n+1} \leq Q+1$$

o equivalentemente

$$p_n^2 < p_n \cdot p_{n+1} \leq p_n(Q+1) = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n. \tag{10}$$

Afirmamos que la desigualdad $p_n^2 \leq p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n$ sólo se puede cumplir para $n = 1$: para verificar este aserto demostraremos por inducción matemática que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n < p_n^2$$

para todo número entero $n \geq 2$.

Si $n = 2$, la expresión en el lado izquierdo es igual es igual a $p_1 + p_2 = 2 + 3 = 5$ mientras que la expresión en el lado derecho es igual a $p_2^2 = 3^2 = 9$. Además, si la desigualdad se cumple para un número entero $n \geq 2$, entonces también es válida para $n + 1$:

$$\begin{array}{rcl}
p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n + p_{n+1} & = & (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n) + p_{n+1} \\
& < & p_n^2 + p_{n+1} \\
& < & p_n^2 + 2p_{n+1} \\
& < & p_n^2 + (p_{n+1} - p_n)(p_{n+1} + p_n) \\
& = & p_{n+1}^2.
\end{array}$$

Puesto que no existe un número entero $n \geq 2$ para el que la desigualdad (10) se satisfaga, concluimos que no existen números primos suburbanos y que estén en posiciones contiguas dentro de la sucesión de los números primos. $\square$

Problemas de entrenamiento

Año 2025, No. 1

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este primer número del año 2025. Te recordamos que las soluciones a los problemas en este número no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que trabajes en ellos y redactes con detenimiento tus soluciones. Las soluciones a los problemas en este número se publicarán en la cuarta entrega de 2025 de la revista y se escogerán entre las contribuciones que la comunidad olímpica tenga a bien hacernos llegar.

Con el fin de dar tiempo a los lectores para que preparen y envíen sus soluciones, anunciamos que estaremos recibiendo soluciones para los 10 problemas que se listan a continuación hasta el **1 de septiembre de 2025**. Las inquietudes o propuestas relacionadas con este apartado de la revista deberán ser remitidas por *email* a

`revistaomm@gmail.com`

¡No dejen de hacernos llegar sus soluciones!

Problema 1.4.24. Sea **S** un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades:

a) Todos los números enteros pertenecen a **S**.

b) Si $x \in \mathbf{S}$ y $y \in \mathbf{S}$, entonces $x + y \in \mathbf{S}$ y $x \cdot y \in \mathbf{S}$.

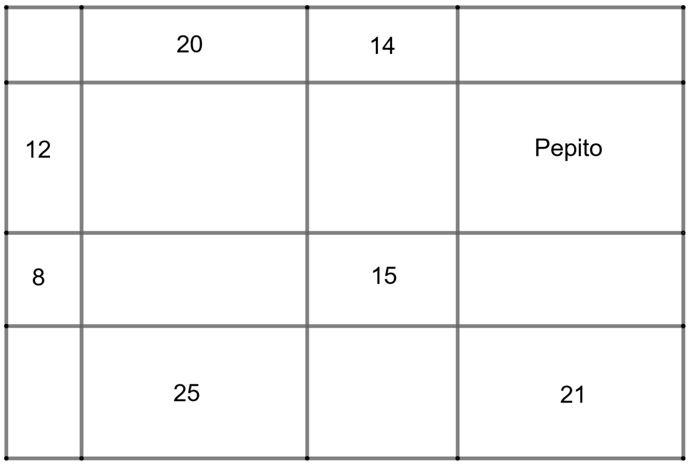
Demuestre que si $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbf{S}$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbf{S}$.

Problema 2.4.24. Determine todos los números enteros positivos n para los cuales se cumple que la ecuación $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ tiene exactamente una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

Problema 3.4.24. Demuestre que si el número entero n es tal que $n^2 + 11$ es un número primo entonces $n + 4$ no es un cubo perfecto.

Problema 4.4.24. Sean a y b números enteros coprimos. Demuestre que para todo $c \in \mathbb{Z}^+$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\text{mcd}(a + kb, c) = 1$.

Problema 5.4.24. Una finca ha sido lotificada en 16 terrenos rectangulares, uno de los cuales pertenece a Pepito. Si se conoce el área en hectáreas de siete de los terrenos, tal como se indica en la figura, ¿es posible determinar el área del terreno de Pepito?



Problema 6.4.24. ¿Cuántos triángulos de lados enteros se pueden formar usando segmentos de longitudes $1, 2, 3, \ldots, n$?

Problema 7.4.24. Un cubo grande de $4{\times}4{\times}4$ está formado por 64 cubos unitarios. Se desea colorear exactamente 16 de los cubos unitarios de acuerdo a la siguiente condición:

• En cada bloque de $1 \times 1 \times 4$ cubos unitarios o de $1 \times 4 \times 1$ cubos unitarios o de $4 \times 1 \times 1$ cubos unitarios debe haber exactamente un cubo rojo.

¿De cuántas maneras se pueden elegir los 16 cubos que se van a colorear de rojo?

Problema 8.4.24. Hay 25 personas alrededor de una mesa y cada persona tiene dos cartas. En cada carta se ha escrito uno de los números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ y cada número se encuentra en dos cartas exactamente. A una señal, cada persona pasa una de sus cartas–la que tiene el número más pequeño–a su vecino de la derecha. Demuestre que, tarde o temprano, uno de los jugadores tendrá dos cartas con el mismo número.

Problema 9.4.24. $\triangle AOC$ es un triángulo equilátero y D es un punto en su interior tal que $\measuredangle ACD = 12^\circ$ y $\measuredangle COD = 18^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo CAD?

Problema 10.4.24. Sean A y B dos puntos (distintos) del plano. Usando únicamente un compás, indique cómo construir dos puntos C y D de tal modo que el cuadrilátero $ABCD$ sea un cuadrado.

Soluciones a los problemas de entrenamiento (Año 2024, No. 1)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en la primera entrega de 2024 de Tzaloa. En esta ocasión, agradecemos a Carlos Santiago López Figueroa y a Nayeli Valentina Ortiz Cordero por haber enviado su solución al problema 3; a José Luis Romero (Cd. de México) por las soluciones que para los problemas 1, 2, 3, 7, 9 y 10 nos hizo llegar y a Titu Zvonaru (Comăneşti, Rumania) por contribuir soluciones a los problemas 1, 3, 6, 7, 8 y 9; por otra parte, reiteramos la invitación a todos nuestros lectores a seguir enviando soluciones para que éstas puedan aparecer en la páginas de Tzaloa eventualmente.

En el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en el segundo número de 2024 de la revista. ¡Aún están a tiempo de enviar soluciones!

Problema 1.1.24. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si d es un número entero positivo que divide tanto a n^2+1 como a $(n+1)^2+1$ entonces $d=1$ o $d=5$.

Solución. Como $d \mid n^2+1$ y $d \mid (n+1)^2+1$ entonces d también divide a

$$(n+1)^2+1-(n^2+1)=2n+1. \tag{11}$$

De esto se sigue que $d \mid (2n+1)^2$; puesto que $d \mid 4(n^2+1)$ tenemos que d divide a

$$(2n+1)^2-4(n^2+1)=4n-3. \tag{12}$$

De (11) y (12) se colige que

$$d \mid \underbrace{2(2n+1)-(4n-3)}_{=5}$$

y la demostración termina. □

Problema 2.1.24. Una persona divide mentalmente 2024 por $1, 2, 3, \ldots$, y así sucesivamente hasta llegar al 1000 y apunta en una hoja en blanco el resto que va obteniendo en cada una de esas divisiones. ¿Cuál es el mayor de los números que la persona anota?

Solución. Tenemos que $2024 = 674 \cdot 3 + 2$. De esto se sigue que si $q \in \{1, 2, \ldots, 674\}$ entonces el resto que se obtiene al dividir 2024 entre q es menor que 674.

Si $q \in \{675, 676, \ldots, 1000\}$, entonces $q = 675 + k_q$ para algún entero no negativo k_q: el cociente que resulta al dividir 2024 por un número q de ese conjunto es igual 2 y el resto es igual

$$2024-2q = 2024-2(675+k_q) = 674-2k_q.$$

De esto y lo observado en el párrafo previo se concluye que el resto más grande que la persona anota en el pizarrón se alcanza cuando $k_q = 0$ y es igual a 674. □

Problema 3.1.24. La asociación "Defendamos El Cerro Chuperio" tiene 50 integrantes. El sábado cada uno de los integrantes presentes plantó 17 árboles y el domingo cada uno de los integrantes presentes plantó 20 árboles. En total se plantaron 1545 árboles. ¿Cuántos de los miembros de la asociación asistieron tanto el sábado como el domingo?

Solución de Titu Zvonaru. Denotemos con x al número de integrantes de la asociación que asistieron el sábado y con y al número de integrantes de la asociación que asistieron el domingo. De acuerdo con el planteamiento del problema, $x, y \leq 50$ y

$$17x + 20y = 1545. \tag{13}$$

Puesto que tanto $20y$ como 1545 son múltiplos de 5 entonces $5 \mid 17x$: de esto y del hecho que $\operatorname{mcd}(5, 17) = 1$ se desprende que $x = 5a$ para algún número entero no negativo a. Sustituyendo esta información en (13) se obtiene que

$$17a + 4y = 309.$$

Como 309 es un número impar, a debe ser un número impar menor que 10; por otro lado, de $17a = 309 - 4y \geq 109$ se infiere que $a \geq 6$. Así pues, sólo hay dos posibilidades para a: que sea igual a 7 o que sea igual a 9. La primera se descarta pues implica que $y = \frac{309-17(7)}{4} = \frac{190}{4} = \frac{75}{2}$. La segunda posibilidad nos lleva a la conclusión de que $x = 45$ y $y = 39$.

Finalmente, aplicando el principio de inclusión y de exclusión concluimos que fueron al menos $39 + 45 - 50 = 34$ integrantes de la asociación los que asistieron tanto el sábado como el domingo a la labor de reforestación. □

Problema 4.1.24. Decimos que $n \in \mathbb{Z}^+$ es un número de Markov si existen $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 = nxyz. \tag{14}$$

Claramente, 3 es un número de Markov. Demuestre que ningún número mayor que 4 es un número de Markov.

Solución. Supongamos que n es un número de Markov. Consideremos el conjunto

$$\mathscr{B} = \{x+y+z : \ (x, y, z) \text{ es una tercia de números enteros positivos que satisface } (14)\}.$$

Denotemos con b_0 al elemento mínimo de $\mathscr{B}$: supongamos que $b_0 = x_0 + y_0 + z_0$ donde x_0, y_0, z_0 son números enteros positivos tales que y $x_0 \geq y_0 \geq z_0$ y $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = nx_0y_0z_0$.

Consideremos la ecuación cuadrática

$$X^2 - nXy_0z_0 + (y_0^2 + z_0^2) = 0.$$

Esta ecuación es cuadrática en X y una de sus raíces es x_0; por las fórmulas de Vieta, la otra raíz es $\frac{y_0^2+z_0^2}{x_0}$. Puesto que

$$\frac{y_0^2+z_0^2}{x_0} = ny_0z_0 - x_0, \tag{15}$$

tenemos que $\left(\frac{y_0^2+z_0^2}{x_0}, y_0, z_0\right)$ es una tercia de números enteros positivos que satiface la ecuación (14). De (15) y la minimalidad de b_0 se sigue que

$$(ny_0z_0 - x_0) + y_0 + z_0 \geq x_0 + y_0 + z_0,$$

lo que es equivalente a que

$$ny_0z_0 \geq 2x_0.$$

De todo esto se desprende que

$$2y_0^2 \geq y_0^2 + z_0^2 = x_0(ny_0z_0 - x_0) \geq x_0\left(ny_0z_0 - \frac{ny_0z_0}{2}\right) = \frac{1}{2}nx_0y_0z_0 \geq \frac{1}{2}ny_0^2z_0 \geq \frac{1}{2}ny_0^2.$$

Se colige así que $n \geq 4$ y con esto finaliza la demostración. □

Problema 5.1.24. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $u \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $u \mid ac$, $u \mid ad + bc$ y $u \mid bd$, entonces $u \mid ad$ y $u \mid bc$.

Solución. Consideremos el polinomio cuadrático

$$p(x) = x^2 - \left(\frac{ad+bc}{u}\right)x + \frac{ad \cdot bc}{u^2}.$$

De las hipótesis se sigue que $p(x)$ es un polinomio de coeficientes enteros. Puesto que su coeficiente principal es igual a 1, del teorema de la raíz racional se infiere que si t es un número racional tal que $p(t) = 0$ entonces t es necesariamente un número entero. Como $\frac{ad}{u}$ y $\frac{bc}{u}$ son números racionales y

$$p\left(\frac{ad}{u}\right) = \left(\frac{ad}{u}\right)^2 - \left(\frac{ad+bc}{u}\right)\left(\frac{ad}{u}\right) + \frac{ad \cdot bc}{u^2} = 0$$

y

$$p\left(\frac{bc}{u}\right) = \left(\frac{bc}{u}\right)^2 - \left(\frac{ad+bc}{u}\right)\left(\frac{bc}{u}\right) + \frac{ad \cdot bc}{u^2} = 0,$$

se colige que tanto $\frac{ad}{u}$ como $\frac{bc}{u}$ son números enteros; esto es es equivalente a $u \mid ad$ y $u \mid bc$ y la demostración termina. □

Problema 6.1.24. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si α y β son números enteros de la forma $X^2 + mXY + nY^2$, entonces $\alpha \cdot \beta$ es otro número de esa forma.

Solución. Notemos en primer lugar que si ξ_1 y ξ_2 son las soluciones de la ecuación

$$x^2 + mx + n = 0,$$

entonces, para cualesquiera $u, v \in \mathbb{Z}$, se cumple que

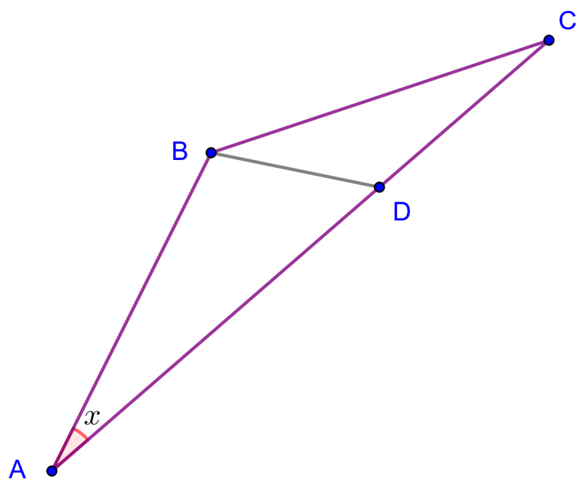
$$u^2 + muv + nv^2 = (u - v\xi_1)(u - v\xi_2). \tag{16}$$

Luego, si $\alpha = a^2 + mab + nb^2$ y $\beta = c^2 + mcd + nd^2$, para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta &= (a^2 + mab + nb^2)(c^2 + mcd + nd^2) \\
&= (a - b\xi_1)(a - b\xi_2)(c - d\xi_1)(c - d\xi_2) \\
&= (a - b\xi_1)(c - d\xi_1)(a - b\xi_2)(c - d\xi_2) \\
&= [ac - (bc + ad)\xi_1 + bd\xi_1^2][ac - (bc + ad)\xi_2 + bd\xi_2^2] \\
&= [ac - (bc + ad)\xi_1 + bd(-m\xi_1 - n)][ac - (bc + ad)\xi_2 + bd(-m\xi_2 - n)] \\
&= [(ac - nbd) - (bc + ad + mbd)\xi_1][(ac - nbd) - (bc + ad + mbd)\xi_2] \\
&= (ac - nbd)^2 + m(ac - nbd)(bc + ad + mbd) + n(bc + ad + mbd)^2.
\end{aligned}$$

Esto indica que $\alpha \cdot \beta$ también es un número de la forma $X^2 + mXY + nY^2$ y esto es justo lo que deseábamos establecer. $\square$

Problema 7.1.24. Considere la siguiente figura (a manera de referencia). Si en el triángulo ABC, D es un punto sobre el lado AC tal que $\measuredangle$ ABD $= 105^\circ$, $\measuredangle$ DBC $= 30^\circ$ y AD $=$ DC, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle$ BAC?



Solución. Aplicando la ley de los senos en el triángulo BAD obtenemos que

$$\frac{\mathrm{AD}}{\operatorname{sen}(105^\circ)} = \frac{\mathrm{BD}}{\operatorname{sen}(\measuredangle\,\mathrm{BAC})}.$$

Por otro lado, la ley de los senos en el triángulo BCD permite afirmar que

$$\frac{\mathrm{DC}}{\operatorname{sen}(30^\circ)} = \frac{\mathrm{BD}}{\operatorname{sen}(45^\circ - \measuredangle\,\mathrm{BAC})}.$$

De estas dos igualdades se sigue que

$$\operatorname{sen}(105^\circ)\operatorname{sen}(45^\circ - \measuredangle\,\mathrm{BAC}) = \operatorname{sen}(30^\circ)\operatorname{sen}(\measuredangle\,\mathrm{BAC}). \tag{17}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(105^\circ) &= \operatorname{sen}(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos(60^\circ)\operatorname{sen}(45^\circ) + \cos(45^\circ)\operatorname{sen}(60^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(45^\circ - \measuredangle\,\mathrm{BAC}) &= \cos(45^\circ)\operatorname{sen}(-\measuredangle\,\mathrm{BAC}) + \cos(-\measuredangle\,\mathrm{BAC})\operatorname{sen}(45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\measuredangle\,\mathrm{BAC}) - \operatorname{sen}(\measuredangle\,\mathrm{BAC})\right), \end{aligned}$$

la igualdad en (17) se puede reescribir como

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)(\cos(\measuredangle\,\mathrm{BAC}) - \operatorname{sen}(\measuredangle\,\mathrm{BAC})) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\measuredangle\,\mathrm{BAC});$$

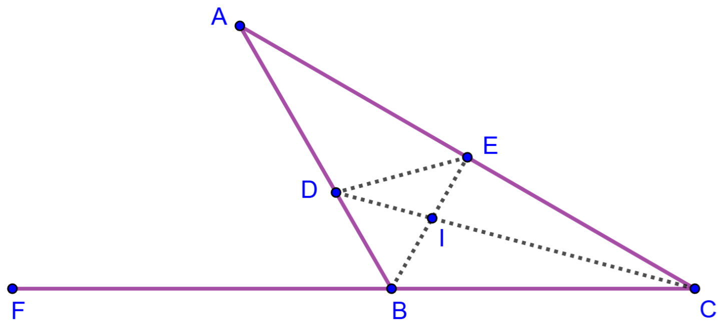
de esto se desprende que

$$\cot(\measuredangle\,\mathrm{BAC}) = \frac{2}{1+\sqrt{3}} + 1 = \sqrt{3}.$$

Esto último permite concluir que el ángulo $\measuredangle$ BAC mide 30°. □

Problema 8.1.24. Supóngase que, en un triángulo ABC, el ángulo en B mide 120°. Si E es el punto donde la bisectriz del ángulo B se interseca con el lado AC y D es el punto donde la bisectriz del ángulo C se interseca con el lado AB, ¿cuál es la medida del ángulo CDE?

Solución de Titu Zvonaru. Sea F un punto sobre la recta $\overleftrightarrow{\mathrm{BC}}$ tal que B está entre F y C.



Puesto que $\measuredangle \text{ABF} = 60^\circ$ tenemos que $\overrightarrow{\text{BA}}$ es una bisectriz exterior del triángulo EBC. Dado que la bisectriz del ángulo BCE concurre con $\overrightarrow{\text{BA}}$ en D se sigue que $\overrightarrow{\text{ED}}$ es bisectriz del ángulo exterior AEB del triángulo EBC. Tenemos así que

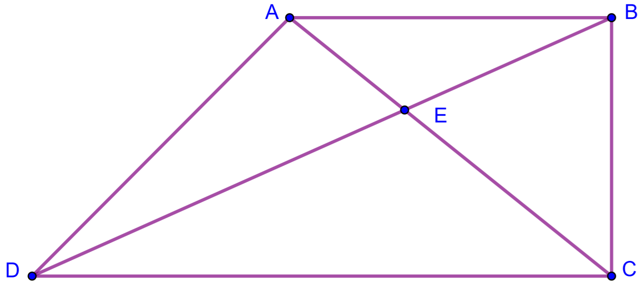
$$\begin{aligned}
\measuredangle \text{AED} &= \frac{180^\circ - \measuredangle \text{EAB} - \measuredangle \text{ABE}}{2} \\
&= 60^\circ - \frac{\measuredangle \text{EAB}}{2} \\
&= 60^\circ - \frac{\measuredangle \text{CAB}}{2}
\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\measuredangle \text{CDE} &= \measuredangle \text{AED} - \measuredangle \text{ECD} \\
&= 60^\circ - \frac{\measuredangle \text{CAB}}{2} - \frac{\measuredangle \text{BCA}}{2} \\
&= 60^\circ - \frac{\measuredangle \text{CAB} + \measuredangle \text{BCA}}{2} \\
&= 60^\circ - \frac{60^\circ}{2} \\
&= 30^\circ.
\end{aligned}$$

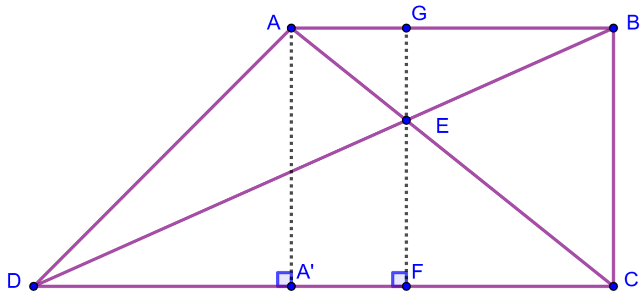
□

Problema 9.1.24. En el cuadrilátero ABCD que se presenta a continuación se cumple que $\text{AB} \parallel \text{DC}$, $\measuredangle \text{ABC} = 90^\circ$, $\text{BC} = 3$ y que $(\text{CDE}) = (\text{ABE}) + 6$. Calcule la longitud del lado DA del cuadrilátero.



Nota. Con la simbología (MNP) se denota al área del triángulo de vértices M, N y P.

Solución. Denotemos con A' al pie de la altura por A del triángulo ADC y denotemos con G y F, respectivamente, a los pies de las alturas por E de los triángulos ABE y CDE.



Del criterio AAA de semejanza se sigue que $\triangle \mathrm{ABE} \sim \triangle \mathrm{CDE}$. Suponiendo que $\mathrm{DC} = r\mathrm{BA}$ se sigue que $\mathrm{FE} = r\mathrm{GE}$ y por consiguiente

$$\frac{(r\mathrm{BA})(r\mathrm{GE})}{2} = \frac{(\mathrm{BA})(\mathrm{GE})}{2} + 6.$$

Claramente esta igualdad se puede reescribir como

$$(\mathrm{BA})(\mathrm{GE})(r+1)(r-1) = 12. \tag{18}$$

Por otra parte, al tenerse que $\mathrm{FE} = r\mathrm{GE}$ y que $\mathrm{FE} + \mathrm{GE} = 3$, se desprende que

$$(r+1)(\mathrm{GE}) = 3. \tag{19}$$

De (18) y (19) se obtiene que $4 = (\mathrm{BA})(r-1) = \mathrm{DC} - \mathrm{A'C} = \mathrm{DA'}$ y, en consecuencia, $\mathrm{DA} = \sqrt{(\mathrm{DA'})^2 + (\mathrm{A'A})^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$ $\square$

Problema 10.1.24. Alicia tenía una cuarta parte de la edad que hoy tiene su padre cuando su padre tenía la edad que hoy tiene Alicia. Hace un número entero de años, el padre tenía ocho veces los años que tenía Alicia cuando el padre tenía la edad que Alicia tenía entonces.

¿Cuántos años tienen Alicia y su padre actualmente?

Solución de José Luis Romero. Denotemos con A y P a las edades actuales de Alicia y su padre respectivamente.

El padre tenía la edad de Alicia hace $P - A$ años: en ese momento, Alicia tenía $A - (P - A) = 2A - P$ años. La primera condición del problema indica que

$$(2A - P) = \frac{P}{4}. \tag{20}$$

Digamos que la segunda condición en el planteamiento del problema sucedió hace n años: en ese entonces, el padre tenía $P - n$ años y Alicia tenía $A - n$ años. Cuando el padre tenía $A - n$ años, Alicia tenía $(A - n) - (p - A) = 2A - P - n$ años; ergo,

$$P - n = 8(2A - P - n) \tag{21}$$

De (20) se obtiene que $A = 5P/8$; al reemplazar A por $5P/8$ en (21) llegamos a que

$$P - n = 10P - 8P - 8n$$

o bien a que

$$P = 7n.$$

Puesto que P es múltiplo de 8 y de 7 entonces $P = 56\kappa$ para algún $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ y $A = 35\kappa$. Aunque esto indica que *técnicamente* no hay respuesta única para la pregunta, la conclusión más verosímil es que Alicia tiene actualmente 35 años y su padre 56. $\square$

– NOTAS FINALES –

A partir de este número estaremos manejando dos *novedades* en esta sección de entrenamiento de Tzaloa. La primera tiene que ver con la numeración de los problemas. Cada problema de entrenamiento que en la revista se plantee de aquí en más tendrá asociado un código el cual indicará su número progresivo dentro de la lista en la cual aparece y el número del respectivo año en el que el problema puede hallarse. Por ejemplo, el problema **10.1.24** es el décimo problema en la lista de entrenamiento publicada en el primer número de 2024 de la revista. **Invitamos** a nuestros lectores a tomar en cuenta esta información al nombrar los archivos en los que concentren las soluciones que planeen hacernos llegar. La segunda novedad tiene que ver con las fuentes de los problemas. Aunque no sea del todo fácil determinar el origen de un problema dado, cuando contemos con alguna nota o referencia bibliográfica puntual sobre un problema publicado en esta sección de Tzaloa la compartiremos con nuestros lectores en el número de la revista en el cual aparezca la solución del problema. A continuación listamos los comentarios que tenemos sobre algunos de los problemas publicados en el primer número de 2024.

⋆ **Problema 4.1.24.** Se hizo alusión al apellido Markov en el planteamiento del problema porque fue el matemático ruso Andrey Andreyevich Markov quien describió a detalle el conjunto de soluciones de la ecuación diofántica $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ por vez primera en su artículo "Sur les formes quadratiques binaires indefinies (Second mémoire)" de 1880. Para más información sobre la ecuación diofántica de Markov se puede consultar el libro "Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture" (Springer Verlag, 2013) de Martin Aigner. La solución expuesta para este problema la aprendimos de Moubariz Garaev y es por el método de los saltos de Vieta; para recordar o averiguar de lo que dicho método va se sugiere revisar el artículo intitulado *Vieta jumping* que Adrián Medrano Martín del Campo contribuyó al segundo número de 2021 de Tzaloa.

⋆ **Problema 5.1.24.** Este bonito problema ha aparecido en diversos exámenes (por ejemplo, en el examen Loránd Eötvös de 1910); sin embargo, en su "Advanced Number Theory" (Dover Publications, Inc., 1980), Harvey Cohn atribuye una versión más general del mismo al matemático alemán Adolf Hurwitz (cf. *op. cit.*, págs. 128-129).

⋆ **Problema 9.1.24.** Este es un problema de Catriona Shearer. Catriona Shearer es una maestra de Cambridge, Reino Unido. La maestra Shearer ha estado publicando problemas de geometría bastante coloridos en 𝕏 (antes Twitter) de manera regular desde el año 2018; la podéis encontrar en dicha red social como `@CShearer41`. En 2019 apareció una primera compilación de sus rompecabezas geométricos bajo el título "Geometry Puzzles in Felt Tip: A Compilation of Puzzles from 2018" (Gradino, 2019); el problema 9.1.24 es el cuarto problema en dicha compilación.

⋆ **Problema 10.1.24.** Este problema de edades fue retomado del libro "Las nueve cifras, el cambiante cero y otros divertimentos matemáticos" (Ed. Gedisa, 2007) del profesor colombiano Bernardo Recamán Santos.

¡HASTA LA PRÓXIMA!

8º Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

Del 19 al 22 de septiembre de 2024 se llevó a cabo de manera presencial en la ciudad de Oaxtepec, Morelos, el Concurso Nacional de la 8a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron (add info) estudiantes de primaria y (add info) estudiantes de secundaria, representando a (add info) entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de quinto y sexto año de primaria.
b) Nivel II: Estudiantes de primer y segundo año de secundaria.
c) Nivel III: Estudiantes de tercer año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta numérica que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual donde podrán escribir sus soluciones. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Ganadores del 8° Concurso Nacional de la OMMEB - Nivel III

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro y plata en las pruebas individual y por equipos, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2025.

Los alumnos ganadores de **medalla de plata** en la prueba individual del Nivel III son los siguientes, ordenados en orden alfabético por estado:

Diego Escalona de Luna (Guanajuato)
Kevin Pastenes Rodríguez (Guerrero)
Ángel Isaac Galicia Esquivel (Guerrero)
José de la Cruz Pacheco (Guerrero)
Gonzalo Díaz Mercado (Morelos)
Sebastian Zabala Peña (Nuevo León)
Leonardo Díaz Delgado (San Luis Potosí)
Isaac Azael Juárez Martínez (San Luis Potosí)
Gema Abril Rodríguez Morales (Tlaxcala)
Derek Elias Ortiz (Zacatecas)

Los alumnos ganadores de **medalla de oro** en la prueba individual del Nivel III del 8vo Concurso Nacional de la OMMEB son los siguientes, ordenados en orden alfabético por estado:

Carlos Seijas García (Chihuahua)
Carlos Daniel Maya Rojas (Hidalgo)
Uriel Alejandro Wong Vargas (Morelos)
Elena Elizabeth Ramos Hernández (Oaxaca)
Elieel Vazquez Arce (Tlaxcala)

El equipo ganador de **medalla de plata** en la prueba por equipos fue el equipo del estado de **Baja California** conformado por:

Victoria Gisel Gallegos Pérez
Pablo Antonio Osuna Jasso
Luis Alexander Bañuelos Rodriguez

El equipo ganador de **medalla de oro** en la prueba por equipos fue el equipo del estado de **Guanajuato** conformado por:

Diego Escalona de Luna
Mauro Gonzalo Lopez Rico
Kyzha Myranda De León Zamarripa

Aunque la prueba se divida en dos partes, adicionalmente se entrega el premio de campeón de campeones, que se otorga al equipo cuya suma de los puntajes individuales de sus concursantes además del puntaje en la prueba por equipos sea la más alta. En esta ocasión el equipo nombrado como **Campeón de Campeones** en Nivel III fue el estado de **Morelos** conformado por:

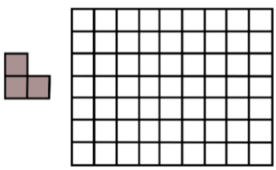
Gonzalo Díaz Mercado
Uriel Alejandro Wong Vargas
Rene Rios Téllez

En este número presentaremos los problemas y soluciones de la prueba individual y por equipos de Nivel III, en números previos se presentaron los de Nivel I y los del Nivel III.

Prueba individual (Nivel III)

Parte A

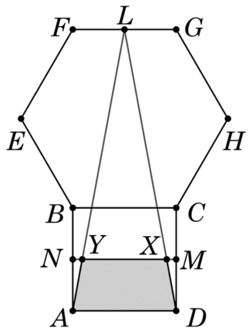
Problema 1. ¿Cuántas veces aparece la figura de tres cuadritos sombreada, en la figura de la derecha? Nota: Esta figura de tres cuadritos puede estar girada.



Problema 2. Se tienen tres números reales a, b, c que cumplen $a + b + c = 7$ y $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$. Si el resultado de la expresión $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ es una fracción $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos que no comparten factores primos, ¿cuánto es el valor de $m + n$

Problema 3. ¿Cuántos números de 3 cifras cumplen que al intercambiar cualesquiera dos cifras consecutivas del mismo, se obtiene un número menor al original? (Por ejemplo, el 610 cumple la propiedad, pues si se intercambian el 6 y el 1 se obtiene 160, y si se intercambian el 1 y el 0 se obtiene 601).

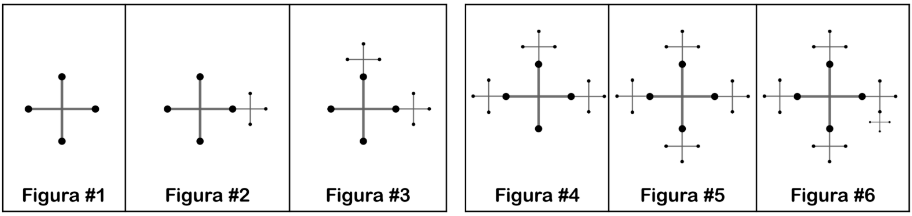
Problema 4. En la figura se observa un cuadrado $ABCD$ y un hexágono regular $BEFGHC$, donde AD mide 4 cm. Denotamos por L, M y N a los puntos medios de FG, CD y AB, respectivamente. Los puntos X y Y son los puntos de intersección de LD y LA con el segmento MN, respectivamente. El área del cuadrilátero $ADXY$ se puede escribir como $a - \sqrt{b}$, donde a y b son enteros positivos. Determina el valor de $a + b$.



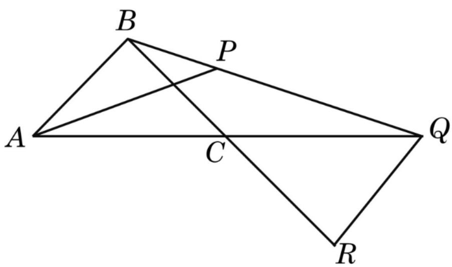
Problema 5. La mosca Flynn se encuentra parada en la marca del minuto 1 de un reloj. Cada minuto, la mosca se fija en la marca del minuto en el que está, y se mueve sobre las marcas de los minutos, la cantidad de minutos indicada por esa marca en sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si Flynn se encuentra parado en la marca del minuto 3, se mueve 3 marcas en sentido de las manecillas del reloj, y llega a la marca del minuto 6. Después de 2 horas, sobre qué marca estará parado Flynn.
Nota: En el siguiente dibujo, las marcas pequeñas son las de los minutos.

Problema 6. En la figura 1 (como se muestra abajo) se observa una cruz y 4 puntos, uno en cada extremo. En la figura 2 se le agregó, en uno de los puntos iniciales, una cruz más y sus respectivos puntos en los extremos. Luego, en la figura 3, se le agregó

en otro de los puntos iniciales una cruz más y sus respectivos puntos en los extremos. Este proceso continúa en los 4 puntos iniciales (de la figura 1) hasta cerrar el ciclo, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Después, en la figura 6 observamos que se agrega en uno de los puntos una cruz más y sus respectivos puntos en los extremos. De forma similar, este proceso continúa hasta cerrar ese segndo ciclo y así se siguen creando más figuras y cerrando los respectivos ciclos. Si este proceso continúa, ¿cuántos puntos habrá en la figura 2024?

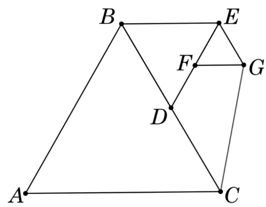


Problema 7. En la siguiente figura se sabe que $AB = BC = 2$ cm, $AP = PQ$ y que $BQ = 7$ cm. Además $\angle PAB = 30°$ y $\angle QRB = 75°$. Calcule, en cm, la longitud del segmento CR.



Problema 8. ¿Cuántas parejas de enteros positivos a y b menores que 10 cumplen que $5a$ es divisor de $(a + b)^2$?

Problema 9. Sean ABC, BDE y EFG triángulos equiláteros cuyos lados miden 4, 2 y 1 cm, respectivamente. El perímetro de $ABEGC$ se puede escribir como $a + \sqrt{b}$ con a, b enteros positivos. Determina $a + b$.



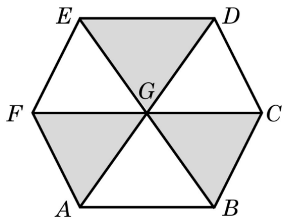
Problema 10. Dani tiene 10 cartas: una con el número 1, dos con el número 2, tres con el número 3 y cuatro con el número 4. Si elegirá solamente 4 cartas para formar un número de 4 dígitos, ¿cuántos números diferentes puede formar Dani?

Problema 11. En el triángulo ABC, se tiene que $\angle ACB = 90^\circ$. Sean D y E puntos en el lado BC, tales que $BD = 26$, $DE = 4$ y $EC = 5$. Si el área del triángulo ADE es 24, determina el valor numérico de $AB + AC + AD + AE$.

Problema 12. Sea $S(n)$ la suma de dígitos del entero positivo n. Un año $n \geq 2017$ se dice azulado si en ese año se realiza la edición k de la OMMEB y $S(n) = k$. Por ejemplo 2024 es azulado ya que $2 + 0 + 2 + 4 = 8$. Si la OMMEB se hace 1 vez por año y se hizo por primera vez en 2017, ¿cuántos años son azulados?

Parte B

Problema 13. Se desean acomodar los números del 1 al 7 (sin repetir) en los vértices A, B, C, D, E, F y G, de tal manera que para cada triángulo gris la suma de los números en sus vértices sea la misma. Encontrar la suma de los números que pueden ir en G.



Problema 14. Sea $S(n)$ la suma de dígitos del entero positivo n. El número N es el menor entero positivo tal que $S(N)$ y $S(N + 1)$ son ambos múltiplos de 2024. ¿Cuántos dígitos tiene N?

Problema 15. Un triángulo ABC cumple que $\angle A = \angle B = 70^\circ$ y $\angle C = 40^\circ$. Se tiene un punto interior P de manera que $\angle CBP = 40^\circ$ y $\angle PCB = 30^\circ$. Encuentra, en grados, la medida del ángulo $\angle PAC$.

Soluciones del examen individual (Nivel III)

Solución 1. Hay 4 diferentes "orientaciones" pero todas son equivalentes, así que basta con contar en una orientación. Por ejemplo, en L. La esquina del triminó puede estar en cualquier casilla excepto la fila superior o la columna derecha. Por tanto en esa orientación, hay $6\times 8 = 48$ posiciones, de modo que en cualquier orientación habrá $48\times 4 = 192$.

Solución 2. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{7-(b+c)}{b+c}+\frac{7-(c+a)}{c+a}+\frac{7-(a+b)}{a+b}\\
&= \frac{7}{b+c}-1+\frac{7}{c+a}-1+\frac{7}{a+b}-1\\
&= 7\Big(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\Big)-3\\
&= 7\left(\frac{7}{10}\right)-3=\frac{49}{10}-3=\frac{19}{10}
\end{aligned}$$

.

Entonces $m + n = 29$.

Solución 3. Notemos que la condición implica que los dígitos deben de ir disminuyendo de izquierda a derecha, de lo contrario al intercambiar dos dígitos consecutivos el número que resultaría sería mayor o igual. Entonces basta contar cuantas elecciones $a > b > c$ hay con a, b, c números entre 0 y 9. Esto corresponde a tomar $7 \geq a' \geq b' \geq c' \geq 0$, que contando con 3 separadores de entre 10 objetos resulta $\binom{10}{3} = 120$.

Solución 4. Sean P y Q los puntos de intersección de LD y LA con BC, respectivamente. Observemos que los triángulos ALD y QLP son semejantes y que la altura del triángulo QLP trazada desde L mide $4\sqrt{3}$ (esta altura mide lo mismo que FB). Además como la altura desde L en el triángulo ALD mide $4 + 4\sqrt{3}$, entonces

$$\frac{PQ}{4}=\frac{4\sqrt{3}}{4+4\sqrt{3}},$$

de donde

$$PQ = \frac{4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4(3)-4\sqrt{3}}{2} = 6-2\sqrt{3}.$$

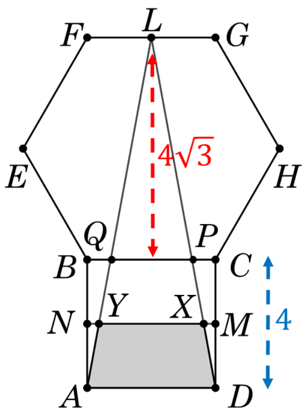
Por otro lado podemos ver que el cuadrilátero $PQAD$ es un trapecio isósceles y que X, Y son los puntos medios de sus lados no paralelos, así que $XY = \frac{PQ+AD}{2}$, es decir

$$XY = \frac{10-2\sqrt{3}}{2} = 5-\sqrt{3}.$$

Por último, calculemos el área del cuadrilátero $XYAD$ (que es un trapecio isósceles con altura 2 cm) como sigue

$$(XYAD) = \frac{2\times(XY+AD)}{2} = 5-\sqrt{3}+4 = 9-\sqrt{3}$$

Por lo tanto $a+b=12$.



Solución 5. Primero exploraremos los primeros pasos de Flynn. Del 1 se mueve al 2, del 2 al 4, del 4 al 8, del 8 al 16, del 16 al 32 y del 32 luego da la vuelta hasta el 4. Después se moverá en ciclo pasando por $4, 8, 16, 32$, de modo que excepto por los primeros 2 movimientos, Flynn se mueve en un ciclo de tamaño 4. Como 2 horas menos los primeros dos minutos equivalen a 118 minutos, que dejan residuo 2 al dividir por 4, tenemos que Flynn termina en el segundo punto del ciclo, es decir, en 8.

Solución 6. En la figura 1 hay 4 puntos iniciales, se puede representar como 2^2; en la figura 2 están los 4 puntos iniciales y los de una cruz más, ahí ya no se agregan 4 puntos, sólo 3, es decir 4 + 3 y se puede representar como $2^2+1(2^2-1) = 2^2+3 = 7$; en la figura 3 están los 4 puntos iniciales y dos veces 3 puntos, es decir 4 + 3 + 3 y se puede representar como $2^2+2(2^2-1) = 2^2+2(3) = 10$; en la figura 4 están los 4 puntos iniciales y tres veces 3 puntos, es decir 4 + 3 + 3 + 3 y se puede representar como $2^2+3(2^2-1) = 2^2+3(3) = 13$; en la figura 5 están los 4 puntos iniciales y cuatro veces 3 puntos, es decir 4 + 3 + 3 + 3 + 3 y se puede representar como $2^2 + 4(2^2 - 1) = 2^2 + 4(3) = 16$; en la figura 6 están los 4 puntos iniciales más cuatro veces 3 puntos de un primer ciclo cerrado y tres puntos más de un segundo ciclo, es decir 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 y se puede representar como $2^2 + 5(2^2 - 1) = 2^2 + 5(3) = 19$.

Se puede observar que:
Figura 2 se representa como $2^2 + 1(2^2 - 1) = 2^2 + 1(3) = 7$
Figura 3 se representa como $2^2 + 2(2^2 - 1) = 2^2 + 2(3) = 10$
Figura 4 se representa como $2^2 + 3(2^2 - 1) = 2^2 + 3(3) = 13$
Figura 5 se representa como $2^2 + 4(2^2 - 1) = 2^2 + 4(3) = 16$
Figura 6 se representa como $2^2 + 5(2^2 - 1) = 2^2 + 5(3) = 19$
Figura 7 se representa como $2^2 + 6(2^2 - 1) = 2^2 + 6(3) = 22$

Notemos que, según el número de figura, una unidad menos se multiplicará por (22 - 1) Entonces para saber cuántos puntos tendría la figura 2024, se puede calcular con:
Figura 2024, $2^2 + 2023(2^2 - 1) = 2^2 + 2023(3) = 4 + 6069 = 6073$ puntos.

Solución 7. Sea $\angle PAC = \alpha$. Notemos que $\angle BQC = \alpha$ y $\angle BCA = 30^\circ + \alpha$, por lo que $\angle CBQ = \angle BCA - \angle BQC = (30^\circ + \alpha) - \alpha = 30^\circ$. En conclusión $\angle BQR = 75^\circ$, así que el triángulo BRQ es isósceles. Así, $CR = BR - BC = 7 - 2 = 5$.

Solución 8. Como $5a$ divide a $(a + b)^2$, 5 divide a $(a + b)^2$ y como 5 es primo, entonces 5 divide a $a + b$. Además, como cada uno es menor que 10, $a + b$ es a lo más 18 y luego es alguno de 5, 10 o 15.

Podemos enlistar cada caso y verificar si se cumple, o no, la condición.

$\mathbf{a+b=5}$	$\mathbf{a+b=10}$	$\mathbf{a+b=15}$
$a=1$, $b=4$ ✓	$a=1$, $b=9$ ✓	$a=6$, $b=9$ ✗
$a=2$, $b=3$ ✗	$a=2$, $b=8$ ✓	$a=7$, $b=8$ ✗
$a=3$, $b=4$ ✗	$a=3$, $b=7$ ✗	$a=8$, $b=7$ ✗
$a=4$, $b=1$ ✗	$a=4$, $b=6$ ✓	$a=9$, $b=6$ ✓
	$a=5$, $b=5$ ✓	
	$a=6$, $b=4$ ✗	
	$a=7$, $b=3$ ✗	
	$a=8$, $b=2$ ✗	
	$a=9$, $b=1$ ✗	

Esto es, son 6 parejas.

Solución 9. Notemos que el triángulo DFG es isósceles y que $\angle DFG = 120^\circ$, de donde $\angle FDG = 30^\circ$, por lo que $\angle GDC = 90^\circ$. Por otro lado, DG es la altura del triángulo BDE, así que como $BD = 2$ se tendrá $DG = \sqrt{3}$. Así, utilizando el teorema de Pitágoras tendremos

$$CG = \sqrt{DG^2 + DC^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7},$$

es decir, el perímetro buscado es $4 + 4 + 2 + 1 + \sqrt{7} = 11 + \sqrt{7}$. Finalmente $a = 11$, $b = 7$ y $a + b = 18$.

Solución 10. Observemos:

- Si los 4 dígitos son iguales, solo hay una forma y todos deben ser dígitos 4.
- Si se tienen 3 dígitos iguales y uno diferente, hay 4 permutaciones. Los dígitos iguales pueden ser el 3 o el 4, y el cuarto dígito puede ser cualquiera de los otros, por lo que hay $4 \times 2 \times 3 = 24$ formas.
- Si se tienen 2 dígitos iguales y los otros dos diferentes, tenemos $\frac{4!}{2!}$ permutaciones. Los dígitos iguales pueden ser 2, 3 o 4, y los otros dos los podemos elegir de $\binom{3}{2}$ formas. Tenemos $3 \times \binom{3}{2} \times \frac{4!}{2!} = 3 \times 3 \times 12 = 108$ formas.
- Si se tienen 2 pares de dígitos iguales, hay $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ permutaciones. Tanto el primero como el segundo par de dígitos pueden ser 2, 3 o 4. Tenemos $\frac{3 \times 2}{2} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 3 \times 6 = 18$ formas.
- Si se tienen 4 dígitos diferentes, hay $4! = 24$ formas.

En total son $1 + 24 + 108 + 18 + 24 = 175$.

Solución 11. Notemos que $AC = 12$ por ser la altura de un triángulo con área 24 y base 4. Entonces $AE = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, $AD = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ y $AB = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$. Luego la suma $AB + AC + AD + AE = 77$.

Solución 12. Notemos que 2020 es el primer año azulado y de ahí a 2029 todos lo son. Vemos que $S(n+1) \leq S(n) + 1$ (si el último dígito de n es 9, $S(n+1) < S(n)$ y si no lo es, $S(n+1) = S(n) + 1$). Por tanto como $S(2030) < 14$, todo $n \geq 2030$ no va a ser azulado. Así que hay 10 años azulados.

Solución 13. Supóngase que la suma de cada triángulo debe dar S y obsérvese que si sumamos los seis triángulos obtenemos que: $3S = (A+B+C+D+E+F) + 3G$, de donde obtenemos que $A+B+C+D+E+F$ debe ser múltiplo de 3. Como $1+2+3+4+5+6+7 = 28$, de ahí que G puede ser 1, 4 ó 7. Por último, veamos que:

- Si G es 1, entonces una forma de acomodar los números sería $A = 2$, $F = 7$, $E = 3$, $D = 6$, $C = 4$ y $B = 5$.
- Si G es 4, entonces una forma de acomodar los números sería $A = 1$, $F = 7$, $E = 2$, $D = 6$, $C = 3$ y $B = 5$.
- Si G es 7, entonces una forma de acomodar los números sería $A = 1$, $F = 6$, $E = 2$, $D = 5$, $C = 3$ y $B = 4$.

Por lo tanto, la suma de los posibles números que pueden ir en G es $1 + 4 + 7 = 12$.

Solución 14. Sea N de la forma:

$$N = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0}$$

queremos encontrar el valor de k. Sea r un entero positivo tal que $0 \leq r \leq k$ definimos i como el mínimo valor de r tal que $a_i \neq 9$. En otras palabras, el número N se expresa de la forma:

$$N = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_i 99\cdots 9}$$

Donde hay i cantidad de nueves al final de N (que puede ser $i = 0$). Vemos entonces que:

$$S(N) = a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_i + 9i$$

y que:

$$S(N+1) = a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_i + 1$$

Ya que como a_i es un dígito distinto de 9, sabemos que a_i+1 es un solo dígito también. Luego tenemos que esas dos sumas son múltiplo de 2024, entonces vemos que:

$$a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_i + 9i \equiv a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_i + 1 \pmod{2024}$$

De donde:

$$9i \equiv 1 \pmod{2024}$$

$$9i \equiv 2025 \pmod{2024}$$

Y como $(9, 2024) = 1$, tenemos:

$$i \equiv 225 \pmod{2024}$$

Entonces como queremos el menor valor, es cuando $i = 225$, de forma que:

$$N = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_{225}\underbrace{99\cdots 99}_{225}}$$

De aquí tenemos que:

$$a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_{225} + 2025 \equiv 0 \pmod{2024},$$

$$a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_{225} \equiv 2023 \pmod{2024},$$

El caso más pequeño se da cuando $a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_{225} = 2023$. Para tener la menor cantidad de dígitos debemos tener la mayor cantidad de nueves, entonces como $2023 \equiv 7 \pmod 9$ tenemos que $a_{225} = 7$ y desde a_{226} hasta a_{k-1} todos son nueves. Por lo tanto el valor de N es:

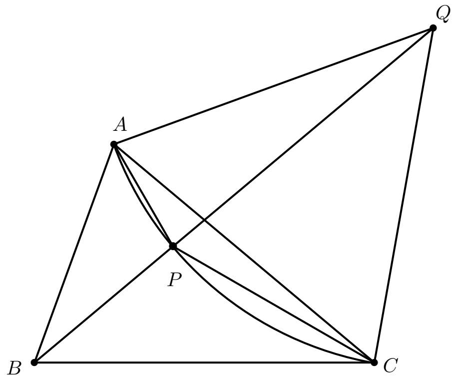
$$N = \underbrace{99\cdots 9}_{224}7\underbrace{99\cdots 9}_{225}$$

Y de aquí N tiene 450 dígitos.

Solución 15. Consideremos un triangulo equilátero exterior a ABC construido sobre el lado AC, es decir, tomemos un punto Q tal que ACQ es equiláteros. Como $CQ = CA = CB$ se tiene que el triángulo QBC es isósceles. Calculando el ángulo $\angle QCB$ se tiene que

$$\angle QCB = \angle QCA + \angle ACB = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ.$$

Luego se debe tener que $\angle BQC = \angle CBQ = 40^\circ$ de donde se concluye que P esta sobre BQ. Por ángulos externos en el triángulo BCP se tiene que $\angle CPQ = \angle CBP + \angle PCB = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$, por otro lado $\angle QCP = \angle QCA + \angle ACP = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$ de donde se concluye que el triángulo QPC es isósceles con $QP = QC$. Lo anterior implica que Q es el circuncentro del triángulo APC, luego $\angle PAC = \frac{\angle PQC}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$ por ángulo central-inscrito.



Prueba por equipos (Nivel III)

Problema 1. Para un entero k del 1 al 2024 inclusive, Ana quiere elegir 2 enteros a, b no necesariamente distintos, de tal forma que

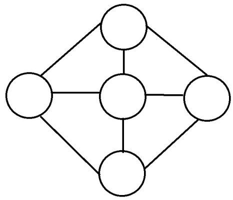
- $ab = k$
- $2a + b$ es múltiplo de 3

¿cuál es la cantidad de números k para los que Ana puede hacer esto?

Problema 2. Ariel escribe los números del 1 al 25 y después borra algunos. Los números restantes los separa en dos grupos de tal forma que el producto de los números del primer grupo es igual al producto de los números del segundo grupo. ¿Cuál es la mínima cantidad de números que pudo quitar Ariel al inicio?

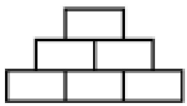
Problema 3. Con dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$ se formaron 5 números de dos dígitos, usándolos todos una vez, y de tal forma que el producto de estos 5 números es el máximo posible. Determina el mayor de estos números.

Problema 4. En cada uno de los círculos de la siguiente figura se pone algún número del 1 al 6, de manera que no haya dos números consecutivos o iguales en círculos que compartan un lado. ¿De cuántas maneras diferentes podemos hacer lo anterior?



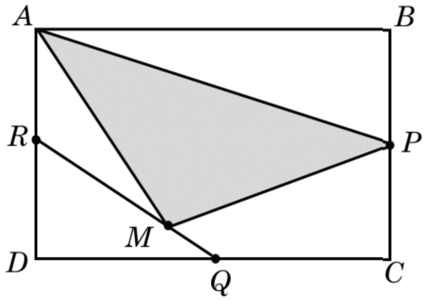
Problema 5. Se tiene un polígono regular de n lados, se escogen dos lados distintos del polígono, y se trazan perpendiculares a esos lados, al intersectarse esas dos líneas se forma un ángulo de 80°. Si se sabe que este ángulo no se podría haber obtenido con ningún otro polígono de menos lados. ¿Cuánto vale n?

Problema 6. Con bloques de madera de colores se construyen *pirámides* de tres pisos, con tres bloques en el primer piso, dos en el segundo y un bloque en el tercer piso, como la que se muestra a continuación. Se pide, además, con bloques que se tocan sean de distinto color. Si hay 43 bloques azules, 37 bloques rojos, 31 bloques morados y 29 bloques blancos, ¿cuál es el máximo número de pirámides que se podrán construir al mismo tiempo con las cantidades de bloques disponibles?



Problema 7. En la OMMEB se hizo una fiesta a la que asistieron n personas de los 32 estados de México. Se sabe que en cada grupo de 7 personas siempre hay 2 con la misma edad. Además, cada persona viste con una playera roja o azul. Encuentra el mínimo valor de n para el que se puede asegurar que hay 2 personas que sean del mismo estado, tengan la misma edad y el color de su playera sea el mismo.

Problema 8. Sea $ABCD$ un rectángulo de área 2024 donde P, Q y R son los puntos medios de los lados BC, CD y DA, respectivamente. Elegimos un punto M en el segmento RQ de tal manera que $n = \dfrac{RM}{MQ}$ es número entero. Si el área del triángulo APM también es un número entero, determina todos los valores de n



Soluciones de la prueba por equipos (Nivel III)

Solución 1. Dividimos en 4 casos

- $9 \mid k$
  Al elegir a, b tales que $3 \mid a, b$, claramente se puede.

- $k \equiv 3, 6 \pmod 9$
  Si esto pasa, 3 va a dividir a exactamente uno de a, b. Por tanto $3 \nmid 2a + b, 2b + a$

- $k \equiv 1 \pmod 3$
  Notemos que si $ab \equiv 1 \pmod 3$, $a \equiv b \pmod 3$ por tanto $3 \mid 2a + b, 2b + a$

- $k \equiv 2 \pmod 3$
  Notemos que si $ab \equiv 2 \pmod 3$, $a \equiv 1 \pmod 3$ y $b \equiv 2 \pmod 3$ o viceversa. Por tanto, $3 \nmid 2a + b, 2b + a$

Así que Ana gana cuando $k \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod 9$ y como $9 \mid 2025$ hay la misma cantidad de k's para cada congruencia módulo 9. Asi que la cantidad de k es $\frac{2025}{9} \cdot 4 - 1 = 899$.

Solución 2. Como los números deben coincidir en el producto, debe quitar los números primos menores a 25 que aparecen solo una vez, los cuales son el 13, 17, 19 y 23. Luego, el 7 aparece 3 veces ($\{7, 14, 21\}$) por lo que hay que eliminar uno de ellos para que tengamos una cantidad par de factores 7. Si contamos los factores que quedan ($\{2, 3, 5, 11\}$) el 11 aparece 2 veces, el 5 aparece 6 veces, el 3 aparece 10 veces (contando al 21) y el 2 aparece 22 veces (contando al 14) por lo tanto si quitamos el 7 tendríamos que separar los números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25\}$ en dos grupos tal que el producto sea:

$$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$$

Lo cual se puede hacer como sigue:

$$\{1, 2, 3, 5, 8, 11, 14, 15, 18, 20, 24\}, \text{ y } \{4, 6, 9, 10, 12, 16, 21, 22, 25\}.$$

Por lo tanto la menor cantidad de números que debe quitar al inicio es 5.

Solución 3. Sin perdida de generalidad cada número de los formados es de la forma $\overline{ab}$ con $a > b$, de lo contrario se puede incrementar el producto. Entonces el número mas grande buscado empieza en 9. Supongamos que tenemos los números $\overline{9a}$ y $\overline{b0}$, notemos

$$\begin{aligned}\overline{9a} \cdot \overline{b0} = (90 + a)(10b) = 900b + 10ab& \\ < 900b + 90a = 90(10b + a) = 90 \cdot \overline{ba}&\end{aligned}$$

Por lo tanto en el producto más grande el número mayor es 90.

Solución 4. Haremos el conteo de acuerdo al número que pongamos en el centro y denotaremos por (a, b, c, d, e) a un arreglo en los círculos donde a es el número de la izquierda, b es el número de la derecha, c es el número del centro, d es el número de arriba y e es el número de abajo.

1. $c = 1$: En este caso, no podemos utilizar el 2. Así tenemos los siguientes casos:

   - Primero abordaremos el caso cuando $a = b$. Si $a = b = 3$, entonces tenemos las opciones $(3, 3, 1, 5, 5)$, $(3, 3, 1, 6, 6)$, $(3, 3, 1, 5, 6)$ y $(3, 3, 1, 6, 5)$, ya que no podemos usar el 4 (4 formas). Si $a = b = 4$ entonces la única forma es $(4, 4, 1, 6, 6)$ (1 forma). Si $a = b = 5$ tenemos la opción $(5, 5, 1, 3, 3)$ (1 forma). Si $a = b = 6$ tenemos las opciones $(6, 6, 1, 4, 4)$, $(6, 6, 1, 3, 3)$, $(6, 6, 1, 4, 3)$ y $(6, 6, 1, 3, 4)$ (4 formas).
   - Cuando $a = 3$ y $b = 4$, entonces tenemos la opción $(3, 4, 1, 6, 6)$ porque no podemos usar el 5 (1 forma). Para $a = 3$ y $b = 5$, no hay opciones porque no podemos poner el 4 y 6 en otro lugar. Si $a = 3$ y $b = 6$, tampoco hay opciones.

- Si $a = 4$ y $b = 3$, tenemos la única opción $(4, 3, 1, 6, 6)$ (1 forma). Para $a = 4$ y $b = 5$ no hay opciones porque no podemos poner el 3 y el 6. Algo similar sucede cuando $a = 4$ y $b = 6$.
- Si $a = 5$ y b no puede ser 2, 3 o 4. Para el caso $a = 5$ y $b = 6$ se tiene la forma $(5, 6, 1, 3, 3)$ (1 forma).
- Si $a = 6$ y b no puede ser 2, 3 o 4. Así que cuando $b = 5$ tenemos la opción $(6, 5, 1, 3, 3)$ (1 forma).

En este caso hay 14 maneras.

2. $c = 2$. En este caso no podemos usar 1 y 3. Luego tenemos los siguientes casos:

   - Supongamos primero que $a = b$. Así, cuando $a = b = 4$ tenemos la única opción $(4, 4, 2, 6, 6)$ (1 forma). Si $a = b = 5$ no hay opciones al no poder usar 4 y 6. Para $a = b = 6$ entonces la única manera es $(6, 6, 2, 4, 4)$ (1 forma).
   - Si $a \neq b$ y $a, b \in \{4, 5, 6\}$, entonces no hay formas.

   En este caso hay 2 maneras.

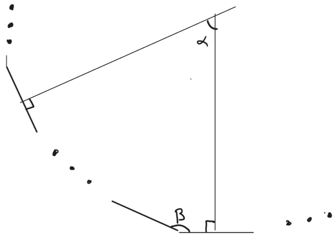
3. $c = 3$. En este caso no podemos usar 2 y 4, así que tenemos las siguientes opciones:

   - Analicemos el caso cuando $a = b$. Si $a = b = 1$ entonces tenemos las opciones $(1, 1, 3, 5, 5)$, $(1, 1, 3, 6, 6)$, $(1, 1, 3, 6, 5)$ y $(1, 1, 3, 5, 6)$ (4 formas). Si $a = b = 5$ entonces tenemos la opción $(5, 5, 3, 1, 1)$ (1 forma). Para $a = b = 6$ entonces tenemos la única opción $(6, 6, 3, 1, 1)$ (1 forma).
   - Cuando $a = 1$ y $b \in \{5, 6\}$ no hay posibilidad alguna. Cuando $a = 5$, b no puede ser 2 y 4, así que la única forma es $b = 6$ y se tiene $(5, 6, 3, 1, 1)$ (1 forma). Finalmente cuando $a = 6$ entonces b no puede ser 2 y 4, así que $b = 5$ se tiene la opción $(6, 5, 3, 1, 1)$ (1 forma).

   En este caso hay 8 maneras.

Observemos que los casos $c = 4$, $c = 5$ y $c = 6$ son simétricos a los caso $c = 1$, $c = 2$ y $c = 3$, respectivamente. Así que el total es $2(14 + 2 + 8) = 48$ maneras.

Solución 5. Si tenemos el polígono como se muestra a continuación, en donde hay k lados entre los que se trazan las perpendiculares, y el un ángulo del polígono regular mide β



Veamos que se forma un polígono de $k + 2$ lados entre las líneas perpendiculares. Por lo que la suma de los ángulos internos de ese polígono miden $180°k$. Notemos que esa suma también se puede escribir como $(k - 1)\beta + 2(90°) + \alpha$ (donde α es el ángulo que forman las perpendiculares) entonces tenemos que.

$$180°k = (k - 1)\beta + 180° + \alpha$$

$$180°(k - 1) = (k - 1)\beta + \alpha$$

$$(180° - \beta)(k - 1) = \alpha$$

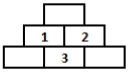
En el problema $\alpha = 80°$ por lo tanto $(180° - \beta)(k - 1) = 80°$
así que buscamos buscar el valor de β y k que cumplan, y como queremos minimizar la cantidad de lados, se minimiza mientras β sea menor.

Podemos probar los valores de β para buscar alguno que cumpla.

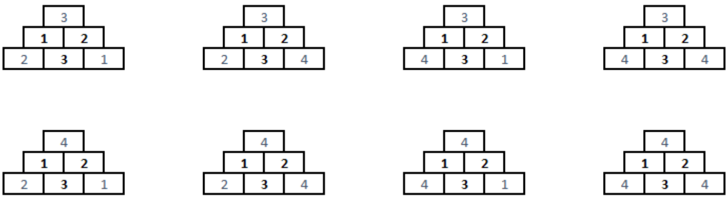
- Si $n = 3$, $180° - \beta = 120°$, k no es entero.
- Si $n = 4$, $180° - \beta = 90°$, k no es entero.
- Si $n = 5$, $180° - \beta = 72°$, k no es entero.
- Si $n = 6$, $180° - \beta = 60°$, k no es entero.
- Si $n = 7$, $180° - \beta = 51°\frac{3}{7}$, k no es entero.
- Si $n = 8$, $180° - \beta = 45°$, k no es entero.
- Si $n = 9$, $180° - \beta = 40°$, $k = 2$ por lo tanto el polígono pedido tiene 9 lados.

.

Solución 6. Si nos fijamos en los tres bloques que no son esquinas de la pirámide y los coloreamos de tres colores diferentes (porque se tocan): 1, 2 y 3.



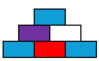
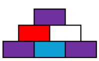
cada una de las esquinas tiene dos opciones para ser coloreada, ya sea del tercer color que no se uso en los bloques adyacentes a ella o del color 4. Dando como resultado ocho posibles coloraciones:

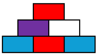
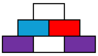


De modo que, al construir una pirámide, tenemos las siguientes opciones de uso de bloques:

- 2 bloques de un color, 2 de un segundo color y 2 de un tercer color.
- 2 bloques de un color, 2 de un segundo color, 1 de un tercer color y 1 de un cuarto color.
- 3 bloques de un color, 1 de un segundo color, 1 de un tercer color y 1 de un cuarto color.

Cada pirámide utiliza 6 bloques y hay en total $43 + 37 + 31 + 29 = 140$ bloques. Como $140 = 23 \times 6 + 2$, el máximo número de pirámides que podríamos construir sería 23. Nos falta encontrar una forma de construir esas 23 pirámides con los bloques disponibles o demostrar que no se puede y buscar un nuevo máximo. Sí, se puede y una de las formas en que se pueden construir las 23 pirámides es la siguiente:

- 3×  .
- 1×  .

- 14× .
- y 5× .

sobrando un bloque morado y uno blanco.

Nota. Hay muchas formas de construir las 23 pirámides. Para encontrar la cantidad que debe haber de cada estilo, se puede hacer una tabla e ir ajustando de manera que se dé la suma correcta y que en cada pirámide se use el número de bloques con las posibilidades que vimos arriba: $(3, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 1, 1)$ o $(2, 2, 2, 0)$. A continuación se da un ejemplo de una tabla construida así

pirámides	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	total
b. azules	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	43
b. rojos	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	37
b. morados	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	2	2	1	1	31
b. blancos	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	27
suma	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	138

Solución 7. La respuesta es 385. Para que asegurar que hallan 2 personas con el mismo color de playera, de la misma edad y del mismo estado, deben haber por lo menos 3 personas de la misma edad de un cierto estado, de caso contrario puede haber dos personas con distinto color de playera, o solo una persona.

Luego, dado que en cada grupo de 7 personas siempre hay dos de la misma edad, hay a lo más 6 posibles opciones para la edad de las personas en la fiesta, pues si hubieran 7 o más, elegimos personas con cada una de esas edades y habría un grupo de 7 personas con edades distintas.

Así que deben haber al menos 13 personas en un cierto estado, de caso contrario hay a lo más 12 personas y no se puede asegurar que hayan 3 personas de la misma edad del mismo estado. Finalmente deben haber al menos $32 \cdot 12 + 1 = 385$ personas en la fiesta para garantizar lo requerido, pues de caso contrario cada estado podría tener a lo más 12 personas, lo que es una contradicción.

Solución 8. Primero, como $\frac{RM}{MQ} = n$, entonces $\frac{(ARM)}{(AMQ)} = n$, pero

$$(AMR) + (AMQ) = (ARQ) = \frac{1}{2} AR \times DQ = \frac{1}{8}(ABCD) = \frac{2024}{4} = 253,$$

de donde se obtiene que $\frac{(ARM)}{(AMQ)} = n$ y $(AMR) + (AMQ) = 253$, por lo que

$$(AMR) = \frac{253n}{1+n},$$

esto se hace despejando (AMR) de ambas ecuaciones. De forma similar se puede ver que

$$(PMQ) + (PRM) = (PQR) = \frac{1}{2}PR \times PC = \frac{1}{4}(ABCD) = \frac{1}{4}2024 = 506,$$

como $\frac{(PMQ)}{(PRM)} = \frac{1}{n}$, entonces

$$(PMQ) = \frac{506}{1+n}.$$

Finalmente notemos que

$$\begin{aligned}
(APM) &= (ABCD) - (ABP) - (PQC) - (PMQ) - (DQR) - (ARM) \\
&= 2024 - \tfrac{1}{4}2024 - \tfrac{1}{8}2024 - \tfrac{506}{1+n} - \tfrac{1}{8}2024 - \tfrac{253n}{1+n} \\
&= 1012 - \tfrac{253n+506}{1+n} \\
&= \tfrac{1012(1+n)-253n-506}{1+n} \\
&= \tfrac{1012+1012n-253n-506}{1+n} \\
&= \tfrac{506+759n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Debido a que (APM) es un número entero, entonces $\frac{506+759n}{n+1}$ es entero, es decir que $1 + n$ es divisor de $506 + 759n$, o equivalentemente, $1 + n$ es divisor de

$$506 + 759n - 759 - 759n = 253 = 11 \times 23,$$

así que las opciones son $n = 10$, $n = 22$ y $n = 252$.

4^{th} Panamerican Girls' Mathematical Olympiad (PAGMO)

La cuarta Pan-American Girls' Mathematical Olympiad (PAGMO) se llevó a cabo del 24 al 30 de noviembre de 2024 en formato presencial en la ciudad de Durango, México, en la cual participaron 15 países: Argentina, Brasil, Bolivia, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, Guatemala, Honduras, Perú, República Dominicana, Uruguay, Costa Rica y México, sumando un total de 55 alumnas participantes, de entre 14 y 17 años.

Las estudiantes realizaron un examen con seis problemas inéditos, durante dos días, con duración de 4 horas y media por día, y un valor de 7 puntos cada uno.

La PAGMO busca potenciar un impacto positivo para las niñas y jóvenes en la comunidad de las olimpiadas de matemáticas, creando oportunidades para que las mujeres pongan a prueba su potencial matemático y, al mismo tiempo, representen a su país. Permite resaltar los logros de las mujeres en las competencias matemáticas a nivel estatal, nacional e internacional y proporciona un espacio donde las participantes pueden llevarse bien y fortalecer su confianza en su trabajo matemático. Da oportunidad de compartir con mujeres de diferentes culturas otras formas de apreciar las matemáticas y de resolver problemas a través de interacciones entre las concursantes para compartir ideas sobre su propia cultura.

El equipo mexicano estuvo conformado por:

- Sofía Constanza Santisteban Dávila (Quinta Roo), **medalla de plata**.
- Dana Karen Medina González (Yucatán), **medalla de bronce**.
- Isabela Barrera Leal (Jalisco), **medalla de bronce**.
- Elisa María Villarreal Corona (Ciudad de México), **medalla de plata**.

La líder del equipo mexicano fue Violeta Hernández Palacios mientras que la Dra.

Valentina Muñoz Porras fungió como tutora.

Los equipos que integraron el **top 5** de la competencia, en orden de puntuación fueron: Brasil, Perú, Argentina, México y Cuba.

También se otorgó el premio **Copa perseverancia**, el cual es otorgado por el país anfitrión de la competencia nacional al equipo que muestra la mayor mejora en su rendimiento durante el evento (considerando los últimos tres años). El nombre de la copa fue Enriqueta González Baz, en honor a la primera mujer matemática en México. El país premiado fue **República Dominicana**.

Finalmente las alumnas acreedoras a la presea de oro son:

⋆ Julia de Paula Pessoa Leguiza de Brasil
⋆ Estrella Anahí Zapata Chimoy de Perú.
⋆ Camila Maeda Shida de Brasil.
⋆ Sophia Li Ci Liu de Brasil.
⋆ Dhamaris Alarcon Huamani de Perú.

Ahora presentamos los problemas que se aplicaron durante esta competencia con sus respectivas soluciones propuestas por participantes, aunque las soluciones han sido ligeramente editadas por motivos de claridad.

Problemas de la 4.ª PAGMO

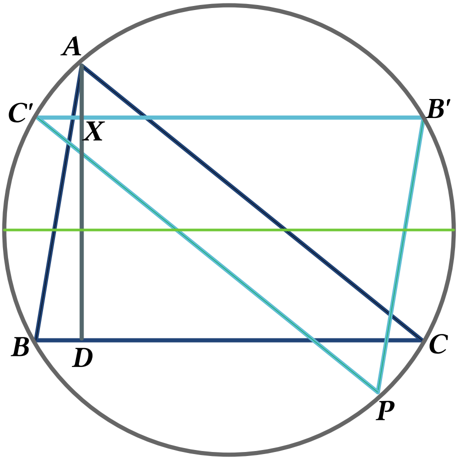
Examen día 1

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$, sea Γ su circuncírculo y sea D el pie de la altura desde A a BC. Se toma un punto E sobre el segmento BC tal que $CE = BD$. Sea P el punto en Γ diametralmente opuesto al vértice A. Demostrar que PE es perpendicular a BC.

Solución 1. *Solución de Daniela Estrada Cuevas (COL3)* Rotemos 180° al triángulo ABC respecto del circuncírculo para construir el triángulo $A'B'C'$, y observemos que $A' = P$. Además, se tendrá $B'C'$ paralela a BC, ambas perpendiculares a AD. De hecho $BCB'C'$ es un rectángulo, ya que CC' y DD' son diámetros.

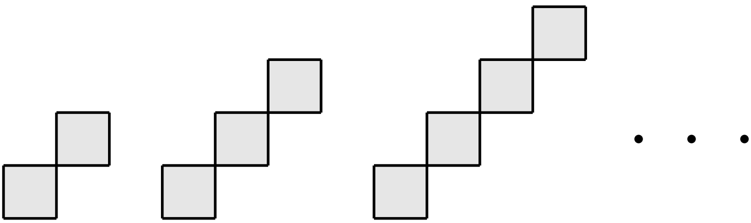
Si X es el punto de corte de AD con $B'C'$. Como $CXBD$ es un rectángulo, tendremos que $C'X = BD$, por lo que X es el punto correspondiente a E bajo la rotación, es decir $X = E'$.

Pero como AE' es perpendicular a $C'B'$, si efectuamos la rotación obtenemos que los segmentos correspondientes PE y CB con perpendiculares, con lo que concluimos la prueba.



□

Problema 2. Danielle tiene un tablero de $m \times n$ casillas y lo quiere llenar con fichas compuestas por dos o más casillas unidas diagonalmente como las que se muestran, sin superponerse ni dejar huecos:

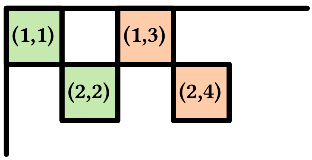


a) Hallar todos los valores de (m, n) para los cuales es posible llenar el tablero.
b) Si es posible llenar un tablero de $m \times n$ casillas, hallar el mínimo número de fichas que puede usar Danielle para llenarlo.
Nota: Se permite rotar fichas.

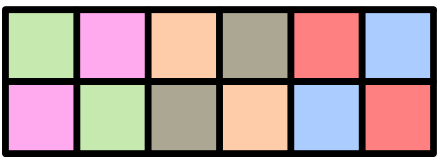
Solución 2 (*Solución de Federica Regina Corin (ARG2)*)**.** Denotemos por (i, j) la casilla que está en el renglón i, columna j, y que la cuadrícula de $m \times n$ tiene m renglones y

n columnas. Observemos que si una cuadrícula es llenable, necesariamente m y n son mayores o iguales a 2 pues de lo contrario no sería posible poner ficha alguna.

Supongamos inicialmente que n es impar. La casilla en la esquina superior izquierda, etiquetada $(1,1)$, sólo puede estar unida con $(2,2)$ (aunque esa ficha puede tener más casillas pegadas). Consideremos ahora la casilla $(1,3)$, como no puede estar unida con $(2,2)$, la ficha que la cubre necesariamente cubre también a $(2,4)$. El mismo razonamiento nos revela que todas las fichas de la forma $(1,y)$, con y impar, deben estar unidas a $(2, y+1)$, pero, en el caso de que n sea impar, la ficha $(1,n)$ será imposible de cubrir. Un argumento simétrico en dirección vertical demuestra también que si m es impar, es imposible cubrir la cuadrícula.



Ahora veremos que si m, n son ambos pares, siempre es posible cubrir la cuadrícula. Pero aquí únicamente necesitamos dar una construcción adecuada. Dividimos la cuadrícula en tiras de $2 \times n$.Como en la figura de arriba, cuando y es impar, podemos cubrir $(1,y)$ y $(2,y+1)$ simultáneamente, sin que haya problema al final de la tira, mientras que con fichas en la otra dirección diagonal, podemos cubrir las casillas $(1,y)$, $(2,y-1)$ en el caso de que y sea par.



Esta construcción cubre por completo los primeros dos renglones de la cuadrícula, y como m es par, basta repetirla en cada par de renglones consecutivos para cubrir toda la cuadrícula. $\square$

Problema 3. Sea M un conjunto no vacío de enteros positivos y sea S_M la suma de todos los elementos de M. Definimos el *tlacoyo* de M como la suma de los dígitos de S_M.

Por ejemplo, si $M = \{2, 7, 34\}$, entonces $S_M = 2 + 7 + 34 = 43$ y el tlacoyo del conjunto M es $4 + 3 = 7$.

Demostrar que para todo entero positivo n, existe un conjunto M de n enteros positivos distintos, tal que todos sus subconjuntos no vacíos tienen el mismo tlacoyo.

Solución 3. *Solución de Estrella Anahi Zapata Chimoy (PER3)*

Consideremos un número de la forma $g = 10^k - 1$ (el valor específico de k que nos servirá lo determinaremos más adelante), que está formado por k nueves consecutivos, y consideremos el conjunto

$$B = \{g, g \cdot 10, g \cdot 10^2, \dots, g \cdot 10^{n-1}\}.$$

Observemos que la suma de elementos de cualquier subconjunto no vacío de B es de la forma

$$g(10^{a_1} + 10^{a_2} + \cdots + 10^{a_r}),$$

y por tanto es un múltiplo de g.

Si $B_1 = \{g\}$ es el primer subconjunto, es claro que $S(B_1) = g$ y por tanto $T(B_1) = 9k$. Como la suma de los elementos de cualquier otro subconjunto es un múltiplo de g, si logramos demostrar que los múltiplos de g siempre tienen la misma suma de dígitos, habremos terminado.

Consideremos un múltiplo $gr = (10^k - 1)r = (99 \cdots 9)r$. Ese número lo podemos también expresar como $gr = r \cdot 10^k - r$. Si la k es suficientemente grande, ese número es *de la forma* siguiente: las cifras de la izquierda forman al número $r - 1$, luego una serie de nueves (aquí es donde necesitamos que k sea grande), y luego una serie de dígitos formando $100 - r$.

Vamos a ilustrarlo con un ejemplo concreto, tomando $g = 99999$, es decir, $k = 5$ y consideremos el múltiplo $14g$, es decir, $r = 14$. Observemos que la suma de cifras de g es 45 y por tanto $T(B_1) = 45$.

La construcción anterior nos dice que comencemos con $14 \cdot 10^5 = 1400000$ en donde las primeras dos cifras forman 14 y el resto son ceros. Luego, al restar para obtener $14 \cdot 10^5 - 14$, el resultado es estrictamente menor a 1400000, y por tanto iniciará con las cifras 13. Por otro lado, la resta solo puede modificar las últimas dos cifras y no interfiere con lo que sucede en las primeras dos (de aquí la importancia que k sea suficientemente grande) y por tanto, en vez de terminar en 00000 ahora termina en 99986. Esto nos dice que $14g$ es el número 1399986.

Continuando con el ejemplo, consideremos ahora la suma de los dígitos de $14g$. Esta suma se obtiene sumando *las tres partes del número*: primero las cifras iniciales que forman el $r-1$, luego una serie de tres nueves, y luego el final cuyas cifras forman el $100-r$. Pero $r-1$ y $100-r$ son dos números que suman 99 y estos siempre tendrán una suma de cifras igual a $9+9=18$. Por tanto la suma de dígitos de $14g$ también es $9+9+9+9+9=45$.

En general, si r es un número de a cifras, con una k suficientemente grande, $r\cdot 10^k - r$ siempre está formado por esas tres partes, primero el grupo de a cifras que suman $r-1$, luego un grupo de nueves y finalmente un grupo de cifras que forman 10^a-r. Observemos que $r-1+(10^a-r)=10^a-1$ y no es difícil verificar que dos números con esa propiedad siempre tienen la misma suma de cifras que 10^a-1, por lo que la suma total de cifras de gr vuelve a ser $9k$.

Regresando al problema, teníamos que las sumas de los elementos de los subconjuntos no vacíos de B son de la forma

$$g\left(10^{a_1}+10^{a_2}+\cdots+10^{a_r}\right),$$

y, de hecho, la mayor suma posible es $g(1+10+100+\cdots+10^{n-1})$, que es de la forma gr con $r=11\cdots1$ formado con n unos. Escogiendo $k>2n$, podemos aplicar el argumento arriba mencionado para concluir las sumas siempre tienen *la forma apropiada* para que la suma de sus dígitos se manteng constnte.

Así, seleccionando la k suficientemente grande, hemos construido un conjunto B de n elementos cuyos subconjuntos no vacíos siempre tienen sumas de la forma gr y al sumar sus dígitos, que es lo mismo que calcular los tlacoyos de los subconjuntos, obtenemos siempre el mismo valor $9k$. $\square$

Examen día 2

Problema 4. El *n-factorial* de un entero positivo x es el producto de todos los enteros positivos menores o iguales a x que son congruentes a x módulo n.

Por ejemplo, para el número 16, su 2-factorial es $16\times14\times12\times10\times8\times6\times4\times2$, su 3-factorial es $16\times13\times10\times7\times4\times1$ y su 18-factorial es 16.

Un entero positivo es *olímpico* si tiene n dígitos, todos distintos de cero, y si es igual a la suma de los n-factoriales de sus dígitos. Hallar todos los enteros positivos olímpicos.

Solución 4. *Solución de Sofía Constanza Santisteban Dávila (MEX1)* Denotemos el n-factorial de x como $f_n(x)$. Observemos que, como en el ejemplo del enunciado, si $n \geq x$, entonces $f_n(x) = x$. Además, obsevemos que si $n = x - 1$ entonces $f_n(x)$ es el producto de todos los números entre 1 y x que son congruentes a x módulo $x - 1$, los cuales son precisamente 1 y x, por lo que $f_n(x) = 1 \cdot x = x$.

Resumimos ambas observaciones diciendo que si $n \geq x - 1$ entonces $f_n(x) = x$.

Ahora, consideremos un número de n dígitos $x = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \cdots + 10a_1 + a_0$. Como cada $a_j \leq 9$, si $n \geq 9 - 1 = 8$, por la observación anterior, si x fuera olímpico tendríamos que

$$x = f_n(a_{n-1}) + f_n(a_{n-2}) + \cdots + f_n(a_0) = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0,$$

pero como

$$10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \cdots + 10a_1 + a_0 > a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0,$$

obtenemos una contradicción. Por tanto, si hay números olímpicos, a lo mucho tienen siete dígitos.

Cuando x tiene siete dígitos, notemos que $f_7(a_i) \leq 18$, por lo que $x \leq 7 \cdot 18 = 126$, lo cual es imposible. Un argumento similar, acotando el valor de $f_k(a_i)$, nos permite descartar los casos con 6, 5 y 4 cifras. También es posible demostrar que si $i \leq j$ entonces $f_n(i) \leq f_n(j)$.

Cuando $n = 3$, pensemos en el número $x = 100a_2 + 10a_1 + a_0$. Como $f_3(a_i) \leq 9 \cdot 6 \cdot 3 = 162$, se cumplirá $x = f_3(a_2) + f_3(a_1) + f_3(a_0) \leq 3 \cdot 162 = 486$ por lo que $a_2 \leq 4$. Mas, como $f_3(4) = 4$, podemos ajustar la desigualdad y tener

$$x = f_3(a_2) + f_3(a_1) + f_3(a_0) \leq 4 + 162 + 162 = 386,$$

por lo que $a_2 \leq 3$. Sin embargo, en el caso en que $a_2 = 3$ tenemos $a_1 \leq 2$ y $f_3(2) = 2$, y al ajustar nuevamente la desigualdad tendremos $x \leq 168$ por lo que es imposible $a_2 = 3$.

Continuando con $n = 3$, en el subcaso $a_2 = 2$, si $a_2 = 3$, $x = f_3(2) + f_3(a_1) + f_3(a_0) \leq 2 + 162 + 162 = 326$. Por otro lado, $f_3(9) = 162$, $f_3(8) = 80$, $f_3(7) = 28$, $f_3(6) = 18$, $f_3(5) = 10$, $f_3(4) = 4$, $f_3(3) = 3$, $f_3(2) = 2$, $f_3(1) = 1$, así que $m = f_3(2) + f_3(a_1) + f_3(a_0)$ solo es posible si $10a_1 + a_0$ es $99, 89$ o 98, y es posible verificar que en ninguno de esos casos obtenemos un valor posible para x.

Tenemos entonces la última posibilidad del caso $n = 3$, que es $a_2 = 1$. Pero el mismo argumento del subcaso anterior, nos obliga a que $10a_1 + a_0$ sea $88, 89, 98$ o 99, y ninguno de esos valores lleva a un número olímpico.

Continuamos ahora con el caso $n = 2$, y sea $x = 10a_1 + a_0 = f_2(a_1) + f_2(a_0)$. Dado que $f_2(9), f_2(8), f_2(7)$ son números de 3 cifras, quedan descartados los dígitos 7, 8, 9. Además, $f_2(6) = 48, f_2(5) = 15, f_2(4) = 8, f_2(3) = 3, f_2(2) = 2, f_2(1) = 1$.

Procedemos a analizarlos subcasos para a_1. Por ejemplo, si $a_1 = 6$, entonces

$$x = 60 + a_0 = f_2(6) + f_2(a_0) = 48 + f_2(a_0),$$

de donde, al despejar, tenemos $12 = f_2(a_0) - a_0$ pero ninguna de las posibilidades para a_0 satisface esa condición.

Cuando $a_1 = 5$:

$$x = 50 + a_0 = f_2(5) + f_2(a_0) = 15 + f_2(a_0),$$

nos lleva a $35 = f_2(a_0) - a_0$ que no se satisface para ningún $a_0 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Un razonamiento similar se aplica en todos los subcasos para poder concluir que no hay números olímpicos de dos cifras.

Finalmente, en el caso $n = 1$ tenemos que $x = a_0 = f_1(a_0)$ y por verificación directa concluimos que las únicas posibilidades son $x = 1$ o $x = 2$, resultando estos últimos los únicos números olímpicos que existen. $\square$

Problema 5. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x+y) - f(x)) + f(x)f(y) = f(x^2) - f(x+y),$$

para todos los números reales x, y.

Solución 5. *Solución de Helen Paola Morán Cerón (SLV1)*

Para comenzar haremos algunas sustituciones para (x, y). Cuando sustituimos $(x, 0)$ obtenemos

$$f(0) + f(x)f(0) = f(x^2) - f(x), \tag{22}$$

mientras que si sustituimos $(0, x)$ obtenemos

$$f(f(x) - f(0)) + f(0)f(x) = f(0) - f(x). \tag{23}$$

Una sustitución menos obvia es $(x, -x)$, que nos da

$$f(f(0) - f(x)) + f(x)f(-x) = f(x^2) - f(0). \tag{24}$$

Ahora, al sustituir $(0,0)$ resulta

$$f(0)+f(0)^2=f(0)-f(0)=0, \tag{25}$$

por lo que $f(0)(f(0)+1)=0$ y por tanto hay dos casos: $f(0)=0$ o $f(0)=-1$.

Caso 1. Supongamos $f(0)=0$. La sustitución en (22) la reduce a $f(x^2)-f(x)=0$ por lo que $f(x^2)=f(x)$, pero como la expresión anterior es válida para toda x, en particular $f(-x)=f((-x)^2)$ y podemos concluir:

$$f(x^2)=f(x)=f(-x). \tag{26}$$

Ahora, (23) se reduce a

$$f(f(x))=-f(x), \tag{27}$$

mientras que (24) nos dice que $f(-f(x))+f(x)f(-x)=f(x^2)$, mas como (26) establece $f(x^2)=f(x)$, $f(-x)=f(x)$, y si aplicamos (26) con $-f(x)$ en vez de $-x$, concluimos:

$$f(f(x))+f(x)^2=f(x). \tag{28}$$

Si ahora usamos (27), la expresión anterior equivale a $f(x)^2=2f(x)$, para toda x, por lo que $f(x)=0$ o $f(x)=2$. Esto no quiere decir que $f(x)$ es una función constante, sino que únicamente puede tomar esos dos valores.

Para terminar el caso, supongamos que $f(z)=2$ para algún valor z y consideremos la sustitución $(0,z)$:

$$f(f(z)-f(0))+f(0)f(z)=f(0^2)-f(z)$$

que se simplificará como $f(f(z))=-f(z)$, es decir $f(2)=-2$, lo cual es una contradicción por que -2 no es un valor admisible de la función. Concluimos entonces que en este caso, $f(x)=0$ para todo valor x.

Caso 2. Supongamos $f(0)=-1$. Aquí (22) nos dice $-1-f(x)=f(x^2)-f(x)$ y por tanto $f(x^2)=-1$. Por el caso en que estamos, eso implica que $f(x)=-1$ para toda $x\geq 0$.

Recodemos ahora que (24) se obtuvo conla sustitución $(x,-x)$, por lo que es válida para toda x, pero si por un momento nos restringimos a los valores donde $x\geq 0$, tendremos

$$f(-1-(-1))+(-1)f(-x)=f(x^2)-(-1) \tag{29}$$

y de ahí, $-1 - f(-x) = 0$, por lo que $f(-x) = -1$ lo cual es equivalente a $f(x) = -1$ para $x < 0$. Concluimos entonces que en este caso, $f(x) = -1$ para todo valor de x. $\square$

Problema 6. Sea ABC un triángulo y sean a, b y c las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente. Sea R su circunradio y r su inradio. Supongamos que $b + c = 2a$ y $R = 3r$.

El excírculo relativo al vértice A corta al circuncírculo de ABC en los puntos P y Q. Sea U el punto medio del lado BC y sea I el incentro de ABC.

Demostrar que U es el baricentro del triángulo QIP.

Solución 6. Sea r_a el A-exradio y sea E_a el A-excentro. El punto medio del arco BC que no contiene a A es M. Sea N el punto medio de PQ. Sea G el punto de tangencia del incírculo con AB.

Afirmamos que se cumple $UM = r$, dado que los triángulos AIG y BMU son semejantes por criterio ángulo-ángulo y congruentes porque comparten el lado $AG = UB$, y por tanto $UM = IG = r$.

Por otro lado se cumple $R = r_a$. Es conocido que

$$\frac{1}{3} = \frac{s-a}{s} = \frac{0.5a}{1.5a} = \frac{r}{r_a} \Rightarrow r_a = 3 \cdot r = R.$$

El punto medio de OE_a es N dado que el cuadrilátero OPE_aQ es rombo porque sus lados valen $R = r_a$, entonces el punto medio de OE_a es el punto medio de PQ.

Además Se cumple que $OU = 2 \cdot UM$ e $IM = ME_a$: como $OU = R$ y $UM = r$, entonces $OU = 2r$ y $UM = r$. Es conocido que M es circuncentro del IBE_aC, entonces $IM = ME_a$.

Finalmente, el gravicentro de OIE_a es U. Como M es punto medio de IE_a y se tiene $OU = 2 \cdot UM$, entonces U es gravicentro de OIE_a.

Todo lo anterio nos dice que la recta IU pasa por N y corta en relación 1:2 por el último punto ($IU = 2 \cdot UN$), y entonces U es gravicentro de IPQ por la razón y porque IU es mediana de PQ. $\square$

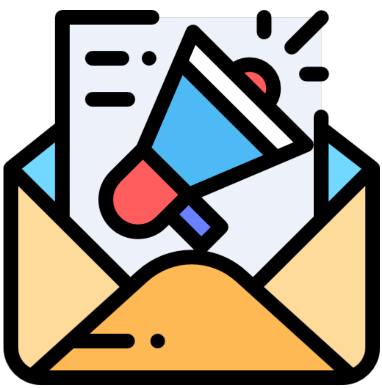
Voces de la comunidad olímpica

Bienvenidos y bienvenidas a esta nueva sección de la revista, donde en cada número publicaremos un mensaje de algunos miembros de la comunidad olímpica. El objetivo es poder dar a conocer las diferentes experiencias y perspectivas que nacen a partir de la experiencia de haber participado en la olimpiada y cómo es que este concurso se compone de muchas más cosas que un examen. Si quisieras compartir tu experiencia, ya sea que actualmente sigas participando o seas ex-olímpico/a, entrenador/a, padre de familia o parte de un comité estatal, envía tu escrito al correo:

`revistaomm@gmail.com`

y con gusto te leeremos para considerar publicarte en un siguiente número.

Esperamos disfruten de leer esta nueva sección tanto como nosotros disfrutamos crearla.



Luz Adilene Segovia Montiel (BCS)

Olímpica de B.C.S.

LAS MATEMÁTICAS Y YO

Cuatro horas y media,
seis problemas, y
cuarenta y dos puntos.

Te sientas frente al examen,
y las horas pasan,
marcadas por ese reloj,
pero el tiempo pasa aún más lento.
El entorno no importa:
sientes que lo sabes todo.
Las ideas vienen,
escribirlas se vuelve fácil.

Sin duda, toda una experiencia.

Las matemáticas son hermosas,
únicas y maravillosas.
A veces las odio,
a veces las amo,
pero da igual, porque
jamás me han dejado.

Las matemáticas son exactas y precisas,
por lo cual, no importa qué tan mal se vea,
ese problema tendrá una respuesta.

Las matemáticas me enseñaron
que, en la primera hora de los problemas
debía tomar el tiempo para
pensar, leer y analizar.
Y, si algo no entendía, lo debía preguntar.

Las matemáticas me enseñaron
a no borrar nada, porque, aún
en el proceso más extraño,

complicado y/o equivocado,
puedes obtener grandes resultados.

No te agobies: la respuesta solo vale un punto,
disfruta el proceso, que es para eso.

Las matemáticas me enseñaron
que está bien sentirse agobiado,
pero rendirte nunca será aceptado.
Detente,
    toma un respiro,
        come un chocolate,
y, cuando estés listo, sigue adelante,
vuelve a intentar.
Mientras quede tiempo,
aún lo puedes lograr.

Las matemáticas me enseñaron,
que no son solo números y fórmulas,
que hay un mundo detrás,
y están llenas de maravillas.

Las matemáticas están en todos lados,
y lo agradezco, porque cada vez que las veo,
recuerdo lo mucho que me enseñaron,
recuerdo no rendirme y seguir tratando.

L. Adilene S. M.

Miguel Raggi (MIC)

Ex-olímpico y actual delegado de Michoacán

Cuatro historias, un mismo concurso nacional

Reviso nuevamente mi hojita llena de tachaduras, donde anoté los puntajes que planeo proponer. Cambié de opinión varias veces, pero ahora estoy seguro de cuatro de ellos; no creo que haya discusión. Los otros dos son delicados. Me toca entrar a la mesa de coordinación ya, pero los coordinadores siguen ocupados con el estado anterior. ¿Qué voy a decir? Mi mente está en blanco otra vez, algo que me ocurre cada vez con más frecuencia. ¿Qué decía el problema? ¿Cómo se resolvía? Recuerdo que yo lo pasé a explicar pero, por un momento, ya no sé nada.

Sale el estado anterior. No lucen contentos. Uf, será una mesa dura. No conozco a los coordinadores, parecen muy jóvenes. Probablemente sean mucho más rápidos e inteligentes que yo, pero eso cada vez me incomoda menos.

Entro y saludo, como es debido. Saco mis notas y digo mis calificaciones. Se voltean a ver entre sí y mi nerviosismo aumenta. Estamos de acuerdo en tres de los seis, me comunican primero. A Víctor, para mi sorpresa, le otorgan un punto más de lo que pedí. Qué pena, pienso. Seguro no vi algo, aunque revisé con cuidado. A Paulina le tienen un punto menos. Está bien, ya lo esperaba. Pero para José Andrés, que para mi gusto resolvió más de la mitad del problema, le están ofreciendo sólo 1 punto. Siento un nudo en el estómago.

Respiro hondo y saco el examen de Víctor, para revisar dónde está el punto que yo no tenía contemplado. Me explican que decidieron premiar algo que no estaba en los criterios. Excelente. Para Paulina digo sencillamente qué punto del criterio creo que tiene, pero me contestan que esperaban más para otorgar ese punto, que a varios otros estados no se lo dieron con más. Ni modo, acepto el resultado, aunque me pesa. Como coordinador yo si se lo hubiera dado, pienso.

Llega el turno de José Andrés. ¡De 4 puntos a 1! Intento hablar con firmeza y seguridad al defender el trabajo de José Andrés, pero mi voz tiembla. Mientras escucho los argumentos de los coordinadores, me carcome la ansiedad y mi mente nuevamente se pone en blanco. Hablan rápido y no les entiendo. Insisto en que casi tiene resuelto el problema. Trato de explicar por qué lo que le falta para terminar es algo sencillo, pero no se ven nada convencidos. Me ofrecen máximo 2.

No se lo van a subir más, me doy cuenta. Tengo suficiente experiencia para saber cuándo una decisión ya está tomada; se apegarán estrictamente al criterio, exigiendo un nivel de formalidad que, en mi opinión, a veces resulta excesivo.

Siempre pienso en algunos de los grandes matemáticos que conozco que seguro perderían puntos en la Olimpiada por esa misma razón.

Sigo argumentando, por principios. Maru se acerca para avisarnos que el tiempo se ha agotado. ¿En serio? Siento como si apenas hubiéramos empezado. Pido a los coordinadores reconsiderarlo y quizás verlo con la otra mesa. Me voy sin firmar, aunque sé perfectamente que ya únicamente entraré a firmar los 2 puntos.

José Andrés y Paulina no estarán contentos. ¿Cómo voy a darles esta noticia?

* * *

“Jóvenes, ¡quedan 5 minutos!”, retumba una voz poderosa en el salón.

Miro a mi alrededor. Un chico está acostado en su mesa. ¿Ya habrá terminado? ¡¿Resolvió los 3?! Yo no pude resolver ninguno. Me pidieron demostrar que no existía cierta construcción en una gráfica. Estuve intentando hacerla y no pude. Puse algunas posibilidades y las marqué con colores. ¿Con eso será suficiente? (Nota del futuro: claro que no).

No resolví ninguno completo, pero escribí varias páginas, dije varias cosas interesantes. Tal vez algo valga puntos. (Nota del futuro: no valieron). Bueno, pues ya no puedo hacer nada, entregaré mi examen y ya veremos. ¿Qué haremos el resto de la semana? Los demás de mi delegación me caen muy bien y son muy divertidos. Seguro se les ocurren juegos, o travesuras que hacer. Aunque ellos probablemente sí sacarán medalla y yo quizás no.

El muchacho que está delante mío ya está guardando sus cosas. Ni él ni yo lo sabemos aún, pero se convertirá en mi amigo-rival por los siguientes 3 años. Después de eso pasaremos años sin vernos pero un día recogeré a su hijo pequeño de la escuela y otro día le ayudaré a mover muebles, porque se estará mudando de casa.

Detrás de mí, una niña nerviosa tamborilea los dedos sobre su mesa. Tampoco lo sabemos aún, pero ella será mi primera noviecita.

Al muchacho que acaba de preguntar si puede ir al baño le perderé la pista por años, pero me lo encontraré en algún nacional, como delegado de algún estado. Me dará gusto verlo.

* * *

Vuelvo a abrir el documento titulado ‘Regla y Compás - Jueves’, con la esperanza de que algo se me ocurra esta vez. Nada.

A ver si Omar o Luis Miguel pasan por aquí para ayudarme, aunque ellos sí tienen trabajo real, no como yo, que sólo escribo el periódico para intentar hacer reír a los participantes.

Ya es de noche, la oficina está vacía.

Ya puse todo lo que nos llegó al buzón (la mayoría me imagino que son chistes locales) y ya describimos el rally del día. Tengo una columna vacía. ¿Qué pongo? El quiz *¿Qué tan olímpico eres?* lo quiero guardar para mañana.

Se abre la puerta.

“¡Edgardo! ¡Ayúdame a terminar o no te ayudaré con tus muebles en 20 años!” No, no dije eso. Me estoy confundiendo con el futuro otra vez.

Edgardo propone una idea terrible. Perfecto, por ahí se empieza. Yo respondo con algo aún peor y así nos vamos turnando hasta que, milagrosamente, encontramos algo interesante. Lo escribimos rápido, pero no funciona. Vamos a dejarlo reposar. También con los problemas funciona eso a veces.

La madrugada avanza, y pensar se vuelve casi imposible. Pero el público espera nuestras increíblemente graciosas ocurrencias para el desayuno. Habíamos planeado varias columnas, pero se nos acabaron muy rápido.

Ni modo, echaremos mano de más chistes locales, que al menos a nosotros sí nos hacen reír, y más de madrugada. Tal vez nadie los entienda, pero con suerte alguien sonreirá… o al menos fingirá hacerlo.

* * *

Mi compañero se ríe de nuevo, pero es de esas risas nerviosas, cargadas de impotencia, a medio camino entre el humor y el llanto. No estamos avanzando, nos faltan casi la mitad de los estados. Ya son las 2 de la mañana y a las 9 comienzan las coordinaciones.

He sido coordinador ya varias veces, pero nunca me había pasado así. ¿Por qué este problema es tan difícil de calificar? Para mis compañeros es su primera vez como coordinadores y, después de esto, sospecho que también será la última (nota del futuro: no me equivoqué).

Trato de animarlos, contándoles cómo es en otras ocasiones. Pero ser coordinador es satisfactorio de una manera tan extraña que es difícil explicar a alguien que nunca lo ha sido.

Primero, hay que entender la solución a fondo. Sólo así es posible diseñar un criterio justo para distribuír correctamente los 7 puntos. Es como un juego de optimización combinatoria, de logística. ¿Qué ideas tienen en común estas dos partes de la solución que podamos "factorizar"? ¿Cómo empatamos las diferentes soluciones?

Pero encontrar un criterio bonito y elegante se siente tan bien como resolver un problema 6 por primera vez.

Y entonces llegan los exámenes, siempre listos para romper tus expectativas: COA3, MIC6, NLO1, JAL5. No importa, sólo son hojas con ideas, pero esas ideas siempre te sorprenden, por su ingenuidad, por su creatividad. Nunca consideramos que a alguien se le pudiera ocurrir algo tan loco, pero tan creativo. Mi criterio, tan elegante, se quedó muy corto.

Nunca he entendido un problema tan bien como después de ser coordinador y calificar más de 100 exámenes. Es un sentimiento extraño, vivir y soñar con el mismo problema por una semana. Conocer todas sus facetas, caminos equivocados, caminos correctos.

En la 46.ª IMO (realizada en México en el 2005) fui coordinador del problema 6. Cuando intenté resolverlo, por horas debo confesar, no me salió. Pero terminando de coordinar, aunque algunos estuvieran escritos en chino (literalmente), sentí que el problema era totalmente obvio.

Hay un placer peculiar en desentrañar las mentes de los estudiantes, en recorrer sus razonamientos y encontrar la belleza, incluso en los errores.

Con el amanecer ya asomándose por las ventanas y el cansancio hundiéndonos los hombros, finalmente terminamos. Mi compañero, exhausto, murmura algo sobre no volver a hacer esto nunca más (nota del futuro: no lo hizo). Yo sonrío, sabiendo que no puedo prometer lo mismo.

Porque, a pesar de todo, ser coordinador siempre me deja algo nuevo. No es sólo aprender a resolver problemas; es aprender a descifrar las mentes que los enfrentan.

* * *

Una parte de mi espera escuchar mi nombre, aunque sé que no pasará. Dos de mis compañeros sacaron oro, estoy contento por ellos, o al menos eso me repito a mí mismo. Los demás sacaron platas y bronces. Yo fui el único sin medalla, pero tal vez se equivocaron, tal vez sí obtuve medalla y ahorita me llaman a pasar, no se habían dado cuenta de que mis hojas de reciclaje contenían buenas ideas, pero ya lo corrigieron, ¡tal vez!

No, claro que no. Hay que vivir en el mundo real. Y en el mundo real saqué casi 0 puntos, no hubo error, y eso no da medallas. El próximo año será diferente, ahora sí le echaré más ganas.

En realidad, salvo por el pequeño detalle del examen, pasé una gran semana. Jugué "asesino" en la madrugada con gente de Puebla, Jalisco, y quién sabe cuántos otros lugares. Hicimos travesuras, nos robamos la manta (nota del futuro: ¡ya no es cool hacer esto! Antes lo era…), nos reímos a carcajadas.

Pasa Dante por su bronce. Después de ese día nunca lo volvería a ver, pero me divertí mucho con él. Pasan Mario y Juan Pablo por sus platas. Mario está feliz, pero Juan Pablo está un poco decepcionado, creyó que tal vez sacaría oro. A ambos los seguí viendo por años, después perdí su contacto, pero encontré a Juan Pablo en un congreso muchos años después. Aún dibujaba.

Pasa Juan Manuel por su oro. Está llorando. Nunca creyó que pudiera colarse al corte. Su familia está llorando también. A él lo vi hace poco en una fiesta infantil, donde coincidió que nuestros hijos habían sido invitados. Ceci pasa por su oro también. Todos sabíamos que ella sacaría oro, no había duda. A ella la vi en Canadá en un congreso hace años, pero recientemente prometió que ayudaría a entrenar en Michoacán un poco.

Todos mis compañeros de Olimpiada quedaron grabados en mi memoria, aunque los conocí tan sólo unas semanas. A veces me encuentro gente que hizo la primaria, secundaria o prepa conmigo y apenas los recuerdo. ¿Por qué?

* * *

Ser delegado es mucho trabajo emocional. Ahora se trata de Paulina y José Andrés, no de MIC3 y MIC4. Son personas, no claves, que sienten, que se alegran o se entristecen. Paulina se sentirá tonta, aunque no tenga sentido; después de todo, está en la selección estatal de un estado. ¡Nadie aquí es tonto! José Andrés, por otro lado, no obtendrá la medalla que merece.

Ya tengo mi discurso preparado. Uno que repito cada año: "En mi primer nacional saqué casi 0 puntos. Durante la premiación, cuando vi a mis compañeros pasar por sus medallas, decidí en ese momento que el siguiente año yo sería uno de esos. Me puse a trabajar duro y logré sacar oro.”

He contado ese cuento tantas veces que hasta yo mismo me lo estoy creyendo. Quizás no sea del todo cierto, quizás la realidad tuvo varios matices o sutilezas. Pero siento que oír eso les ayuda. Quizás me ayuda más a mi, a tener palabras cuando los veo tristes por no obtener el resultado que esperaban.

Cada año me toca informar a quienes no quedaron en la selección y cada año me toca despedirme de algunos olímpicos. Ya me acostumbraré. Un día. Un día.

Pronto será la premiación y, aunque algunos nombres brillarán bajo los reflectores, otros quedarán en las sombras. Pero sé que, incluso en esos momentos difíciles, el concurso deja una chispa encendida en todos, como dejó en mi. Una chispa que ojalá nunca se apague.

Mi nombre es Miguel Raggi y he jugado muchos papeles en el nacional. Fui participante hace ya bastante tiempo (o como una simpática codelegada de Baja California Sur expresó amablemente, mi último nacional fue antes de que nacieran los participantes actuales).

Después fui coordinador en varias ocasiones, después parte del comité nacional, y ahora delegado de Michoacán. He estado en más de quince concursos nacionales, y puedo decir que todos son el mismo. Las personas cambian, el lugar cambia, mi rol cambia, pero siempre es lo mismo. Siempre me da gusto estar en uno, siempre me da gusto ver a la gente de nuevo, siempre hay un aire de expectativa, de camaradería, de competencia. Siempre siento que vuelvo a un hogar.

El concurso nacional es un torbellino de emociones, un mar de ideas, un mosaico de historias entrelazadas que, al final, siempre nos deja algo. No importa si eres participante, delegado o coordinador, todos aprendemos algo: sobre matemáticas, sobre nosotros mismos, sobre cómo enfrentarnos al mundo con lápiz en mano y la cabeza llena de ideas.

La Olimpiada de Matemáticas es mucho más que el concurso nacional, pero aquí es donde todo converge. Y aunque ya he sido testigo de más de quince nacionales, espero con ilusión el día en que pueda decir que fui a sesenta.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** Si a y b son números enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = a \cdot q$ para algún número entero q; lo anterior se denota por $a \mid b$.

Definición 2 (Congruencias)**.** Dados dos números enteros a, b y un número entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** Sean a, b, c, d, m números enteros con $m \geq 1$.

1. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.

2. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + b \equiv c + d \pmod{m}$.

3. Si $a \equiv c \pmod{p}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.

4. Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo número entero positivo n.

5. Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{\operatorname{mcd}(b,m)}}$ donde $\operatorname{mcd}(b, m)$ denota el máximo común divisor de b y m.

Teorema 2 (Pequeño teorema de Fermat)**.** Si p es un número primo y a es un número entero coprimo con$p$ (*i.e.*, $\operatorname{mcd}(a, p) = 1$), entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema 3 (Inducción)**.** El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo número entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un número entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:

1. Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.

2. Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ donde $k \geq k_0$ es un número entero fijo (pero arbitrario).

3. Paso de inducción: Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo número entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las casillas). Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.

Teorema 5 (Combinaciones). Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio de Newton). Para a y b números reales cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no negativos, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

Teorema 9 (Pitágoras). En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Definición 3 (Congruencia de triángulos). Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.

Teorema 10 (Criterio de congruencia LLL). Si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.

Teorema 11 (Criterio de congruencia ALA). Si tenemos dos triángulos con un lado igual y los respectivos ángulos adyacentes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.

Definición 4 (Semejanza de triángulos). Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales (es decir, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$ y $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$) y sus lados homólogos son proporcionales (esto es, si $AB/A'B' = BC/B'C' = CA/C'A'$).

Teorema 12 (Criterio de semejanza AA). Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.

Teorema 13 (Tales). Si ABC es un triángulo y D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Teorema 14 (Teorema de la bisectriz). Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Teorema 15 (Ceva). Dado ABC un triángulo y L, M y N puntos sobre los lados (o extensiones de éstos) BC, CA y AB, respectivamente, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.

Teorema 16 (Menelao). Dado un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia).

1. Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común sobre la circunferencia.

2. Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente a la circunferencia en el punto de tangencia.

3. Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 17 (Medida del ángulo inscrito)**.** La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 18 (Medida del ángulo seminscrito)**.** La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 19 (Potencia de un punto)**.**

1. Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersecan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.

Teorema 20 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de cualquiera de sus pares de ángulos opuestos es igual a 180°, esto es,

$$\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180^\circ.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades, 5^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2014.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría - Ejercicios y problemas, 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado; 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas, 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2014.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada, 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864