ISSN 2954-4971

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

17 • 02

Información legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS (Año 17, No. 2, Julio de 2025) es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A. C.

Dirección: Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Del. Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México.
Tel.: 55-5849-6709
Email: `smm@smm.org.mx`
Sitio web: `https://www.smm.org.mx`
Editor responsable: Pedro David Sánchez Salazar.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Año 2025, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán, C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
https://www.ommenlinea.org

Editor en jefe:
Pedro David Sánchez Salazar

Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
Mérida, C.P. 97203
Yucatán

Julio de 2025

Índice general

Presentación

Tzaloa*, la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral auspiciada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemáticas simples y elegantes, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

La Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) desde los albores de ésta. Este programa sólo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido en el desarrollo científico del

*Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

El truco de factorización favorito de Simon

José Hernández Santiago
Universidad Autónoma de Guerrero

Introducción

Los problemas en los que aparece el trinomio $X + Y + XY$ o alguna variante de él no son infrecuentes en las olimpiadas. Listamos a continuación algunos problemas de esa índole que aparecieron en exámenes aplicados en el país en años anteriores:

Problema 1. (*Semifinal estatal de la 26.ª OMM, 2012*) Determine todos los pares ordenados (a, b), de números enteros positivos, tales que

$$a + b + ab = 134 \quad \text{y} \quad a \leq b. \tag{1}$$

Problema 2. (*Semifinal estatal de la 27.ª OMM, 2013*) Encuentre todos los pares ordenados de números enteros positivos que cumplen que su producto es igual a 5 veces su suma.

Problema 3. (*Final estatal de la 35.ª OMM, 2021*) Encuentre todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2}.$$

Problema 4. (*Final estatal de la 36.ª OMM, 2022*) En una cuadrícula de $m \times n$ cuadritos, con $m \geq 3$ y $n \geq 3$, el número de cuadritos que tienen exactamente 3 cuadritos vecinos es igual al número de cuadritos que tienen exactamente 4 cuadritos vecinos. ¿Cuántos cuadritos tiene la cuadrícula?

Nota. Decimos que dos cuadritos de la cuadrícula son *vecinos* cuando comparten un lado.

La relación del primer problema con el trinomio $X + Y + XY$ es evidente. En el caso del segundo problema, la conexión queda de manifiesto toda vez que éste se expresa en lenguaje algebraico: lo que el problema solicita son todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$xy = 5(x + y).$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$5x + 5y - xy = 0. \tag{2}$$

En el lado izquierdo de la ecuación aparece un trinomio del tipo $X + Y + XY$ pero en el cual los primeros dos coeficientes son iguales a 5 y el tercero es igual a -1.

Antes de hacer comentario alguno sobre los problemas **3** y **4**, vamos a enunciar lo que, en nuestra opinión, es la recomendación táctica a tener mente al abordar un problema en cuyo análisis surge una ecuación como (1) o (2):

> **Mantra.** ¡Agregando una constante "adecuada" en ambos miembros de la ecuación es posible lograr que el trinomio en el lado izquierdo quede factorizado!

Ilustremos lo anterior en el caso del primer problema. La ecuación que se está considerando es:

$$134 = a + b + ab. \tag{3}$$

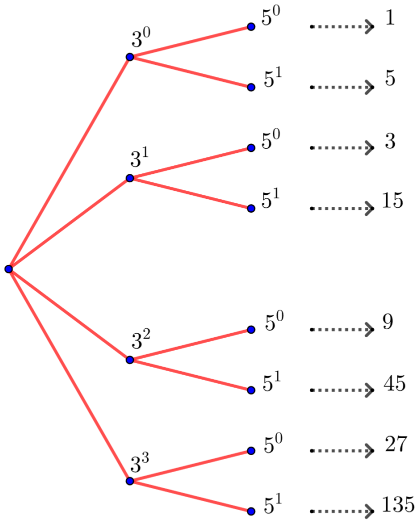
Puesto que

$$\begin{aligned} a + b + ab &= ab + a + b \\ &= a(b + 1) + b, \end{aligned}$$

al sumar 1 en ambos lados de (3) llegamos a que

$$135 = a + b + ab + 1 = a(b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1). \tag{4}$$

Como a y b representan números enteros positivos, el problema se ha reducido a hallar todos los pares ordenados conformados por divisores positivos de 135 cuyo producto es igual a 135. Tenemos que $135 = 3^3 \cdot 5^1$ y, en consecuencia, 135 tiene $(3 + 1)(1 + 1) = 8$ divisores positivos los cuales pueden detectarse al recorrer cada una de las ramas de su respectivo árbol de divisores positivos:



Del árbol previo notamos que los pares de divisores de 135 que multiplicados dan 135, se generan al emparejar el divisor que sale de la primera rama con el divisor que emana de la última, el divisor que sale de la segunda rama con el divisor que surge de la penúltima y así sucesivamente. De esto y de la restricción $a \leq b$ se sigue que sólo hay cuatro formas de que la igualdad en (4) se cumpla:

- cuando $a+1=1$ y $b+1=135$,
- cuando $a+1=5$ y $b+1=27$,
- cuando $a+1=3$ y $b+1=45$ y
- cuando $a+1=9$ y $b+1=15$.

Como en el primer caso se obtiene que $a=0$, la conclusión para el problema **1** es que sólo hay tres pares ordenados $(a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ en los que $a \leq b$ y tales $a+b+ab=134$: a saber, $(a=4, b=26)$, $(a=2, b=44)$ y $(a=8, b=14)$.

¡Hemos resuelto el primero de los problemas que listamos al inicio! Hay dos puntos clave que debemos destacar en esta solución:

Punto 1. La factorización en (4) se alcanzó juntando–en primer lugar–los términos en los que aparecía la incógnita a y sumando un 1 a continuación.

> Punto 2. Como las incógnitas en el problema representaban números enteros, toda vez que se obtuvo una ecuación en la que había una expresión factorizada en uno de los lados de la misma y una constante entera en el otro, la solución se completó mediante consideraciones de divisibilidad.

Veremos ahora cómo es que apelando a estos puntos podemos establecer los problemas **2** y **3** y muchos otros. Recordemos que, en esencia, el problema **2** solicita determinar todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$5x + 5y - xy = 0. \tag{5}$$

Puesto que

$$5x + 5y - xy = x(5 - y) + 5y = x(5 - y) - 5(\quad - y),$$

resulta aparente que para factorizar el lado derecho de (5) bastaría con sumar -25 en sendos lados de la ecuación. Al hacerlo la ecuación deviene en

$$\begin{aligned} -25 &= x(5 - y) - 5(\quad - y) - 25 \\ &= x(5 - y) - 5(5 - y) \\ &= (x - 5)(5 - y) \end{aligned}$$

o equivalentemente en

$$(x - 5)(y - 5) = 25.$$

En vista de que $25 = 5^2$ se sigue que todas las posibilidades para que el producto de $(x - 5)$ y $(y - 5)$ sea igual a 25, considerando que tanto x como y han de ser números positivos, son las que se muestran en la siguiente tabla:

$(x-5)$	$(y-5)$
1	25
5	5
25	1

Tenemos así que todos los pares ordenados que satisfacen lo requerido son:

$$(x = 6, y = 30), (x = 10, y = 10), (x = 30, y = 6).$$

Expondremos a continuación la solución al tercer problema. Sería conveniente que el lector pause la lectura del artículo en este momento e intente resolver el problema por su cuenta antes de proseguir con la revisión de los párrafos subsecuentes; en caso de que el lector esté limitado de tiempo y prefiera analizar la solución en otra ocasión algo que podemos sugerirle es que omita los párrafos destinados a ésta y que reanude la lectura del artículo justo en donde aparece el símbolo de la manecilla.

El problema **3** pide determinar todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Claramente, esa ecuación se puede reescribir como

$$2(3x + y) = xy$$

o bien como

$$0 = 6x + 2y - xy. \tag{7}$$

De acuerdo con el **mantra**, es posible conseguir una expresión factorizada en la izquierda y alguna constante entera en la derecha. Emulemos la manera en la que se procedió en el problema anterior. Dado que

$$6x + 2y - xy = x(6 - y) + 2y = x(6 - y) - 2(\quad - y),$$

vemos que un $+\,6$ dentro del segundo par de paréntesis bastaría para tener una expresión factorizada en el lado derecho; así pues, al sumar -12 en ambos miembros de (7) llegamos a que

$$\begin{aligned} -12 &= x(6 - y) - 2(\quad - y) - 12 \\ &= x(6 - y) - 2(-y + 6) \\ &= (6 - y)(x - 2). \end{aligned}$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$(x - 2)(y - 6) = 12.$$

Como los seis divisores positivos del número 12 son $1, 2, 3, 4, 6$ y 12, las posibilidades para que el producto de $(x - 2)$ y $(y - 6)$ sea igual a 12 están registradas en esta tabla:

$(x-2)$	$(y-6)$
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

Se concluye así que todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ para los cuales vale (6) son: $(x = 3, y = 18), (x = 4, y = 12), (x = 5, y = 10), (x = 6, y = 9), (x = 8, y = 8)$ y $(x = 14, y = 7)$.

☞ Al resolver cada uno de estos tres problemas, hemos llegado a una ecuación del tipo

$$Ax + By + Cxy = D \tag{8}$$

donde los coeficientes A, B, C y D han sido números enteros y los primeros tres de ellos distintos de cero. En cada caso, la idea que seguimos fue sumar $\frac{AB}{C}$ en sendos lados para obtener una expresión factorizada en el lado izquierdo y una constante en los números enteros en el lado derecho. He aquí el desglose pormenorizado de lo conseguido al proceder de ese modo:

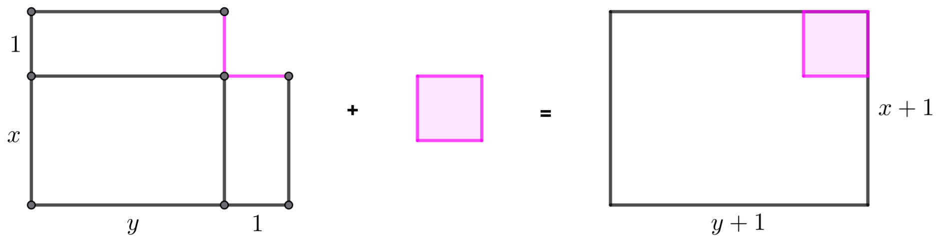
$$\begin{aligned} D + \frac{AB}{C} &= Ax + By + Cxy + \frac{AB}{C} \\ &= Cx\left(\frac{A}{C} + y\right) + B\left(\frac{A}{C} + y\right) \\ &= (Cx + B)\left(\frac{A}{C} + y\right) \end{aligned}$$

y de aquí que

$$AB + CD = (Cx + B)(Cy + A).$$

Cuando las incógnitas x y y representan números enteros, el problema se ha convertido en uno de analizar los divisores del número entero $AB + CD$. No obstante, es de mencionar que la idea de buscar la expresión factorizada en el lado izquierdo de (8) puede ser de utilidad incluso cuando no sepamos de antemano que x y y son números enteros.

Es justamente a la idea de conseguir la factorización en el lado izquierdo de (8) mediante la inserción del término $\frac{AB}{C}$ a lo que se le conoce como el **truco de factorización favorito de Simon (TFFS)** o **completación del rectángulo**. La segunda denominación hace sentido al considerar el caso especial del trinomio $x + y + xy$, el cual puede entenderse como la suma de las áreas de los tres rectángulos en la parte inicial de la figura que se presenta a continuación y la cual puede "completarse" a un rectángulo de lados $x + 1$ y $y + 1$ al añadir un cuadrado de lado 1.



En la segunda sección del artículo mostraremos que hay múltiples contextos en los cuales puede ser útil la idea de completar un rectángulo; esperamos que los problemas que abordaremos resulten llamativos a todos nuestros lectores. En la tercera sección socializamos algunos comentarios sobre el origen de la denominación **"truco de factorización favorito de Simon"**; finalmente, en la cuarta sección listamos diez problemas adicionales para que los lectores más entusiastas los trabajen por su cuenta y nos envíen sus soluciones para que las publiquemos en el próximo número de Tzaloa.

Otros ejemplos

De los cuatro problemas planteados al inicio de la sección anterior, sólo nos falta discutir el último. Lo que se solicita en ese problema es determinar las dimensiones de una cuadrícula en la cual el total de cuadritos que tienen exactamente 3 cuadritos vecinos es igual al total de cuadritos que tienen 4 cuadritos vecinos.

Lo que notamos en primera instancia es que en una cuadrícula de tamaño $m \times n$, con $m \geq 3$ y $n \geq 3$, hay tres tipos de cuadritos: aquellos que tienen exactamente 2 cuadritos vecinos, aquellos que tienen exactamente 3 cuadritos vecinos y aquellos que tienen 4 cuadritos vecinos. A guisa de ejemplo consideremos el caso de una cuadrícula de tamaño 4×3; en el interior de cada uno de los cuadritos que la conforman anotamos el total de cuadritos que tiene por vecinos:

2	3	2
3	4	3
3	4	3
2	3	2

Podemos inferir de este caso particular que los cuadritos con exactamente 3 cuadritos vecinos son los de la orilla con excepción de los que aparecen en las esquinas de la cuadrícula. De esto se sigue que el total de cuadritos con exactamente 3 cuadritos vecinos en una cuadrícula $m \times n$ es igual a $2(m-2)+2(n-2)$. Por otro lado, no resulta difícil convencerse de que el total de cuadritos con 4 cuadritos vecinos es igual a $(m-2)(n-2)$. En consecuencia, con la finalidad de determinar las dimensiones de una cuadrícula en la que se cumpla lo solicitado, es necesario determinar las soluciones de la ecuación

$$(m-2)(n-2) = 2(m-2) + 2(n-2) \tag{9}$$

en números enteros m y n (ambos mayores que 2). Mediante la sustitución $X = m-2$ y $Y = n-2$, la ecuación en (9) se puede reescribir como

$$2X + 2Y - XY = 0; \tag{10}$$

si sumamos un -4 a la expresión en el lado izquierdo obtenemos

$$2X + 2Y - XY - 4 = X(2-Y) + 2(Y-2) = (-X+2)(Y-2).$$

Ergo, se ha logrado expresar la ecuación (10) como

$$(X-2)(Y-2) = 4.$$

Puesto que $X-2 = m-4$ y $Y-2 = n-4$, los posibles valores enteros que m y n pueden asumir se extraen del análisis de las seis posibilidades siguientes:

- $m-4=-4, n-4=-1.$
- $m-4=-2, n-4=-2.$
- $m-4=-1, n-4=-4.$
- $m-4=1, n-4=4.$
- $m-4=2, n-4=2.$
- $m-4=4, n-4=1.$

Las primeras tres posibilidades no conducen a una solución (m,n) en la que tanto m como n sean mayores que 2. En el cuarto caso se obtiene que $m=5$ y $n=8$; en el quinto caso se llega a que $m=6$ y $n=6$ y, finalmente, en el sexto caso se obtiene que $m=8$ y $n=5$. Así pues, el total de cuadritos en una cuadrícula, con al menos tres renglones y al menos tres columnas, en la que el total de cuadritos con exactamente 3 cuadritos vecinos es igual al total de cuadritos con exactamente 4 cuadritos vecinos, es $5 \times 8 = 40$ o $6 \times 6 = 36$.

Los ejemplos que siguen constituyen un pequeño muestrario de situaciones en las que es de ayuda recurrir al **truco de factorización favorito de Simon**.

Problema 5. (*Problemas del calendario matemático (año 2005), p. 30.*) Determine todos los números enteros positivos a y b tales que

$$\operatorname{mcd}(a, b) + \operatorname{mcm}(a, b) = a \cdot b.$$

Solución. Es un hecho conocido que $\operatorname{mcd}(a, b) \cdot \operatorname{mcm}(a, b) = a \cdot b$. Luego, si hacemos $X = \operatorname{mcd}(a, b)$ y $Y = \operatorname{mcm}(a, b)$, la ecuación original se puede reescribir como

$$X + Y - XY = 0.$$

Al sumar -1 en sendos miembros llegamos a la ecuación

$$X + Y - XY - 1 = -1,$$

la cual deviene en

$$(X - 1)(Y - 1) = 1.$$

Puesto que tanto X como Y son números enteros positivos, entonces $X-1 = 1$ y $Y-1 = 1$; de esto se desprende que $\operatorname{mcd}(a, b) = 2$, $\operatorname{mcm}(a, b) = 2$ y, por consiguiente, $a \cdot b = 4$. Se tiene así que $(a = 4, b = 1)$, $(a = 2, b = 2)$ o $(a = 1, b = 4)$, pero sólo en el segundo par ordenado se cumple que $\operatorname{mcd}(a, b) = 2$. Concluimos así que los únicos números enteros positivos a y b que satisfacen la igualdad $\operatorname{mcd}(a, b) + \operatorname{mcm}(a, b) = a \cdot b$ son $a = 2$ y $b = 2$. $\square$

En la demostración por inducción matemática del problema que se presenta enseguida, surge de forma natural el trinomio $X + Y - XY$. Consideramos valioso exponer este ejemplo, pues con ayuda de él es muy fácil establecer la célebre desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética: esto indica que, al explicar la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética mediante inducción matemática, hay alternativas distintas a la demostración por inducción *à la* Cauchy (cf. [1, pp. 143-144], [4, pp. 56-57] o [6, p. 12]).

Problema 6. Sea n un número entero mayor a 1. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, entonces $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

Solución. Analicemos el caso $n = 2$. Supongamos que x_1 y x_2 son números reales positivos cuyo producto es igual a 1. Entonces, al tenerse que $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$, se sigue que $x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$ y, por lo tanto, $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$.

Supongamos que la desigualdad $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$ se cumple para cualesquiera números reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cuyo producto es igual a 1.

Consideremos $n+1$ números reales positivos $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ tales que $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1$. Si $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$, entonces $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1$ y la conclusión deseada se tiene. Si no se cumple que todos los números $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ son iguales a 1, entonces alguno de ellos debe ser menor que 1 y alguno de ellos debe ser mayor que 1; digamos que $x_n > 1$ y que $x_{n+1} < 1$. Puesto que $1 = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}(x_n x_{n+1})$, podemos aplicar la hipótesis de inducción a los números $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$ y con ello obtenemos que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n.$$

De esto se desprende que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} &\geq n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} \\ &= n + 1 + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} - 1 \\ &= n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}); \end{aligned}$$

y, en vista de que $(x_n - 1)(1 - x_{n+1}) > 0$, tenemos que la expresión $n+1+(x_n-1)(1-x_{n+1})$ es mayor que $n + 1$ y, en consecuencia,

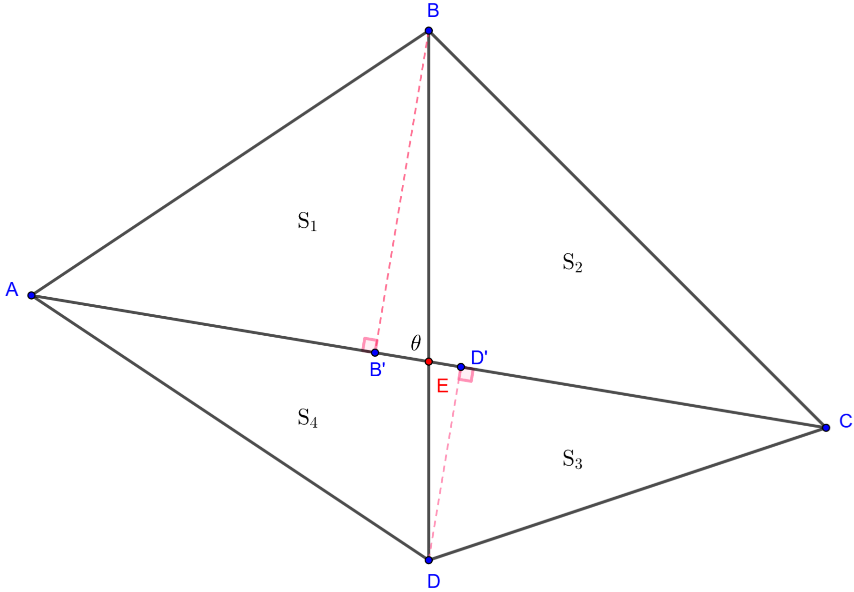
$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} > n + 1$$

que es justamente lo que deseábamos establecer. □

El rango de aplicabilidad del **truco de factorización favorito de Simon** es amplio. Aunque los primeros problemas abordados podrían catalogarse como de álgebra o de aritmética solamente, el problema que presentamos ahora podría considerarse como uno de geometría.

Problema 7. (*2.º Concurso Regional del Sureste de la OMM, 2016.*) Las diagonales de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersecan en el punto E. Sean S_1, S_2, S_3 y S_4 las áreas de los triángulos AEB, BEC, CED y DEA, respectivamente. Supóngase que $S_1 = x + y + xy$, $S_2 = y + z + yz$, $S_3 = w + z + wz$ y que $S_4 = w + x + wx$ para algunos números reales w, x, y y z. Demuestre que o E es el punto medio de la diagonal AC o E es el punto medio de la diagonal BD.

Solución. En lo que sigue recurriremos a los elementos indicados en el diagrama que se muestra a continuación: B' es el pie de la altura por B del triángulo AEB, D' es el pie de la altura por D del triángulo CED y asumimos que $\measuredangle\, AEB = \theta$.



Del **TFFS** se obtiene que $S_1+1=(x+1)(y+1)$, $S_2+1=(y+1)(z+1)$, $S_3+1=(w+1)(z+1)$ y $S_4+1=(w+1)(x+1)$; a su vez, de estas igualdades se desprende que

$$(S_1+1)(S_3+1)=(S_2+1)(S_4+1). \tag{11}$$

Por otra parte, es conocido que

$$\begin{aligned}
S_1S_3 &= \left(\frac{1}{2}(AE)(EB)\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{1}{2}(CE)(ED)\operatorname{sen}\theta\right) && (12)\\
&= \left(\frac{1}{2}(CE)(EB)\operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{1}{2}((AE)(ED)\operatorname{sen}\theta\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}(CE)(EB)\operatorname{sen}(\pi-\theta)\right)\left(\frac{1}{2}((AE)(ED)\operatorname{sen}(\pi-\theta)\right)\\
&= S_2S_4. && (13)
\end{aligned}$$

De (11), (12) y (13) se llega a que

$$S_1+S_3=S_2+S_4.$$

Considerando el diagrama y denotando con h_1 a BB' y con h_2 a DD' tenemos que la igualdad anterior se puede reescribir como

$$\frac{AE\cdot h_1}{2}+\frac{CE\cdot h_2}{2}=\frac{CE\cdot h_1}{2}+\frac{AE\cdot h_2}{2}.$$

Claramente esta igualdad es equivalente a

$$AE(h_1 - h_2) = CE(h_1 - h_2).$$

Resulta que si $h_1 - h_2 \neq 0$, entonces $AE = CE$ de lo cual se colige que E es el punto medio de la diagonal AC. En caso contrario tenemos que $h_1 = h_2$; dado que $\measuredangle BEB' = \measuredangle DED'$ y $\measuredangle EB'B = \frac{\pi}{2} = ED'D$, el criterio ALA de congruencia permite garantizar que $\triangle DD'E \cong \triangle BB'E$. De esto se infiere que $BE = DE$, lo que indica que–en el caso en turno–E es el punto medio de la diagonal BD. $\square$

Cerramos esta sección del artículo con la exposición de una solución al tercer problema del primer examen del Concurso Nacional de la 29.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas; desde el planteamiento del mismo es aparente que el **truco de factorización favorito de Simon** podría ser de ayuda en su resolución.

Problema 8. (*Concurso Nacional de la 29.ª OMM, 2015.*) Sea $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ una función que satisface las dos condiciones siguientes:

a) $f(1) = 1$.

b) $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, $f(a + b + ab) = a + b + f(ab)$.

¿A qué número es igual $f(2015)$?

Solución. Haciendo $a = b = 1$ se obtiene que $f(3) = f(1 + 1 + 1) = 1 + 1 + f(1) = 3$.

Por otro lado, si sólo hacemos $b = 1$ llegamos a que

$$\begin{aligned} f(2a+1) &= f(a+1+a) \\ &= a+1+f(a) \end{aligned} \tag{14}$$

para cada $a \in \mathbb{Z}^+$. Si hacemos $b = 3$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(4a+3) &= f(a+3+3a) \\ &= a+3+f(3a) \end{aligned} \tag{15}$$

para cada $a \in \mathbb{Z}^+$. Empero, la relación en (14) brinda otra manera de calcular $f(4a + 3)$: en efecto,

$$\begin{aligned} f(4a+3) &= f(2(2a+1)+1) \\ &= (2a+1)+1+f(2a+1) \\ &= (2a+2)+a+1+f(a) \\ &= 3a+3+f(a). \end{aligned} \tag{16}$$

Combinando (15) y (16) se tiene que

$$f(3a) = 2a + f(a) \tag{17}$$

para cada $a \in \mathbb{Z}^+$. De (17) se desprende que $f(9) = 6 + f(3) = 6 + 3 = 9$; además, puesto que $f(9) = f(2(4) + 1) = 4 + 1 + f(4) = 5 + f(4)$, notamos que $f(4) = 4$. Así pues, $f(12) = 8 + f(4) = 12$ y $f(36) = 24 + f(12) = 36$.

Usando la identidad (14) reiteradamente tenemos que

$$\begin{aligned} f(2015) &= 1008 + f(1007) \\ &= 1008 + 504 + f(503) \\ &= 1008 + 504 + 252 + f(251) \\ &= 1008 + 504 + 252 + 126 + f(125) \\ &= 1008 + 504 + 252 + 126 + 63 + f(62) \\ &= 1953 + f(62). \end{aligned}$$

Para calcular $f(62)$ lo que hacemos es analizar las soluciones de la ecuación $a+b+ab = 62$ en números enteros positivos a y b. Del **truco de factorización favorito de Simon** se deduce que $a + 1$ y $b + 1$ tienen que ser divisores positivos de 63 con producto igual a tal número. Considerando el caso en el que $a = 6$ y $b = 8$ llegamos a que

$$f(62) = f(6 + 8 + 6 \cdot 8) = 6 + 8 + f(48).$$

Todo el problema se ha reducido a evaluar la función f en 48. Puesto que la única solución de la ecuación $a + b + ab = 48$ en números enteros positivos a y b es $(a = 6, b = 6)$, podemos deducir que $f(48) = f(6 + 6 + 6 \cdot 6) = 6 + 6 + f(36) = 12 + 36 = 48$ y de aquí que

$$f(2015) = 1953 + f(62) = 1953 + 14 + f(48) = 1953 + 14 + 48 = 2015.$$

$\square$

En el prefacio del primer volumen de los *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, G. Pólya y G. Szegö señalan que “una idea que sólo puede usarse una vez es un truco y si la idea puede usarse en más de una ocasión entonces ésta deviene en un método”. Aunque no resulte del todo claro si este *dictum* aplica o no al **truco de factorización favorito de Simon**, hay algo que sí hemos podido constatar a lo largo de este trabajo: la aplicación del **TFFS** a veces se da al inicio de una solución; en otras ocasiones puede darse en el nudo de la misma y, en otras tantas, es un ingrediente clave en el desenlace.

¿Qué hay en un nombre?

Si bien la denominación **truco de factorización favorito de Simon** no está del todo establecida en muchas comunidades hispanoparlantes, el nombre es bastante familiar para todos quienes fueron usuarios asiduos del sitio web `artofproblemsolving.com` (t.c.c. AoPS) durante algunos de los primeros años del sitio. AoPS fue lanzado en 2003 por Richard Rusczyk; es de mencionar que el intercambio de matemáticas que se lleva a cabo en los foros del sitio es de una magnitud tal que, en la nota publicada hace algunos años en *The New Yorker* sobre Rusczyk, la autora se refirió a AoPS como "el campamento mundial de matemáticas de Richard Rusczyk".

Fue el usuario ComplexZeta de AoPS quien tuvo la audacia de empezar a llamar **truco de factorización favorito de Simon** a la idea sobre la cual ha versado este artículo. El nombre de ComplexZeta en el mundo *off-line* es Simon Rubinstein-Salzedo: este dato echa un poco de luz sobre la elección del nombre para el truco.

Simon Rubinstein-Salzedo obtuvo su grado de doctor en matemáticas por la Universidad de Stanford en el año 2012 con una tesis sobre el control de la ramificación en campos de números (la cual fue supervisada por Akshay Venkatesh, uno de los ganadores de la Medalla Fields en 2018). En la actualidad Simon Rubinstein-Salzedo es director de un instituto educativo para estudiantes aptos de educación media superior (*the* Euler Circle). Traducimos a continuación la intervención que Rubinstein-Salzedo tuviera en **Quora** cuando le preguntaron sobre el origen del **truco de factorización favorito de Simon** y la popularidad del mismo.

> «Yo no lo descubrí; el truco ya era bastante conocido cuando yo era un estudiante de bachillerato (aunque tal vez no en la misma forma en que yo lo usaba). Del nombre que propuse puede verse que no estaba alegando prioridad alguna sobre él; lo único que quise indicar con el nombre es que era un truco que me gustaba bastante.
>
> El nombre *pegó* simplemente porque yo estaba en el lugar correcto y en el momento preciso. AoPS fue lanzado a finales de mayo de 2003, alrededor de un mes antes de que yo egresara del bachillerato. Fui un usuario frecuente de AoPS desde un inicio; probablemente llegué a ser uno de los tres usuarios más prolíficos del sitio por una buena temporada. Después de algunos meses, Richard Rusczyk me invitó a ser un instructor asistente para las clases de AoPS; esto contribuyó a que fuera bastante conocido en la comunidad AoPS, tanto por mis publicaciones en el foro como por mi participación en las clases como instructor asistente. Unos meses después, por ahí de octubre de 2003, resolví un problema que alguien puso en el sitio y mencioné en el hilo respectivo que yo lo resolvería mediante el **truco de factorización favorito de Simon**. No sé por qué me referí a mí mismo en tercera persona en ese instante en particular, pero lo hice.
>
> Aparentemente, la gente pensó que el nombre mediante el cual me referí a esa idea era bueno y Richard, Matthew y otros instructores empezaron a usar el nombre en sus clases y en sus libros [(cf. [5, pp. 329-333])]. Aparte de mi comentario inicial en el mencionado hilo de octubre de 2003, hice nada en absoluto para popularizar el término: la comunidad lo hizo por mí.
>
> Me resulta bastante extraño que el aspecto por el cual soy más famoso en la vida es por un *post* en AoPS que hice cuando tenía 18 años. Considero

> que he tenido logros de mayor relevancia: por ejemplo, dirigir *the* Euler Circle e intentar revolucionar la educación para los estudiantes talentosos en matemáticas al procurar generar para ellos una oportunidad de acceder a una formación digna y desafiante que nadie más está dispuesto a ofrecerles. Sin embargo, todo indica que a las personas les cae en gracia apelar a ese truco de factorización que lleva mi nombre; en ese sentido, parece que la denominación ha contribuido en alguna medida a potenciar las habilidades de resolución de problemas de algunos sectores estudiantiles. Eso es algo que me resulta grato. Empero, lo que se me hace totalmente bizarro es que el **truco de factorización favorito de Simon** me ha convertido en una especie de celebridad entre los estudiantes que participan en los concursos de matemáticas: algunas veces me piden autógrafos cuando participo en círculos matemáticos o cuando asisto a algunos concursos. Ciertamente no merezco ese tipo de atenciones: de niño me iba bastante bien en los concursos, pero había varios estudiantes a los que les iba mejor que a mí y, sin embargo, pocos de ellos tienen algún estatus de celebridad. Considero que ellos lo merecen mucho más que yo... »

Independientemente de la impresión que del caso tenga cada quien, es innegable que la preeminencia de AoPS en el ámbito de las olimpiadas ha influido en que la denominación acuñada por ComplexZeta siga siendo vigente hogaño y en que ésta sea estándar en diversos círculos matemáticos alrededor del orbe.

Dado que la idea de “completar cuadrados” está relativamente bien establecida (cf. [5, pp. 360-365] o [7, pp. 2-6]), es posible que muchos lectores opten por referirse a la factorización como “completación del rectángulo” de aquí en más. Evidentemente, no debe haber tema alguno con la denominación que cada quien llegue a adoptar. Como ya lo expresara el gran W. Shakespeare en algún momento: “... aquello a lo que nos referimos como una rosa tendría la misma fragancia bajo cualquier otro nombre.”.

Problemas adicionales

Listamos a continuación algunos problemas en los que resulta de ayuda recurrir al **truco de factorización favorito de Simon**. Exhortamos a todos nuestros lectores a que intenten los problemas y a que nos hagan llegar sus soluciones a la cuenta `revistaomm@gmail.com`. En el próximo número de la revista publicaremos las soluciones a los problemas; naturalmente, algunas de las que presentemos serán elegidas dentro de las que la comunidad olímpica tenga a bien enviarnos. Finalmente, si saben de otros problemas en cuya solución se eche mano del **TFFS**, no duden en escribirnos, ¡será todo un gusto leerlos!

① Si $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}\right\}$, ¿a cuánto es igual $\text{máx}\,\{x + y : (x, y) \in A\}$?

② Sean x y y números enteros positivos distintos tales que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{19}.$$

¿A qué número es igual $\sqrt{x+y}$?

③ Determine todos los números enteros $n \geq 1$ tales que la ecuación

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

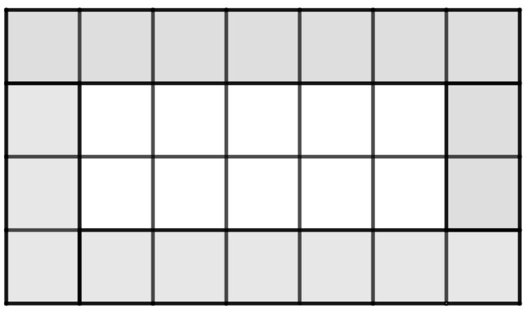
tiene exactamente una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

④ Sea $n \in \mathbb{Z}$. Supóngase que hay exactamente 2005 pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}.$$

Demuestre que n es un cuadrado perfecto.

⑤ ([4, p. 17 y pp. 93-94] o [8, p. 14 y pp. 17-18]) Se dibuja un rectángulo (el término no excluye al cuadrado) en papel cuadriculado y se sombrean las casillas del contorno. En el ejemplo de abajo, el número de cuadritos sombreados es mayor que el número de cuadritos que aparecen en blanco, en el interior. ¿Será posible dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde (de una casilla de anchura) contenga igual número de cuadritos que el rectángulo blanco en su interior? En caso de que la respuesta sea afirmativa, la tarea consiste en hallar todas las dimensiones posibles del rectángulo.



⑥ Los números reales x, y y z son tales que

$$\begin{cases} x+y+xy=8 \\ y+z+yz=15 \\ z+x+zx=35 \end{cases}$$

Determine el valor numérico de la expresión $x+y+z+xyz$.

⑦ Encuentre todas las ternas $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\begin{cases} x + y - z = 23 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 23 \end{cases}$$

⑧ (T. Andreescu; *Math. reflections*, (2017), no. 1, prob. O397.) Determine todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que cumplen que

$$(x^3 - 1)(y^3 - 1) = 3(x^2y^2 + 2).$$

⑨ (*Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, 2016.*) Determine todos los números primos p, q, r y k para los cuales se cumple que $pq + qr + rp = 12k + 1$.

⑩ Sea n un número entero positivo. Anita y Benito juegan el siguiente juego. Benito cuenta los pares ordenados (a, b), de números enteros positivos, tales que $a+b = n$. Anita cuenta los pares ordenados (c, d), de números enteros positivos, tales que $c^{-1} + d^{-1} = n^{-1}$. Gana el jugador que obtiene el mayor número de pares ordenados. ¿Para cuáles n's gana Anita?

Una fotografía de Simon Rubinstein-Salzedo (incluida con la debida autorización).

Bibliografía

[1] M. Aigner & G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK* (6th edition). Springer Verlag, 2018.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega y R. Valdez Delgado, *Álgebra*. Serie: Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Coedición del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México y la Sociedad Matemática Mexicana, 2014.

[3] I. Chen, Richard Rusczyk's worldwide math camp. *The New Yorker*. Artículo disponible en la red desde el 12 de noviembre de 2021: https://www.newyorker.com/culture/persons-of-interest/richard-rusczyks-worldwide-math-camp. Fecha de último acceso: 24 de junio de 2025.

[4] M. Fortes Besprosvani (coordinador ed.), *Olimpiadas de matemáticas: 140 problemas, seis años de éxito.* Academia de la Investigación Científica, México, D. F., 1993.

[5] R. Rusczyk, *Introduction to algebra.* AoPS Incorporated, 2007.

[6] J. C. Sampedro y M. Tetlalmatzi Montiel, Una demostración inductiva directa de la desigualdad media geométrica - media aritmética. *Miscelánea Matemática*, (Jul. 1999), No. 28, pp. 11-15.

[7] D. A. Solís Gamboa y I. Zhong Zhang, Apuntes sobre la ecuación cuadrática. *Tzaloa*, (2024), No. 2, pp. 1-22.

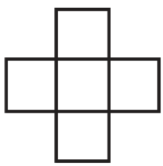
[8] M. Gardner, *Wheels, life and other mathematical amusements.* W. H. Freeman and Co., USA, 1983.

Problemas de práctica (Año 2025, No. 2)

A continuación encontrarás diez problemas de práctica que seleccionamos especialmente para este número. Aprovechamos la ocasión para solicitar tu apoyo para enriquecer esta sección de la revista. Si tienes problemas inéditos que te gustaría compartir con nosotros, puedes contactarnos enviando un mensaje a `revistaomm@gmail.com`: ¡recibiremos con mucho gusto todas tus propuestas!

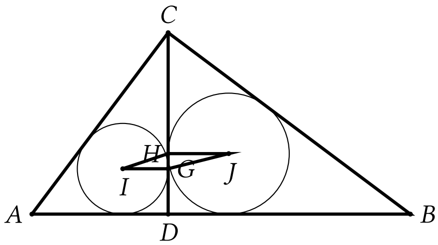
Problema 1. En un juego de dominó, cada ficha tiene dos números, que pueden ir desde el 0 hasta el 6. En la figura se muestran dos fichas, una tiene al 3 y al 5, otra tiene al 6 y al 2. En una ficha se pueden repetir los dos números. Ahora imagina un superdominó donde los números pueden ir desde el 0 hasta el 12. ¿Cuánto suman todos los números que aparecen en todas las fichas?

Problema 2. Una pieza de cartón en forma de cruz está dividida en cuadrados como muestra la figura. Tienes pintura de color rojo, azul, verde, morado y amarillo. Debes pintar la figura con los 5 colores, uno en cada cuadrado.



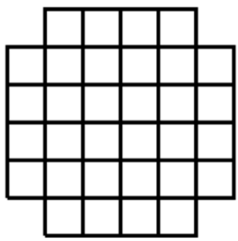
¿Cuántas maneras hay de pintar la pieza, si dos formas de colorear que puedas obtener girando la pieza se consideran la misma coloración?

Problema 3. En la figura ABC es un triángulo rectángulo en C, y D es el pie de la altura desde C. Sean I y J los incentros de ACD y BCD respectivamente. El incírculo de ACD es tangente en G a CD y el incírculo de BCD es tangente en H a CD. Si $AC = 60$ cm y $BD = 64$ cm, ¿cuánto vale el área del cuadrilátero $IHJG$?



Problema 4. (Países Bajos, 2008) Si escogemos 50 números entre 1 y 100 que sumen 2900, ¿cuál es la menor cantidad de números pares que puede haber entre los 50 números elegidos?

Problema 5. Se quiere poner 6 monedas iguales en las casillas de un tablero como el que muestra la figura, de manera que en cada renglón (horizontal) y cada columna (vertical) haya exactamente una moneda. ¿De cuántas maneras se puede hacer?



Problema 6. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2|x| + |y| &= 1 \\ \lfloor |x| \rfloor + \lfloor 2|y| \rfloor &= 2 \end{aligned}$$

Recuerda que $\lfloor a \rfloor$ representa el mayor entero que es menor o igual a a.

Problema 7. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x + y) \geq f(x \cdot y)$

Problema 8. ¿Cuál es el entero positivo más pequeño mayor a 1 tal que es un cuadrado perfecto y el número de divisores que tiene también es un cuadrado perfecto?

Problema 9. Sea n un entero positivo. Demuestra que 11 divide a $n^5 + 5^n$ si y sólo si 11 divide a $n^5 \cdot 5^n + 1$

Problema 10. Un número es *precioso* si la suma de sus dígitos es 9, ¿cuántos números preciosos hay menores a 10,000?

Soluciones a los problemas de práctica

Solución 1. Fijémonos en un número específico, digamos el 5. ¿Cuántas veces aparece en la suma total? Aparentemente se repite 13 veces (desde el $5-0$ hasta el $5-12$), por lo que contribuye a la suma 5×13. Sin embargo, estamos olvidando que hay una ficha *doble cinco*, por lo que en realidad aparece 14 veces.

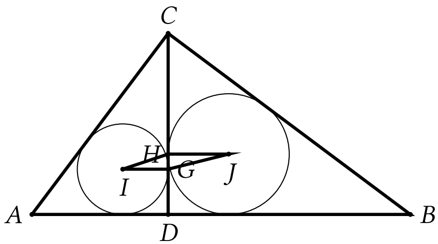
Como cada número aparece 14 veces en la suma total, la suma total es

$$1 \cdot 14 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 14 + \cdots + 12 \cdot 14 = 14\left(\frac{12 \cdot 13}{2}\right) = 936.$$

Solución 2. Hay 5 formas de colocar el color del centro. Dado que las coloraciones que sean rotaciones se consideran lo mismo, el número de formas de colorear los cuatro cuadros restantes, se puede hacer calculando las permutaciones circulares de 4 elementos, que es $3! = 6$. Concluimos que la coloración completa puede hacerse de $5 \cdot 6 = 30$ formas.

Solución 3. Como los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle BDC$ son semejantes tenemos que $\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{BD}$, por lo tanto $DC^2 = 64AD$. Además, por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABD, tenemos que

$$60^2 - AD^2 = CD^2 = 64AD.$$



Esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones -100 y 36, entonces $AD = 36$ y de ahí que $CD = \sqrt{64 \cdot 36} = 48$. Es conocido que $IG = \frac{AD+DC-AC}{2} = \frac{36+48-60}{2} = 12$. De nuevo, usando que $\triangle ADC$ y $\triangle BDC$ son semejantes tenemos que $HJ = \frac{CD \cdot IG}{AD} = 16$.

Como IG y HJ son perpendiculares a CD el cuadrilátero $IHJG$ es un trapecio con altura $JH - IG = 4$. Por lo tanto su área es $\frac{(16+12)\cdot 4}{2} = 56$.

Solución 4. Como queremos usar la menor cantidad de pares, colocamos primeros todos los números impares entre 1 y 100, pero la suma de ellos es 2500, por lo que necesariamente tendremos que intercambiar algunos de ellos por números pares.

Pero para usar la menor cantidad de números pares, nos conviene usar pares grandes (de modo que se llegue a 2900 con la menor cantidad de ellos). Cambiando $1, 3, 5$ y 7 por $100, 98, 96$ y 94 hace que la suma llegue a 2872. Nos falta aumentar la suma en 28, lo cual por paridad requiere al menos dos cambios, y si intercambiamos 9 y 11 por 20 y 28, obtenemos la suma 2900. Por tanto, el mínimo requerido es 6 números pares.

Solución 5. Primero colocamos una ficha en el renglón superior, lo cual se puede hacer de 4 formas, y después una ficha en el renglón inferior, pero ahora tenemos solo 3 posibilidades. En total, tenemos 12 opciones hasta ahora.

A continuación, procedemos a colocar ficha en la primera y en la última columna, habiendo también 12 opciones porque las que pusimos inicialmente no interfieren de forma alguna con éstas.

Para concluir, si tachamos todas las casillas del bloque de 4×4 interior que no podemos usar debido a las que ya colocamos, observaremos que siempre quedan cuatro casillas, las cuales se pueden llenar, debido a su posición, de dos formas distintas únicamente.

Así, la cantidad de formas total de llenar la figura será de $12 \cdot 12 \cdot 2 = 288$.

Solución 6. Como las ecuaciones sólo involucran valores absolutos, si (x, y) es una solución del sistema, entonces $(\pm x, \pm y)$ también es solución para cualquier selección de signos. Podemos buscar entonces las soluciones no negativas de las ecuaciones y al final añadimos los posibles signos.

Como $2x + y = 1$, tenemos que $0 \leq 2x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, por lo tanto $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, por lo tanto $\lfloor x \rfloor = 0$, y de la segunda ecuación se sigue que $y \geq 1$, de ahí que $y = 1$ y por lo tanto $x = 0$.

Entonces las únicas soluciones son $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Solución 7. Es claro que si f es una función constante, entonces satisface la ecuación funcional. Demostraremos que las funciones constantes son las únicas posibles.

Substituimos $y = 0$ en la ecuación funcional y tenemos que $f(x) \geq f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Sea $t < 0$, tomamos $x = \sqrt{-t}$ y $y = -\sqrt{-t}$, entonces

$$f(0) = f(x + y) \geq f(x \cdot y) = f(t).$$

Por lo tanto $f(t) = f(0)$ para toda $t \leq 0$

Sea $t > 0$ tomamos $x = y = -\sqrt{t} < 0$, entonces

$$f(0) = f(-2\sqrt{t}) = f(x + y) \geq f(x \cdot y) = f(t).$$

Concluimos que $f(t) = f(0)$ para toda $r \in \mathbb{R}$ y f es constante.

Entonces las únicas funciones que satisfacen la ecuación funcional son las funciones constantes.

Solución 8. Supongamos que $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ es la factorización canónica de n.

Si $k \geq 3$, entonces $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ y $n^2 \geq 30^2 = 900$.

Caso 1: Si $k = 1$, entonces $n = p^t$ y $n^2 = p^{2t}$ tiene $2t + 1$ divisores, como $t \geq 1$ el cuadrado impar más pequeño es 9 y tendríamos que en este caso $t = 4$ y $n^2 = p^8 \geq 2^8 = 256$

Caso 2: Si $k = 2$, en este caso $n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2}$ tiene $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)$ divisores, el cuadrado más pequeño que se puede expresar de esa forma es 9 que se logra con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Es decir $n^2 = p_1^2 p_2^2 \geq 2^3 \cdot 3^2 = 36$.

Concluimos que 36 es el cuadrado más pequeño que tiene un número cuadrado perfecto de divisores.

Solución 9. Observemos primero que si 11 divide a n, entonces ninguna de las dos afirmaciones se cumple, por lo cual 11 y n son coprimos. Dado que el teorema de Fermat nos dice que $n^{10} \equiv 1 \mod 11$, entonces se sigue que $n^5 \equiv 1, -1 \mod 11$. Veamos que

n	1	2	3	4	5
$5^n \mod 11$	5	3	4	9	1

de este modo $11 \mid n^5 + 5^n$ si y sólo si $5^n \equiv 1 \mod 11$ y $n^5 \equiv -1 \mod 11$ si y sólo si $5^n n^5 \equiv -1 \mod 11$ si y sólo si $11 \mid n^5 5^n + 1$.

Solución 10. Trabajaremos dependiendo en el número de dígitos que puede tener un número *precioso*.

Con un dígito solamente hay una solución, $n = 9$.

Con dos dígitos $n = ab$ necesitamos que $a + b = 9$, con $a > 0$, entonces $1 \leq a \leq 9$ y $b = 9 - a$, entonces hay 9 soluciones, $18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90$

Con 3 dígitos, $n = abc$, necesitamos que $a + b + c = 9$ con $1 \leq a \leq 9$ y además $b + c = 10 - a$, entonces $0 \leq b \leq 10 - a$ y $c = 10 - a - b$. Entonces para cada a tenemos $11 - a$ soluciones, entonces tenemos $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 54$ soluciones.

En total hay $1 + 9 + 54 = 64$ números *preciosos*.

Problemas de entrenamiento

Año 2025, No. 2

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este segundo número del año 2025. Te recordamos que las soluciones a los problemas en este número no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que trabajes en ellos y redactes con detenimiento tus soluciones. Las soluciones a los problemas en este número se publicarán en la primera entrega de 2026 de la revista y se escogerán entre las contribuciones que la comunidad olímpica tenga a bien hacernos llegar.

Con el fin de dar tiempo a los lectores para que preparen y envíen sus soluciones, anunciamos que estaremos recibiendo soluciones para los 10 problemas que se listan a continuación hasta el **1 de diciembre de 2025**. Las inquietudes o propuestas relacionadas con este apartado de la revista deberán ser remitidas por *email* a

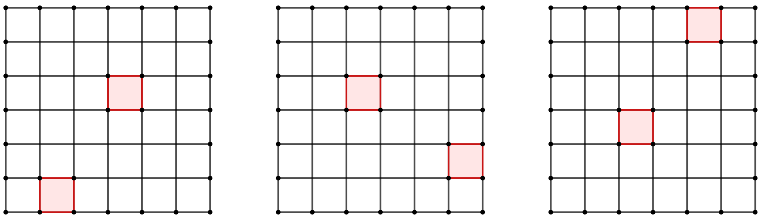
`revistaomm@gmail.com`

¡No dejen de hacernos llegar sus soluciones!

Problema 1.2.25. ¿Cuántos triángulos se pueden formar escogiendo tres vértices de un polígono regular de 12 lados de manera que el triángulo tenga un ángulo interior de 45°?

Problema 2.2.25. Paulina va a aplicarse uñas decoradas en los cinco dedos de ambas manos. Tiene disponibles los tres diseños distintos que se muestran en la figura de abajo. Paulina desea que en cada una de sus manos se utilice al menos una vez cada diseño. Además, ella puede asignar libremente los diseños a los dedos, es decir, el orden y la posición en que se colocan los diseños en los dedos sí es relevante. ¿Cuántas maneras diferentes tiene Paulina de decorar sus diez uñas?

Problema 3.2.25. Anita tiene un tablero blanco de 6×6 y desea pintarle dos casillas de negro. Dos coloraciones que difieren en una rotación se consideran equivalentes; por ejemplo, las tres coloraciones que se ilustran en la figura siguiente son todas equivalentes:



¿De cuántas maneras no equivalentes puede Anita pintar su tablero?

Problema 4.2.25. Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea Ω el circuncírculo del triángulo ABC; llamemos P al punto donde las tangentes a Ω por B y C se intersecan. Sea Γ el circuncírculo del triángulo BCP y sean M y N, respectivamente, los puntos en los que Γ cruza a los lados AB y AC respectivamente. Demuestre que el área del triángulo MAN es igual al área del triángulo PMN.

Problema 5.2.25. En un triángulo ABC se toma un punto E sobre el lado AC y un punto D sobre el lado CB de tal modo que $AE = \frac{AC}{3}$ y $3\,(CD) = 2\,(CB)$. Los segmentos AD y BE se intersecan en el punto F. Calcule la fracción que el área del triángulo AEF representa del área de todo el triángulo ABC.

Problema 6.2.25. Un triángulo ABC es tal que su ángulo en A mide 60°. Sean D y E puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, de manera que $BD = DE = EC$. Sea O el punto de intersección de BE y DC. Demuestre que O es el circuncentro del triángulo ABC.

Problema 7.2.25. Determine todos los pares ordenados (n, k), de números enteros no negativos, tales que los números $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ y $\binom{n}{k+1}$ están en progresión aritmética (en ese orden).

Problema 8.2.25. Anita piensa un polinomio cuyos coeficientes son números enteros positivos y el reto de Benito consiste en adivinar el polinomio elegido por Anita. Anita proporciona dos tarjetas a Benito y Benito puede auxiliarse de ellas para adivinar el polinomio: en cada uno de dos turnos, Benito puede anotar un número real en el anverso de una tarjeta y pasar la tarjeta a Anita, quien anotará en el reverso el resultado de evaluar su polinomio en el número anotado por Benito.

¿Qué números debe anotar Benito para adivinar el polinomio en el cual pensó Anita?

Problema 9.2.25. Suponga que $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tiene la siguiente propiedad: para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(f(n)) = d(n)$. Demuestre que si p es un número primo entonces $f(p)$ es un número primo.

Problema 10.2.25. Determine todos los cuadrados perfectos que se obtienen al concatenar una o más veces el número 2025: es decir, determine todos los cuadrados perfectos de la forma $20252025\ldots2025$.

Soluciones a los problemas de entrenamiento (Año 2025, No. 2)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en la segunda entrega de 2024 de Tzaloa. En esta ocasión, agradecemos a Alonso Baeza Quevedo de Baja California Sur (México) por haber contribuido soluciones a los problemas 1.2.24 y 2.2.24, a Tristán Sánchez Díaz de Palenque, Chiapas (México) por la solución que envió para el problema 3.2.24 y a José Luis Carballo Lucero de Baja California Sur por la solución que nos hizo llegar para el problema 5.2.24; por otra parte, reiteramos la invitación a todos nuestros lectores a seguir enviando soluciones para que éstas puedan aparecer en la páginas de Tzaloa eventualmente.

En el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en el tercer número de 2024 de la revista. ¡Aún están a tiempo de enviar soluciones!

Problema 1.2.24. Demuestre que hay una infinidad de números enteros positivos i, j, k y ℓ tales que los números

$$ij + 1, \quad jk + 16, \quad k\ell + 4, \quad i\ell + 9$$

son cuadrados perfectos.

Solución de Alonso Baeza Quevedo. Supongamos que i, j, k y ℓ son números enteros que satisfacen lo deseado. Esto implica que $ij + 1 = a^2$, $jk + 16 = b^2$, $k\ell + 4 = c^2$ y $i\ell + 9 = d^2$ para algunos números enteros a, b, c y d. Las igualdades anteriores pueden reescribirse como $ij = (a-1)(a+1)$, $jk = (b-4)(b+4)$, $k\ell = (c-2)(c+2)$ y $i\ell = (d-3)(d+3)$ y esto indica que si hacemos $i = n$, entonces tiene cabida considerar que $j = a+1 = n+2$, $k = b+4 = j+8 = n+10$ y $\ell = d+3 = i+6 = n+6$. Puesto que para cada número entero positivo n resulta que $ij + 1 = n(n+2) + 1 = (n+1)^2$, $jk + 16 = (n+2)(n+10) + 16 = (n+6)^2$, $k\ell + 4 = (n+10)(n+6) + 4 = (n+8)^2$ y $i\ell + 9 = n(n+6) + 9 = (n+3)^2$, se ha obtenido lo que se deseaba establecer. $\square$

Problema 2.2.24. Sea n un número de tres cifras diferentes (y ninguna de ellas igual a 0). Denotemos con n_d al número que se obtiene al escribir los dígitos de n en orden descendente y sea n_a el número que se obtiene al escribir los dígitos de n en orden ascendente. Determine todos los números n para los cuales se cumple que

$$n_d - n_a = n.$$

Solución. Notemos que todo número entero n que cumple la condición dada es múltiplo de 99: en efecto, si $n_d = \overline{zyx}$, entonces $n_a = \overline{xyz}$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} n &= n_d - n_a \\ &= \overline{zyx} - \overline{xyz} \\ &= (100z + 10y + x) - (100x + 10y + z) \\ &= 99z - 99x \\ &= 99(z - x). \end{aligned}$$

De esto se sigue que n sólo puede ser uno de los siguientes números: $99 \times 2 = 198$, $99 \times 3 = 297$, $99 \times 4 = 396$, $99 \times 5 = 495$, $99 \times 6 = 594$, $99 \times 7 = 693$, $99 \times 8 = 792$, $99 \times 9 = 891$. Consideremos la información en la tabla que se presenta enseguida:

n	n_d	n_a	$n_d - n_a$
198	981	189	792
297	972	279	693
396	963	369	594
495	954	459	495
594	954	459	495
693	963	369	594
792	972	279	693
891	981	189	792

De la información en la tabla concluimos que sólo hay un número entero n de tres cifras para el cual se cumple que $n = n_d - n_a$: a saber, $n = 495$. $\square$

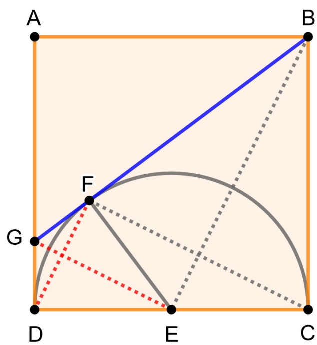
Problema 3.2.24. Se lanza un dado dos veces. Los números obtenidos se consideran para trazar un triángulo rectángulo: uno de los números determina la longitud de la hipotenusa del triángulo mientras que el otro determina la longitud de uno de los catetos. Calcule la probabilidad de que el área del triángulo sea mayor que 7 unidades.

Solución (una combinación de la enviada por Tristán Sánchez Díaz con la de Daniel Alfonso Santiesteban). Identifiquemos cada posible resultado del experimento con un par ordenado $(x, y) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En total hay 36 resultados posibles. Para determinar la probabilidad solicitada necesitamos saber en cuántos de esos pares ordenados se cumple que

$$x > y \quad \text{y} \quad \frac{y\sqrt{x^2 - y^2}}{2} > 7. \tag{18}$$

Denotemos con h_c a la longitud de la altura del triángulo que es perpendicular a la hipotenusa; puesto que $\frac{x}{2} \geq h_c$ y se requiere que $\frac{x \cdot h_c}{2} > 7$, entonces $x^2 > 28$ y de aquí que x sólo puede ser igual a 6. Introduciendo esta información en la segunda desigualdad que aparece en (18) vemos que y debe ser tal que $y^2(6^2 - y^2) > 196$. Dado que esta desigualdad se cumple para $y = 3$, $y = 4$ y $y = 5$, tenemos que hay exactamente tres pares ordenados $(x, y) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que satisfacen las dos restricciones que aparecen en (18). Al agregar los tres casos (favorables) en los cuales la primera componente del par ordenado es menor que la segunda concluimos que la probabilidad buscada es igual $\frac{3+3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. $\square$

Problema 4.2.24. En la siguiente figura, ABCD es un cuadrado de lado 8, G es un punto sobre AD y F es el punto donde BG es tangente a la semicircunferencia de centro E. Calcule la longitud de BG.



Solución. En primer lugar tenemos que EF $\perp$ BG. Con ayuda de esta observación es fácil establecer que $\triangle$BFE $\cong$ $\triangle$BCE y, en consecuencia, BF = BC = 8.

Luego, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo BCE tenemos que $\mathrm{EB} = 4\sqrt{5}$. Por otra parte, al invocar el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero cíclico BCEF obtenemos que

$$\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{FB} \cdot \mathrm{CE} + \mathrm{BC} \cdot \mathrm{EF}}{\mathrm{EB}} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

Como $\triangle$CDF es un triángulo rectángulo y conocemos CF y CD entonces es posible calcular DF:

$$\mathrm{DF} = \sqrt{\mathrm{CD}^2 - \mathrm{CF}^2} = \sqrt{64 - \frac{16^2}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

El criterio LAL de semejanza permite garantizar que $\triangle \mathrm{BFE} \sim \triangle \mathrm{CFD}$. Enseguida, al ser EDGF un cuadrilátero cíclico se desprende que

$$\measuredangle \mathrm{FGE} = \measuredangle \mathrm{FDC}.$$

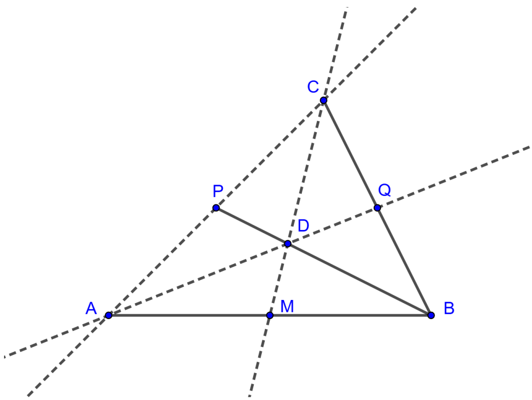
Luego, al cumplirse que los triángulos EFG y BFE tienen dos ángulos que miden lo mismo (pues $\measuredangle \mathrm{EFG} = \measuredangle \mathrm{BFE} = 90^\circ$ y $\measuredangle \mathrm{FGE} = \measuredangle \mathrm{FDC} = \measuredangle \mathrm{FEB}$) se llega a que $\triangle \mathrm{EFG} \sim \triangle \mathrm{BFE}$ y, por consiguiente,

$$\mathrm{FG} = \frac{4 \cdot 4}{8} = 2.$$

Se concluye así que $\mathrm{BG} = \mathrm{BF} + \mathrm{FG} = 10$. $\square$

Problema 5.2.24. Sean AB un segmento, M el punto medio de AB y P un punto por el que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ no pasa. Construye la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P usando únicamente una regla sin marcas.

Solución. Denotemos con M al punto medio del segmento AB. Tracemos la recta que pasa por A y P y también tracemos una recta por M que cruce a $\overleftrightarrow{\mathrm{AP}}$ en un punto distinto de P. Denotemos con C al punto donde esas rectas se intersecan. Tracemos ahora los segmentos BP y BC y llamemos D al punto donde se intersecan BP y CM. Tracemos la recta por A y D y nombremos como Q al punto donde $\overleftrightarrow{\mathrm{AD}}$ corta al segmento BC. Tenemos así un triángulo y tres cevianas concurrentes:



Del teorema de Ceva se sigue que $1 = \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}} \cdot \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} \cdot \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} = \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}} \cdot \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}$ o bien que $\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}} = \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QB}}$. El paralelismo de $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$ y $\overleftrightarrow{\mathrm{PQ}}$ se desprende al aplicar el recíproco del primer teorema de Tales a la proporción anterior. □

Problema 6.2.24. Irene, María y Nora han corrido 20 veces. Cada vez que lo hicieron anotaron su orden de llegada. No hubo ningún empate y llegaron en todos los órdenes posibles. Irene llegó antes que María 12 veces, María antes que Nora 11 veces y Nora antes que Irene 14 veces. ¿Cuántas carreras ganó cada una?

Solución. Denotemos con x_1 al número de veces que Irene, María y Nora llegaron en el orden I ⟵ M ⟵ N (esto es: Irene en primer lugar, María en segundo lugar y Nora en tercero); con x_2 al número de veces que ellas llegaron en el orden I ⟵ N ⟵ M; con x_3 al número de veces que llegaron en el orden M ⟵ I ⟵ N; con x_4 al número de veces que llegaron en el orden M ⟵ N ⟵ I; con x_5 al número de veces que llegaron en el orden N ⟵ I ⟵ M y con x_6 al número de veces que ellas llegaron en el orden N ⟵ M ⟵ I.

Del planteamiento del problema resulta claro que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 representan números enteros positivos tales que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 & (2) \\ x_1 + x_3 + x_4 = 11 & (3) \\ x_4 + x_5 + x_6 = 14. & (4) \end{cases}$$

Sumando lado a lado las ecuaciones (2), (3) y (4) de este sistema se obtiene que

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 37.$$

Al multiplicar por 2 ambos lados de la primera ecuación del sistema y sustraer del resultado así obtenido la ecuación en el renglón previo llegamos a que

$$x_2 + x_3 + x_6 = 3.$$

En vista de que x_2, x_3 y x_6 representan número enteros positivos se colige que $x_2 = x_3 = x_6 = 1$. De esta información y de las ecuaciones (1) y (2) se deduce que $x_4 = (x_1 + x_4 + x_5) - (x_1 + x_5) = 17 - 11 = 6$. Luego, $x_5 = 14 - x_4 - x_6 = 14 - 6 - 1 = 7$ y $x_1 = 12 - x_2 - x_5 = 12 - 1 - 7 = 4$. De todo el análisis realizado concluimos que Irene ganó $x_1 + x_2 = 4 + 1 = 5$ veces, María ganó $x_3 + x_4 = 1 + 6 = 7$ veces y Nora ganó $x_5 + x_6 = 7 + 1 = 8$ veces. □

Problema 7.2.24. Calcule la siguiente suma:

$$(\mathfrak{r}_1 + \sigma(1)) + (\mathfrak{r}_2 + \sigma(2)) + (\mathfrak{r}_3 + \sigma(3)) + \cdots + (\mathfrak{r}_{100} + \sigma(100))$$

donde $\mathfrak{r}_k$ denota al resto que se obtiene cuando se divide el número 100 entre k y $\sigma(k)$ representa la suma de los divisores positivos del número k.

Solución. Del algoritmo de la división se tiene que $\mathfrak{r}_k = 100 - k\left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota al máximo número entero que es menor o igual a x. Tenemos así que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} (\mathfrak{r}_k + \sigma(k)) &= \sum_{k=1}^{100} \left(100 - k\left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor + \sigma(k)\right) \\ &= 100^2 - \sum_{k=1}^{100} \left(k\left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor - \sigma(k)\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Por otro lado, al cumplirse que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} \sigma(k) &= \sum_{k=1}^{100} \sum_{d\mid k} d \\ &= \sum_{d=1}^{100} \sum_{\substack{k=1 \\ d\mid k}}^{100} d \\ &= \sum_{d=1}^{100} d\left\lfloor \frac{100}{d} \right\rfloor, \end{aligned}$$

se sigue que $\sum_{k=1}^{100}\left(k\left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor - \sigma(k)\right) = 0$; de esto y la información obtenida en (19) se colige que el valor de la suma $(\mathfrak{r}_1 + \sigma(1)) + (\mathfrak{r}_2 + \sigma(2)) + (\mathfrak{r}_3 + \sigma(3)) + \cdots + (\mathfrak{r}_{100} + \sigma(100))$ es igual a $100^2 = 10\,000$. □

Problema 8.2.24. En un pizarrón está escrito un número primo p. Una persona observa el número primo escrito en el pizarrón, procede a escribir todos los divisores primos del número $p-1$ y luego abandona la sala en la que se encuentra el pizarrón. ¿Para cuáles números primos p la persona deja anotados en el pizarrón todos los números primos menores que p?

Solución. La persona deja anotados todos los números primos menores que p cuando $p = 2$ o $p = 3$. Si $p > 3$, entonces $p - 1$ es un número par mayor que 2 y, además, todos sus divisores primos son menores o iguales a $\frac{p-1}{2}$. Puesto que el postulado de Bertrand garantiza la existencia de números primos en el intervalo $(\frac{p-1}{2}, p-1)$, concluimos que es imposible que la persona deje anotados todos los números primos menores que p cuando p es un número primo mayor que 3 . □

Problema 9.2.24. Sea $\mathfrak{X}$ el conjunto conformado por todos los números enteros de la forma $p \cdot q$ donde p y q son números primos distintos. Sea A un subconjunto de $\mathfrak{X}$ y sea $B = \mathfrak{X} \setminus A$ (el conjunto conformado por los elementos de $\mathfrak{X}$ que no pertenecen a A). Demuestre que existe un conjunto infinito P de números primos tales que los números $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}$, con $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ elementos distintos de P, pertenecen todos a A o pertenecen todos a B.

Solución. Para resolver este problema resulta de ayuda recordar la siguiente versión del teorema de Ramsey:

Teorema 1. Supóngase que V es un conjunto infinito de vértices y que a cada arista entre dos elementos de V se le asigna o el color rojo o el color azul. Existe un $H \subseteq V$, infinito, tal que todas las aristas entre dos elementos de H tienen el mismo color.

En el problema que estamos abordando consideremos que $\mathscr{V}$ es el conjunto de los números primos. Puesto que la conclusión deseada se obtiene sin dificultad alguna cuando $A = \emptyset$ o cuando $B = \emptyset$, supondremos en lo que sigue que ni A ni B son vacíos. Sean p y q números primos distintos. Asignemos a la arista entre p y q el color rojo si y sólo si $p \cdot q \in A$ y el color azul si y sólo si $p \cdot q \in B$. De acuerdo con el teorema 1, existe un subconjunto infinito P de $\mathscr{V}$ tal que o todas las aristas entre dos elementos de P son de color rojo o todas las aristas entre dos elementos de P son de color azul: por la manera en que se hizo la asignación de colores a las aristas vemos que P es un subconjunto infinito de primos tal que los números $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}$, con $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ elementos distintos de P, pertenecen todos a A o pertenecen todos a B. $\square$

Problema 10.2.24. Sea N un número entero positivo. Ana y Beto juegan el siguiente juego. Beto cuenta los pares ordenados (a, b) de números enteros positivos tales que $a + b = N$. Ana cuenta lo pares ordenados (c, d) de números enteros positivos tales que $c^{-1} + d^{-1} = N^{-1}$. Gana el jugador que obtiene el mayor número de pares ordenados. ¿Para cuáles N's gana Ana?

N. B.: En vista de que este problema es uno de los que conforman la lista de problemas finales del artículo estelar de este número de la revista hemos decidido exponer la solución esperada en el próximo número de Tzaloa. ¡No dejen de seguir intentando este reto en el ínterin!

– NOTAS FINALES –

Desde el número anterior de la revista empezamos a manejar dos *novedades* en esta sección de Tzaloa. La primera tiene que ver con la numeración de los problemas. Cada problema de entrenamiento que en la revista se plantee de aquí en más tendrá asociado un código el cual indicará su número progresivo dentro de la lista en la cual aparece y el número del respectivo año en el que el problema puede hallarse. Por ejemplo, el problema **10.1.24** es el décimo problema en la lista de entrenamiento publicada en el primer número de 2024 de la revista. **Invitamos** a nuestros lectores a tomar en cuenta esta información al nombrar los archivos en los que concentren las soluciones que planeen hacernos llegar. La segunda novedad tiene que ver con las fuentes de los problemas. Aunque no sea del todo fácil determinar el origen de un problema dado, cuando contemos con alguna nota o referencia bibliográfica puntual sobre un problema publicado en esta sección la compartiremos con nuestros lectores en el número de la revista en el cual aparezca la solución del problema. A continuación listamos los comentarios que tenemos sobre algunos de los problemas publicados en el segundo número de 2024.

★ **Problema 1.2.24.** Este fue el primer problema del examen de la 35.ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul; el evento se llevó a cabo en Fortaleza, Ceará (Brasil) del 25 al 30 de septiembre de 2024.

★ **Problema 2.2.24.** Denotemos con $\mathscr{T}$ al conjunto conformado por los números naturales de tres cifras (no todas ellas iguales). Consideremos la función $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definida por la regla de correspondencia $f(n) = n_d - n_a$. En este problema se ha establecido, en esencia, que para todo $n \in \mathscr{T}$ existe $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\kappa \text{ veces } f})(n) = 495. \tag{20}$$

Decimos que el número entero n es una *constante de Kaprekar* si satisface (20) para algún $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ y además $f(n) = n$. Se sabe que 495 es la única constante de Kaprekar de tres cifras y que, en el sistema de numeración decimal, sólo existen dos constantes de Kaprekar. Para más información sobre este tópico el lector puede consultar las páginas 239-241 del *Lure of the integers* de Joe Roberts (The Math. Association of America, 1992) o los ejercicios en la página 47 del *Elementary number theory and its applications* (4th edition) de Kenneth H. Rosen (Addison Wesley Longman, Inc., 1999).

★ **Problema 3.2.24.** Como ya lo mencionamos en el número de Tzaloa en el cual se planteó este problema, Daniel Alfonso Santiesteban (Guerrero, México) tuvo a bien enviarnos este problema. El problema apareció en el examen de la etapa regional de la 38.ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas que se aplicó en Guerrero en junio de 2024.

★ **Problema 7.2.24.** Juan José Alba González suele compartir identidades con funciones aritméticas en su cuenta de **facebook**; fue en una de las publicaciones de Juan José en esa red social que nos enteramos de la identidad de la cual trató este problema.

★ **Problema 8.2.24.** El lector puede encontrar la demostración de Paul Erdős del postulado de Bertrand en el segundo capítulo del *Proofs from THE BOOK* de M. Aigner y G. M. Ziegler (Springer Verlag publicó la sexta edición de ese bonito libro en 2018). Una exposición en español de la bella demostración de Erdős puede encontrarse en el siguiente documento:

https://euclid.uagro.mx/Bertrand.pdf

★ **Problema 9.2.24.** Un libro que recomendamos para estudiar la versión del teorema de Ramsey que se invocó en la solución de este problema es el siguiente:

- R. L. Graham, B. L. Rothschild & J. H. Spencer, *Ramsey Theory* (2nd edition). John Wiley and Sons, Inc., USA, 1990.

La discusión de la versión del teorema de Ramsey a la cual hemos apelado puede encontrarse en la sección 1.5 de esa obra.

Este problema lo vimos por vez primera en la sección de problemas avanzados del “Rincón de problemas” de Gil Bor (investigador del CIMAT A. C.).

¡HASTA LA PRÓXIMA!

4º Concurso Nacional Femenil de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El Concurso Nacional Femenil de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas surge como una iniciativa temporal para disminuir la brecha de género que existe en el Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con el objetivo de impulsar a las jóvenes concursantes a que continúen participando y se preparen a lo largo del año.

Este concurso consiste en una prueba escrita de 6 problemas, dividida en dos días de 4 horas y media cada uno. Cada día se presentan 3 problemas, y las alumnas deben redactar detalladamente su procedimiento. Cada problema se califica en una escala de 0 a 7 puntos, siendo 7 la máxima puntuación posible.

Las estudiantes pueden participar en dos niveles, dependiendo de su edad y escolaridad. El **Nivel 1** está conformado por alumnas que no hayan cumplido 18 años al 1 de agosto de 2025 y que estén inscritas, como máximo, en el primer año de bachillerato al momento del concurso. Por su parte, el **Nivel 2** está integrado por alumnas que cumplan los siguientes requisitos:

- No haber cumplido 20 años al 1 de agosto de 2025.
- Estar inscritas, como máximo, en el tercer año de bachillerato al momento del concurso.
- No haber participado dos veces en el Nivel 2 del Concurso Femenil Nacional en años anteriores.
- No haber formado parte del equipo mexicano en dos ediciones de la Olimpiada Femenil Europea (EGMO).

Esta cuarta edición se llevó a cabo del **8 al 13 de junio de 2025** en la ciudad de **Guanajuato, Guanajuato**. Participaron un total de 26 delegaciones estatales, conformadas por **76 alumnas** de Nivel 1 y **74 alumnas** de Nivel 2.

Para llegar a este concurso, las estudiantes pasaron por un proceso selectivo estatal hasta integrar la delegación que representó a su estado, la cual puede estar conformada por un máximo de 3 estudiantes de Nivel 1 y 3 estudiantes de Nivel 2.

Ganadoras del 4° Concurso Nacional Femenil de la OMM

Las alumnas con los mejores puntajes en cada nivel obtienen la **medalla de oro**. A continuación, presentamos a las ganadoras de medalla de oro de **Nivel 1**:

- Dana Karen Medina González (Yucatán)
- Elisa María Villarreal Corona (Ciudad de México)
- Alma Carolina Reyna Moreno (Tamaulipas)
- Maia Berenice Díaz Mondragón (Morelos)
- Celeste Margarita Cazarin Ortiz (Nuevo León)
- Camila Muñoz Cortés (Tlaxcala)

Las ganadoras de medalla de oro de **Nivel 2** fueron:

- Alejandra Muñoz Espín (Morelos)
- Sofía Constanza Santisteban Dávila (Quintana Roo)
- Karen Quintero Montoya (Sinaloa)
- Isabela Barrera Leal (Jalisco)
- Natalia De Jesús Contreras (Sinaloa)

Aunque la participación en el Concurso Nacional Femenil es individual, es importante destacar el trabajo realizado por los estados para apoyar a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este esfuerzo, presentamos el podio de los primeros tres lugares de cada nivel en el 4° Concurso Nacional Femenil de la OMM:

Top 3 por estados Nivel 1:

1. Ciudad de México (48 puntos)
2. Nuevo León (44 puntos)
3. Morelos (42 puntos)

Top 3 por estados Nivel 2:

1. Morelos (53 puntos)
2. Sinaloa (45 puntos)

3. Michoacán (43 puntos)

En esta ocasión, las alumnas con los mejores puntajes del Nivel 1 integran la preselección nacional, de la cual se formará el equipo que representará a México en la **Pan American Girls' Mathematical Olympiad (PAGMO)**, que se celebrará en la ciudad de **Fortaleza, Brasil**, del **26 de octubre al 1 de noviembre de 2025**.

Las alumnas preseleccionadas para este concurso son:

- Dana Karen Medina González (Yucatán)
- Elisa María Villarreal Corona (Ciudad de México)
- Alma Carolina Reyna Moreno (Tamaulipas)
- Maia Berenice Díaz Mondragón (Morelos)
- Celeste Margarita Cazarin Ortiz (Nuevo León)
- Camila Muñoz Cortés (Tlaxcala)
- Nelly Sofía Palma Barbabosa (Baja California Sur)
- Mayte Lozano Lozano (Jalisco)
- Catalina Bastidas Polanco (Baja California)
- Araceli Díaz Gudiño (Morelos)
- Gema Abril Rodríguez Morales (Tlaxcala)

Además, con el fin de brindar una mejor preparación al equipo mexicano que participará en futuras ediciones de la PAGMO, en 2025 se preseleccionó también a las alumnas que integrarán la preselección rumbo a la **PAGMO 2026**, para que en próximas ediciones del concurso, las alumnas preseleccionadas para el año siguiente dispongan de mayor tiempo de preparación previa. Debido a las restricciones de edad, esta lista no coincide con la anterior, y el equipo de alumnas preseleccionadas está conformado por:

- Elisa María Villarreal Corona (Ciudad de México)
- Maia Berenice Díaz Mondragón (Morelos)
- Nelly Sofía Palma Barbabosa (Baja California Sur)
- Gema Abril Rodríguez Morales (Tlaxcala)
- Inés Llanas Rodríguez (Nuevo León)
- Fernanda Ximena Villanueva Infante (Baja California Sur)
- Anna Alexandra Castro Calderón (Guerrero)
- Nayeli Valentina Ortiz Cordero (Ciudad de México)
- Ximena Pilliyollotzin Castro Cervantes (Ciudad de Mexico)
- Beatriz Berenice Navarrete Cervantes (Nuevo León)

Muchas felicitaciones a las preseleccionadas y les deseamos el mayor de los éxitos en los entrenamientos que están por comenzar.

Sin más preámbulos presentamos los problemas presentados durante este concurso.

Problemas del 4º Concurso Nacional Femenil

Día 1.

Las alumnas de la categoría I resolvieron los problemas 1, 2 y 3, mientras que las alumnas de la categoría II resolvieron los problemas 2, 3 y 4.

Problema 1. Luna y sus amigas están jugando con agua. Tienen n garrafones vacíos de capacidad infinita y m botellas llenas de agua, con $m > n$. Las botellas están ordenadas y numeradas $1, 2, \ldots, m$ de la más pequeña a la más grande. La botella i tarda exactamente i segundos en vaciarse, para $1 \leq i \leq m$. Sus amigas van a vaciar el agua de las botellas en los garrafones siguiendo estas reglas:

- Al empezar el juego las n botellas más pequeñas comienzan a vaciarse simultáneamente en los n garrafones, una botella en cada garrafón.
- Cuando se termina de vaciar una botella, inmediatamente se empieza a vaciar la siguiente botella más pequeña aun llena de agua en ese mismo garrafón. Si ya no hay botellas disponibles para empezar a vaciar, Luna empieza su cronómetro. El resto de las botellas se siguen vaciando.
- Luna detiene el cronómetro cuando todas las botellas están vacías.

¿Qué tiempo marcará el cronómetro de Luna cuando lo detenga?

Problema 2. Los conjuntos A, B, C y D cumplen las siguientes condiciones:

1. Sus elementos son números enteros del 1 al 20.
2. Cada conjunto tiene cuatro elementos y no hay un mismo número en dos o más conjuntos distintos.
3. Sean P_a, P_b, P_c, P_d los productos de los números en los conjuntos A, B, C y D respectivamente, y Q_a, Q_b, Q_c y Q_d el producto de los factores primos distintos de P_a, P_b, P_c y P_d respectivamente. Se cumple que:

$$P_a \cdot P_b = P_c \cdot P_d \qquad \text{y} \qquad \mathrm{mcd}(Q_a, Q_b) \cdot \mathrm{mcd}(Q_c, Q_d) \leq 3.$$

¿De cuántas maneras se pueden elegir los conjuntos?

Nota: mcd es el máximo común divisor.

Problema 3. Sea ABC un triángulo escaleno con $\angle BAC = 90^\circ$, y sea M el punto medio de BC. La recta perpendicular a AM por M interseca a las rectas AB y AC en P y Q respectivamente. Sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos CMP y BMQ respectivamente. Demuestra que H_1H_2 pasa por A.

Nota: El ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.

Problema 4. Sean a, b, c, d números reales positivos. Demuestra que

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}\right)^4 \geq \frac{64abcd}{a^4+b^4+c^4+d^4}.$$

Día 2.

Las alumnas de la categoría I resolvieron los problemas 5, 6 y 7, mientras que las alumnas de la categoría II resolvieron los problemas 6, 7 y 8.

Problema 5. Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión geométrica estrictamente creciente. Determina todos los números reales x para los cuales existe $n \geq 0$ tal que

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Nota: Se dice que una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es *geométrica* si existe una constante r tal que $a_{n+1} = r a_n$ para toda $n \geq 0$; y que es *estrictamente creciente* si $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geq 0$.

Problema 6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y E el punto de intersección de sus diagonales. La circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BEC corta a la recta AB en F y a la recta CD en G. Sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC y sea Q el pie de la perpendicular desde B sobre la recta AD. Demuestra que

$$\frac{AF}{DG} = \frac{AP}{BQ}.$$

Nota: Un cuadrilátero cíclico es un cuadrilátero con sus cuatro vértices sobre una misma circunferencia.

Problema 7. Sea n un entero positivo. Se numeran los renglones y las columnas de una cuadrícula de $n \times n$ del 1 al n. Dentro de cada cuadrito se escribe un entero no-negativo de manera que el entero escrito en el cuadrito del renglón i y columna j es igual a la cantidad de cuadritos que tienen escrito el producto $i \cdot j$. Determina de cuántas maneras se puede hacer esto.

Problema 8. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (n, m) que cumplan lo siguiente: existe un entero impar r, con $0 \leq r \leq m-1$, y una permutación $\{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n\}$ de $\{2, 3, ..., 2n, 2n + 1\}$, tales que los n números

$$a_1b_1 - r, a_2b_2 - r, ..., a_nb_n - r,$$

son todos múltiplos de m.

Soluciones del 4° Examen Nacional Femenil

Solución 1. (*Alma Carolina Reyna Moreno*) Como una botella i tarda i segundos en llenarse, cada botella se llena un segundo más rápido que la siguiente. Organicemos nuestras m botellas y n garrafones en orden.

Observemos que cuando se acabe de vaciar la primera botella, todas las demás tardarán un segundo menos en vaciarse. Debido a que en el garrafón 1 no hay botella, se coloca la siguiente más pequeña, que es $n + 1$. Ahora, de la botella n a la $n + 1$ no habrá un segundo de diferencia, sino dos, porque a la botella n le restan $n - 1$ segundos por el segundo que tardó en vaciarse la primera botella.

A la segunda botella le queda un segundo, y cuando pase, se colocará ahí la botella $n + 2$, mientras que a la botella $n + 1$ le quedarán n segundos, y así, su diferencia de tiempo también será de 2 segundos.

Así como en las botellas de la primera ronda siempre hubo un segundo de diferencia, las que se colocan en la segunda ronda tienen diferencia de dos segundos. Este razonamientos también nos muestra que la distancia aumenta en un segundo por cada ronda nueva.

Ahora, en la ronda final, puede haber botellas de dos rondas distintas. Digamos que en este momento se hicieron j rondas completas, por lo que entre las botellas de esa ronda hay j segundos de diferencia. Si la última botella colocada de la ronda final es la m, el cronómetro iniciará cuando a esa botella le queden $m - j$ segundos. Como cada ronda tiene exactamente n botellas, la cantidad de rondas enteras es el piso de $\frac{m}{n}$ y por tanto la respuesta será $m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$.

Solución 2. (*Solución adaptada de la de Elisa María Villareal Corona*) Observemos que si p es un primo, entonces $p \mid \text{mcd}(Q_a, Q_b)$ si y sólo si $p \mid \text{mcd}(P_a, P_b)$. La misma afirmación se hace respecto de los productos correspondientes a C y D. En particular, si $\text{mcd}(Q_a, Q_b) = p$, entonces $\text{mcd}(P_a, P_b) = p^r$ para algún entero positivo r.

Ahora, notemos que $11, 13, 17$ y 19 no están en ningún conjunto, pues al ser primos mayores a 10, sólo aparecen una vez entre los 20 posibles números, de modo que será imposible que $P_a \cdot P_b = P_c \cdot P_d$, cuando usamos alguno de ellos. La consecuencia de lo anterior, es que todos demás números deben ser usados, y solo debemos cuidar ahora la forma de repartirlos para que los factores primos cumplan las condiciones del problema. De paso, observemos que al multiplicarlos, el resultado se factoriza como $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2$.

Por otro lado, la condición $\text{mcd}(Q_a, Q_b) \cdot \text{mcd}(Q_c, Q_d) \leq 3$ nos restringe los posibles valores de ambos factores a $1, 2, 3$, y que forzosamente uno de ellos será igual a 1. Supongamos sin pérdida de generalidad que es $\text{mcd}(Q_a, Q_b) = 1$.

Si en A sólo aparece un factor primo, entonces tiene que ser 2, ya que no hay cuatro números que sean potencias de 3 o de 5 en las opciones. Entonces los elementos de A tendrían producto igual a 2^9, mientras que los elementos de B tienen producto igual a $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, por lo que uno de ellos deberá ser 7, y los otros tres tienen un producto igual a $3^4 \cdot 5^2$, pero una verificación manual muestra que esto es imposible. Lo mismo sucedería si en B solo hubiera un factor primo. La conclusión es que en A aparecen dos factores primos, lo mismo que en B. El 7 no puede ir con el 3 o el 5 debido a que tendría que estar el número 7 y los otros tres deberían ser potencias y solo el 3 tiene tres potencias en el rango, pero $1 \cdot 3 \cdot 9 = 3^3$ no da 3^4, entonces el 7 va con el 2 y el 3 con el 5. Los factores 5 deben dar 5^2 así que debe haber dos múltiplos, que deben ser 5 y 15, por lo que faltan dos números con factores 3 nada más, que multipliquen 3^3, que deben ser 3 y 9. Concluimos que uno de los conjuntos debe ser $\{3, 5, 9, 15\}$. Vamos a suponer que es A.

Ahora B, si contiene al 7, debe tener otras tres potencias de 2 que multipliquen 2^9 (recordemos que en B sólo aparecen dos números primos como factores), y sólo pueden ser $16, 8, 4$. Por otro lado, si contiene al 14 tendrá otras tres potencias de 2 que multipliquen 2^8, y deben ser 16, 8 y 2. Así, hasta ahora, tenemos $A = \{3, 5, 9, 15\}$ y $B = \{4, 8, 16, 7\}$ o $B = \{2, 8, 16, 14\}$.

En cualquiera de las dos posibilidades para B, entre C y D habrá más de cinco números pares, por lo que $\text{mcd}(Q_c, Q_d)$ necesariamente será 2 (no puede ser 1 y no podrá ser 3). Una consecuencia directa es que todos los factores 3 que haya deben estar contenidos completamente en C o completamente en D, y lo con los múltiplos de 5.

Supongamos que todos los factores 3 que faltan están en C (esto es, $6, 12$ y 18), entonces los múltiplos de 5 que quedan (el 10 y el 20) deberán ir en D. Un listado manual de casos muestra que los números restantes (el $1, 2, 14$ con la primera opción de B y el

1, 4, 7 para la segunda) tienen 3 formas de repartirse, por lo que en total tenemos seis posibilidades.

Sin embargo, por las simetrías del problema, cada una de esas seis opciones debe multiplicarse por 8 (un factor 2 proviene de la simetría entre A y B, otro factor 2 viene de la simetría entre C y D, y el último factor viene de la simetría entre el par A, B con el par C, D). Concluimos entonces que hay 48 formas de tomar los conjuntos buscados.

Solución 3. (*Dana Karen Medina González*) Trasladando ángulos en la figura, haciendo uso de los ángulos rectos, podemos deducir que $\angle ABC = \angle AQM$ y por tanto el cuadrilátero $CPBQ$ es cíclico.

Definimos los puntos C_1 y P_1 respectivamente como las intersecciones $CH_1 \cap MP$ y $PH_1 \cap CM$, y podemos ver que CH_1 es paralela a AM, y como $AM = MB = MC$, la conclusión es que BB_1CC_1 es un paralelogramo.

Ahora, APC_1C es un cuadrilátero cíclico con diámetro CP, mientras que APP_1C es un cuadrilátero cíclico con diámetro CP (ambos por tener pares de ángulos opuestos rectos) y por tanto, APP_1C_1C es un pentágono cíclico. Denotemos a su circunferencia como Γ_1.

Adicionalmente, Q_1QBA es círculo con diámetro BQ, al igual que QBB_1A, de modo que AB_1BQQ_1 también es un pentágono cíclico. Denotemos a su circunferencia por Γ_2.

Además, CC_1QQ_1 y PP_1BB_1 son cíclicos por ángulos rectos opuestos, llamemos γ_1 y γ_2 a sus circunferencias respectivas.

Calculando potencias de puntos, las potencias de H_1 respecto de γ_1 y γ_2 son respectivamente $H_1C \cdot H_1C_1$ y $H_1P_1 \cdot H_1P$, pero por la potencia de H_1 respecto de Γ_1, ambos productos son iguales.

Así mismo, las potencias de H_2 respecto de γ_1 y γ_2 son, respectivamente, $H_2Q \cdot H_2Q_1$ y $H_2B_1 \cdot H_2B$, pero por la potencia de H_2 respecto de Γ_2, ambos productos son iguales. Concluimos entonces que H_1H_2 es el eje radical de los círculos γ_1 y γ_2.

Para terminar, observemos que la potencia de A respecto de γ_1 es $AC \cdot AQ$, mientras que respecto de γ_2 es $AP \cdot AB$. Mas, como habíamos establecido al inicio que $CPBQ$ es cículo, $AC \cdot AQ = AP \cdot AB$, por lo que A pertenece al eje radical de γ_1 y γ_2, y por tanto es colineal con H_1 y H_2.

Solución 4. (*Ekaterine Nava Solenarova*) Aplicamos la desigualdad entre medias aritmética y geométrica,

$$\frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}},$$

de donde

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}\right)^4 \geq 4^4\left(\frac{abcd}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}\right).$$

Como $4^4 = 4 \times 64$, basta demostrar que

$$\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \geq \frac{1}{a^4+b^4+c^4+d^4},$$

pero si lo expresamos como $4(a^4+b^4+c^4+d^4) \geq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$, obtenemos la conclusión como una aplicación de la desigualdad del reacomodo.

Solución 5. Por ser una sucesión geométrica, existe r tal que $a_n = r^n a_0$. Y como la sucesión es estrictamente creciente, entonces $a_0 \neq 0$, $r > 0$ y $r \neq 1$. Esto porque si $a_0 = 0$ o $r \in \{0, 1\}$ entonces la sucesión sería constante a partir de a_1; y si $r < 0$ entonces la sucesión alternaría de signos, dado que $a_0 \neq 0$. Ambos contradicen que la sucesión sea estrictamente creciente. Luego,

$$\begin{aligned} P(x) &:= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_0\left((rx)^n + (rx)^{n-1} + \cdots + (rx) + 1\right). \end{aligned}$$

Este último paréntesis contiene una suma geométrica, así que

$$P(x) = \begin{cases} a_0\left(\dfrac{r^{n+1}x^{n+1}-1}{rx-1}\right), & \text{si } x \neq \frac{1}{r}, \\ a_0(n+1), & \text{si } x = \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Puesto que $a_0 \neq 0$, se sigue que $P(x) = 0$ si, y sólo si, $x \neq \frac{1}{r}$ y

$$\frac{r^{n+1}x^{n+1}-1}{rx-1} = 0,$$

lo cual equivale a que $x \neq \frac{1}{r}$ y $x^{n+1} = \frac{1}{r^{n+1}}$.

Cuando $n+1$ es impar, la última expresión se reduce a $x = \frac{1}{r}$, lo cual es un absurdo porque $x \neq \frac{1}{r}$. Y cuando $n+1$ es par, entonces se cumple para

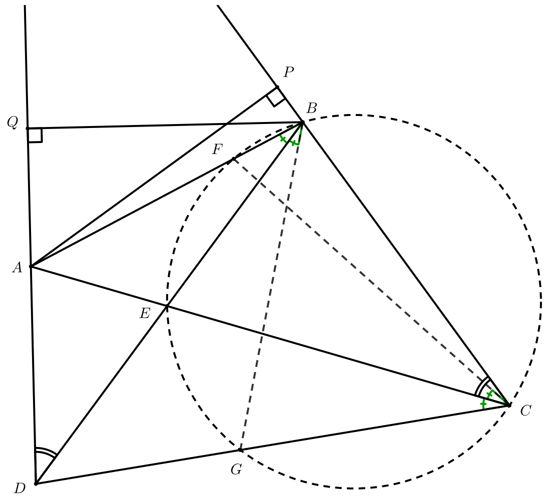
$$x = \pm\frac{1}{r},$$

de lo cual obtenemos que $x = -\frac{1}{r}$, que en efecto cumple $x \neq \frac{1}{r}$.

Por lo tanto, la única posibilidad es $x = -\frac{1}{r} = -\frac{a_0}{a_1}$, que se alcanza con cualquier n impar.

Solución 6. Los triángulos $\triangle APC$ y $\triangle BQD$ son semejantes, pues los ángulos $\angle APC$ y $\angle DQB$ son rectos y $\angle PCA = \angle BDQ$ debido al cíclico $ABCD$. En consecuencia,

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{BD}.$$



Tenemos la semejanza $\triangle BDG \sim \triangle CAF$, pues de los cíclicos $ABCD$ y $BFEGC$ sabemos que

$$\begin{aligned}\angle FCA(= \angle FCE) = \angle FBE(= \angle ABD)\\ = \angle ACD(= \angle ECG) = \angle EBG(= \angle DBG)\end{aligned}$$

y $\angle BDG = \angle FAC$. Entonces

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AF}{DG}$$

y por lo tanto,

$$\frac{AF}{DG} = \frac{AP}{BQ}.$$

Solución 7. Supongamos construida una tabla que cumpa las condiciones.

Para $1 \leq i, j \leq n$ sea $f(i, j)$ el número que aparece en la casilla (i, j), es decir, la cantidad de casillas que tienen escrito al número ij.

Vamos a contar de dos maneras distintas la suma S de todos los números que aparecen en las casillas.

Por un lado éste es

$$S = \sum_{i,j} f(i,j).$$

Por otro lado, calculemos S contando cuántas veces aparece ij.

Usemos la siguiente notación. Dado un número a con $1 \leq a \leq n^2$, sea $k(a)$ el número de formas de escribir a como producto de dos números entre 1 y n (las a que nos interesan son los poductos ij). Notamos que $k(a) \leq \tau(ij)$, que es el número de formas de escribir a como producto de dos naturales, que, a su vez, es el número de divisores de a. (Por ejemplo, si $n = 5$ y $a = 6$, entonces $a = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$, de manera que $k(a) = 2$ y $\tau(a) = 4$.)

Ahora, sabemos que un determinado ij aparece en $f(i,j)$ casillas, así que

$$S = \sum_{i,j} \frac{ijf(i,j)}{k(ij)} \geq \frac{ijf(i,j)}{\tau(ij)}.$$

Pero entonces, como todos los sumandos son no negativos, la única forma es que cada $f(i,j) = \dfrac{ijf(i,j)}{\tau(ij)}$, de donde $f(i,j) = 0$ o $1 = \dfrac{ijf(i,j)}{\tau(ij)}$; es decir, $f(i,j) = 0$ o $ij = \tau(ij)$ y esta última condición ocurre si, y sólo si, $ij = 1$ o $ij = 2$.

Entonces las únicas soluciones posibles son las que tienen puros $0'$s salvo tal vez en los dos primeros renglones y columnas, que deben ser cualquiera de los siguientes 5:

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Solución 8. Sea (n, m) una pareja de enteros positivos que cumpla la condición. Si m es par, entonces $a_1b_1 - r, a_2b_2 - r, \ldots, a_nb_n - r$ son múltiplos de un número par también, y por lo tanto son pares. Pero para alguna i, tendremos que $a_i = 2$ o $b_i = 2$ y entonces $a_ib_i - r$ es impar, una contradicción. Así que m es impar.

Si $m = 1$, $0 \leq r \leq 1 - 1.$, por lo que $r = 0$, pero como r es impar, llegamos a una contradicción. Podemos entonces suponer que $m > 1$.

Si existe un primo p que divide a m y además $p \leq 2n + 1$ tendríamos que p divide a $a_1b_1 - r, a_2b_2 - r, \ldots, a_nb_n - r$ también. Para alguna i, tendremos que $a_i = p$ o $b_i = p$, por lo que p divide a $a_i b_i$ y entonces p divide a $(a_i b_i) - (a_i b_i - r) = r$.

Entonces p divide a $(a_i b_i - r) + (r) = a_i b_i$ para toda i, y por lo tanto divide a alguno de a_i o b_i. Entonces, hay al menos n múltiplos de p en $\{2, 3, \ldots, 2n, 2n+1\}$, al menos uno por cada pareja (a_i, b_i).

Supongamos que estos n múltiplos son $pk_1 < pk_2 < \cdots < pk_n$, lo cual implica $k_n \geq n$. Tendremos $pn \leq pk_n \leq 2n + 1 < 2n + n = 3n$ y por tanto $p < 3$, una contradicción. Así, todos los primos que dividen a m son mayores a $2n + 1$.

Sabemos que $a_i b_i - r > -r > -m$, así que todos los múltiplos de m son al menos 0. Si todos fueran igual a 0, tendríamos

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = \cdots = a_n b_n = r$$

pero entonces para alguna i, $a_i = 2$ o $b_i = 2$ implican que r es par, una contradicción. Entonces para alguna i, $a_i b_i \geq m + r$. Si m tuviera al menos dos factores primos p, q, sucedería que

$$(2n+1)^2 \geq a_i b_i \geq m \geq pq > (2n+1)^2$$

una contradicción.

Entonces m puede tener máximo solo un factor primo, y como $m > 1$, m debe ser primo. Además, $m > 2n + 1$ por lo que $m \geq 2n + 3$.

Existe un entero $1 < s \leq 2n+1$ tal que $2s - r$ es múltiplo de m. Como $2m > 2(2n+1) \geq 2s > 2s - r \geq 0$ y $2s - r$ es impar, deberá ser que

$$2s - r = m \Rightarrow s = \frac{m + r}{2}$$

Sea $t = \dfrac{m - r}{2} > 0$. Tenemos $t < s \leq 2n + 1$. Si tuvieramos $t = 1$, $\dfrac{m - r}{2} = 1$, lo cual quiere decir qie $r = m - 2$ y por tanto $s = \frac{2m-2}{2} = m - 1$, pero entonces $m = s + 1 \leq 2n + 2$, una contradicción.

Entonces debe ser que $2 \leq t \leq 2n + 1$ y debe existir $2 \leq \alpha \leq 2n + 1$ tal que $\alpha t - r$ es múltiplo de m. Entonces

$$m | \alpha t - r$$

$$\Rightarrow m | 2\alpha t - 2r = \alpha(m - r) - 2r$$

$$\Rightarrow m | -\alpha r - 2r$$

Como m es primo y $r < m$, r es primo relativo con m, entonces $m | -\alpha - 2$ y por tanto $m | \alpha + 2$.

Sin embargo, como $0 < \dfrac{\alpha + 2}{m} \leq \dfrac{(2n+1)+2}{m} \leq \dfrac{m}{m} = 1$, se deben dar todas las igualdades, por lo que $m = 2n + 3$. Entonces $(n, m) = \left(\dfrac{p-3}{2}, p\right)$ para un primo p.

Conversamente, si $(n, m) = \left(\dfrac{p-3}{2}, p\right)$ para un primo p, entonces podemos emparejar los residuos $2, 3, \ldots, p-2$ módulo p de forma que cada uno esté emparejado con su inverso módulo p: la única manera de que esto no se pudiera es que sucediera que un residuo está emparejado consigo mismo. Pero entonces este residuo u cumpliría que $u^2 \equiv 1 \pmod{p}$ lo que significa $p | u^2 - 1 = (u-1)(u+1)$. Pero $0 < u - 1 < u + 1 < p$, y entonces ninguno de los dos factores lo puede dividir p, una contradicción.

Podemos entonces elegir $r = 1$, emparejar los residuos de esta manera, y concluir que estas son todas las parejas de enteros positivos que cumplen la condición del problema.

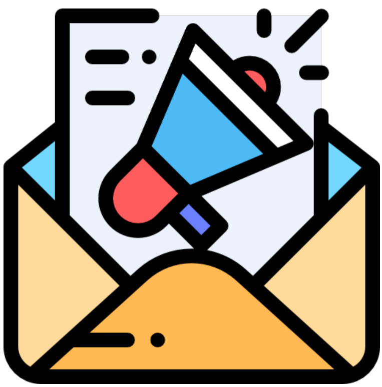
Voces de la comunidad olímpica

Bienvenidos y bienvenidas a esta nueva sección de la revista, donde en cada número publicaremos un mensaje de algunos miembros de la comunidad olímpica. El objetivo es poder dar a conocer las diferentes experiencias y perspectivas que nacen a partir de la experiencia de haber participado en la olimpiada y como es que este concurso, se compone de muchas más cosas que un examen. Si quisieras compartir tu experiencia, ya sea que actualmente sigas participando, ya seas olímpico/a, seas entrenador/a, padre de familia, parte de un comité, envía tu escrito al correo:

`revistaomm@gmail.com`

y con gusto te leeremos para considerar publicarte en un siguiente número.

Esperamos disfruten de leer esta nueva sección tanto como nosotros disfrutamos crearla.



Andrea Sarahí Cascante Duarte

Olímpica Internacional del estado de Morelos

¡Hola! Soy Andrea Sarahí Cascante Duarte de Morelos, tengo 17 años y llevo seis años participando en olimpiadas de matemáticas. Mi aventura empezó cuando, estando en quinto de primaria, mi escuela me invitó a realizar el examen estatal de la olimpiada. Me vi motivada a hacerlo por dos factores principales: mi curiosidad y ganas de probarme a mí misma, y aquellos días de honores a la bandera donde, al término de estas, mencionaban a los alumnos que seguían avanzando en las etapas, donde un nombre que siempre escuchaba era el de Ale; desde entonces la empecé a admirar mucho y a verla como un modelo a seguir.

El día del examen llegó y, a pesar de mis nervios, logré posicionarme con el segundo mejor puntaje del estado. No lo podía creer y creo que eso fue algo que impactó positivamente en mi confianza. Los entrenamientos empezaron y, en un abrir y cerrar de ojos, junto con Leo, Diego, Kendra y Marion, formamos un grupo muy bonito: Brilliant Team: Donde los niños brillantes brillan. Tener a un grupo al cual pertenecer hizo más emocionante y agradable mis inicios en la olimpiada, pues los cinco llegamos muy lejos y siempre pasábamos momentos muy divertidos juntos. Eventualmente cortaron a Kendra y a Marion, pero ninguno de los tres que quedamos nos vimos desmotivados por ello, incluso me atrevo a decir que eso nos motivó más para llegar lejos por ellas. Ese año hice mi primer examen para la OMM, en el cual me fue muy bien y logré llegar lejos a pesar de estar compitiendo con gente de prepa.

Llegó 2019 y, gracias a mucho esfuerzo y dedicación, mi primer nacional de OMMEB junto con Leo y Emi. Recuerdo con felicidad ese primer nacional donde, junto con Leo, Emi, Ale, Yhel y Pao, pasé momentos muy divertidos; y aunque no conviví mucho con Andrea, Melissa y Ame, me gustó poder compartir con ellas una olimpiada tan bonita. El día de la premiación llegó y así fue como conseguí mi primera medalla nacional... una medalla de plata que se quedó a un problema del oro. Me sentía muy feliz porque nos fue superbién por equipos... lo cual marcó el inicio del Team LEA (Leo, Emi y yo).

Con esto se vino mi primera preselección internacional, la IMC. Estaba muy emocionada y motivada para ello, pero por un par de asuntos familiares no pude asistir al primer entrenamiento, por lo que se acabó para mí. Me sentía triste porque, además de significar que no podría ir al internacional, también implicaba que me quedaría atrás en nivel respecto a Leo y Emi; pero David no dejó que eso sucediera. David, un entrenador de Morelos que en aquel entonces tenía la edad que yo tengo ahorita, quiso entrenarme porque creyó en mi potencial y en mis ganas de superarme a mí misma, cosa que le agradezco demasiado porque no sólo me ha apoyado olímpicamente, también lo ha hecho como un amigo.

Un nuevo año comenzó, 2020, y con él vino una pandemia que nos dejó a todos en nuestras casitas por mucho tiempo. Encontré mi lugar seguro en la comunidad olímpica, por lo que fue una etapa difícil para mí, pues pasé de ver a mis amigos todo el día dos veces a la semana en los entrenamientos a tener que estar frente a una pantalla todo el día dos veces a la semana. Fue un poco frustrante, pero después empecé a entrenar con Ale en llamada, cosa que me ayudó mucho. Pasamos ratos muy buenos y diría que desde entonces se volvió una de mis mejores amigas. Este año fue uno que me marcó bastante, pues por diversos factores decidí abandonar la OMM en la etapa de selección de la delegación, aun sabiendo que podía llegar a dicho nacional.

La OMMEB de ese año no fue muy placentera para mí, pues además de haber sido en línea, no me sentí satisfecha con mi desempeño, a pesar de haber conseguido una segunda medalla de plata, y un lugar en el podio por equipos. Me desmotivé mucho ese año, pero no dejé que eso me detuviera. Fui parte de los entrenamientos nacionales rumbo a la IMC 2021 y, aunque no fui seleccionada, los recuerdo con mucho cariño. Un entrenamiento nacional no es solo un espacio donde entrenas y haces exámenes, también es un espacio donde tienes la oportunidad de conocer a muchos chicos increíbles que comparten tu misma pasión y eso es lo que más me gusta.

El 2021 llegó y decidí transformar mi frustración del año anterior en algo maravilloso... ¡Conseguí mi primer oro nacional! Una medalla de oro en la OMMEB y también el primer oro por equipos del Team LEA, así como Campeón de Campeones, lo cual implicó de nuevo preselección IMC. Unos cuántos meses después, se hizo la preselección para la primera delegación PAGMO. Me fue muy bien en la primera etapa de selección, pero lamentablemente no quedé seleccionada este año, lo cual fue algo triste, pues me hacía mucha ilusión poder participar en esta olimpiada.

Unos meses después fue mi primera OMM. Aunque fue en línea, tengo memorias muy divertidas con Ale, Leo, Emi, Beme (Andrea) y Shubham. Gracias al esfuerzo de mis entrenadores, como Alets y Bernie, obtuve una medalla de plata así como otras dos preselecciones internacionales: OMCC y EGMO. Con todo esto me sentí muy satisfecha con mi desempeño de ese año y una vez más me di cuenta de que si quería llegar lejos, tendría que poner todo mi esfuerzo en ello.

Estar preseleccionada para más de una olimpiada significa también faltar demasiado a la escuela, lo cual implica echarle muchas más ganas a los estudios para no quedarme atrás. Estos entrenamientos nacionales fueron de nuevo en línea, pero eso no fue un impedimento para poder pasarla bien, pues cuando terminaban los entrenamientos, en ocasiones, nos quedamos un rato más jugando algún juego en línea o simplemente platicando, lo cual me permitió formar muchas nuevas amistades así como reforzar algunas otras.

Este año tuvo muchos altibajos para mí, empezando por que, a pesar de todas las ganas que le eché, no logré quedar entre las primeras cuatro chicas, lo cual implicó que no formé parte de la delegación de la EGMO de ese año, cosa que soñaba con todas mis ganas, pues me hacía mucha ilusión poder compartir una competencia con Ana Illanes, a quien he admirado desde que comencé en la olimpiada. Siguiendo porque el Team LEA estableció una meta para ese año: ir los tres juntos a la OMCC. Eventualmente, los puntajes indicaron que probablemente el cuarto lugar estaba entre Leo y yo, cosa que nos desanimó mucho y al final ninguno de los dos quedó para dicha competencia. Podemos continuar con que en la OMMEB de ese año, mi última, no logré conseguir medalla de oro, aunque el Team LEA sí lo hizo por equipos. De igual manera, en la OMM de ese año, no me fue como esperaba, pues tenía expectativas más altas de mí misma, pero en ocasiones pasa que somos nuestro propio enemigo y los nervios nos hacen una mala jugada. No todo fue malo... Gracias a mi desempeño en la OMM, conseguí de nuevo ser preseleccionada para la OMCC y la EGMO.

También, este año fue mi primera IMC. ¡Había quedado segunda en la selección de secundaria! Junto con Leo, Emi, Alan, Javi, Mateo, Pollo (Sebastián) y Héctor, me preparé mucho para esta competencia, y aunque individualmente solo conseguí una mención honorífica, por equipos, junto con Leo, Mateo y Héctor, conseguimos un tercer lugar. También en 2022 fue la primera OMM Femenil y, a pesar de que fue en línea, disfruté de momentos muy agradables con Ale, Beme, Ashley, Melissa y Cami, con quienes descubrí que se necesitan 6 olímpicas y 40 minutos para ordenar pizza.

Me establecí como meta obtener un puntaje perfecto y, aunque parecía algo descabellado, al final logré conseguir oro con puntaje perfecto, quedando preseleccionada para la PAGMO de dicho año y posteriormente ocupando la primera posición para la delegación que representaría a México. Estaba muy nerviosa por la competencia y porque las otras tres chicas ya habían participado el año anterior, por lo que ya se conocían, pero muy rápido pude conectar con ellas y pronto se volvieron de mis mejores amigas con las que pude hacer noches de karaoke con ukelele. Junto con Biki, Cams y Mafer, conseguí una medalla de plata gracias también al apoyo de Olga y Ana Pau, las líderes de ese año. Fue muy raro para mí esto, pues estaba feliz por haber logrado una medalla de plata en mi primer año, pero también un poco triste porque me quedé a dos puntos del oro y sabía que era capaz de haber conseguido esos puntos que me faltaron.

Un nuevo año comenzó, así como más entrenamientos nacionales. Los primeros fueron en línea, pero en febrero de 2023 ya nos tocó uno presencial. Fui a Oaxaca a un Pre-IMC junto con Leo, Emi, Javi, Takumi, Veudi, Woojoong, JL (Juan Luis), Pollo y algunos otros chicos. Como se podrán dar cuenta, eran prácticamente puros niños. A lo largo de mi vida olímpica me pude dar cuenta de ese pequeño gran detalle, donde la presencia de niñas en estos concursos mixtos era demasiado baja en comparación a la masculina. Nunca tuve realmente un problema con ello, pues crecí rodeada de niños y era algo de alguna forma normal para mí, pero a veces sí me hubiera gustado poder tener a alguna niña con la cual convivir en un mundo lleno de varones.

Definitivamente, los entrenamientos presenciales tienen una esencia única y son una experiencia totalmente diferente. Poder trabajar en equipo más fácilmente, jugar juegos de mesa, jugar fut, conocer lugares juntos y muchas otras cosas más los hacen, sin duda, una experiencia muy valiosa. En el entrenamiento de Oaxaca se definieron los equipos que representarían a México en la IMC, donde de nuevo ocupé la segunda posición en la selección de secundaria. Los entrenamientos nacionales rumbo a la OMCC y la EGMO también fueron presenciales, en Guanajuato, donde el primero también fue el selectivo para la delegación de la EGMO de ese año.

Me hacía mucha ilusión poder formar parte de estos entrenamientos, pues además de tener la oportunidad de aprender mucho, podría convivir con olímpicos a los cuales admiraba demasiado, empezando por Biki, mi roomie esa primera vez y la que fue mi roomie por los 2 años siguientes, quien se convirtió en la hermana mayor que nunca tuve. Nunca creí poder encontrar a alguien con quien encajara perfectamente y con quien pudiera compartir gran parte de mí, hasta las nueces a medio examen.

Regresemos un poco al momento donde dieron a conocer la delegación de la EGMO de 2022... Recuerdo que cuando recibí el correo, Leo me marcó y me preguntó por los resultados. Le dije que no había quedado y también le dije otra cosa: "Mira, Leo, desde ahorita te digo que el año que viene voy a ir como MEX1 a la EGMO. No sé cómo le voy a hacer, no tengo ni la menor idea, pero te digo que voy a ir como MEX1 el año que viene".

Al final de este entrenamiento, cuando anunciaron la delegación para dicha competencia, efectivamente pude lograr la primera posición dentro del mismo. Estaba muy orgullosa de mí por ese logro y así fue como fui por primera vez a Europa con Biki, Cams y Beme, además de Sofia y Ana Pau, las líderes que en todo momento estuvieron apoyándonos. Hicimos escalas en Países Bajos y en Alemania, donde en una breve escala en Ámsterdam lo único que pudimos conocer fue el fuerte y frío viento que había tan solo saliendo de la puerta del aeropuerto, aunque después pudimos ir a un jardín botánico muy famoso. Después llegamos a Frankfurt, donde personas del consulado nos recibieron con los brazos abiertos y quienes posteriormente nos llevaron a conocer un poco de dicho lugar.

Eventualmente llegamos a Eslovenia, donde se llevó a cabo la EGMO 2023. Ahí pude conocer a muchas chicas increíbles de muchísimas partes del mundo con las que pasé momentos inolvidables; pude crear varias amistades que hasta la fecha sigo manteniendo, como mi amiga Sara de Colombia, a quien he tenido la oportunidad de ver en distintas ocasiones y con la que he forjado una muy fuerte amistad. Estaba muy nerviosa por los exámenes y me sentía muy presionada por cumplir mis propias expectativas y las de los demás, cosa que no terminó nada bien, pues en los exámenes tuve un gran bloqueo creativo que terminó en un resultado no muy agradable para mí, una mención honorífica. Definitivamente fue algo que me derribó, pero Biki, Deni, Isa Hubard y Alan fueron algunas de las personas que no me dejaron caer y estuvieron ahí en ese momento tan difícil para mí.

Creo que después de esta competencia fue cuando entendí más que nunca que una parte muy importante también es saber manejar los nervios antes, durante y después de un examen. Es posible que alguien tenga un nivel súper bueno, pero tenga nulo control de sus emociones y termine no obteniendo los resultados que su sabiduría le permite. Fue después de esto que Bruno, ex-delegado de Morelos, comenzó a ayudarme a aprender a controlar mis emociones en las competencias, y he de decir que no es algo que sucede de la noche a la mañana, es algo en lo que se debe trabajar todos los días y tener mucha paciencia.

Tras regresar de la EGMO, tuve que ir a Guanajuato al entrenamiento selectivo para la OMCC. Me sentía muy cansada y frustrada, pero al haber sido esta mi última oportunidad para ir a dicha competencia, decidí dejar de lado cómo me sentía y concentrar toda mi energía en los exámenes, y así fue como logré obtener la segunda posición dentro del equipo para la OMCC. Unos cuantos meses después se llevó a cabo por primera vez una OMM Femenil presencial, y fue donde reafirmé que las competencias femeniles son muy diferentes a las mixtas, pues estas tienen una esencia diferente y una vibra muy bonita y especial.

Ver a tantas chicas talentosas en un solo lugar haciendo lo que les apasiona es algo muy hermoso y que me hace muy feliz que sea posible. Tuve la oportunidad de dar el discurso de participante el día de la premiación y también pude obtener, de nuevo, una medalla de oro con la puntuación más alta. Gracias a esto, volví a quedar preseleccionada para la PAGMO y posteriormente conseguí ocupar la primera posición dentro del equipo para esta competencia.

Aunque la IMC no fue presencial, nos reunimos todos en Puebla: las delegaciones de primaria y secundaria, así como Lalo Gnz, César, Violeta y Míkel, nuestros líderes en aquella ocasión, quienes se aseguraron de que todo saliera bien. Antes de los exámenes tuvimos sesiones de entrenamiento y también pudimos pasear un poco en Puebla antes de la competencia. Leo, Emi, Javi, Takumi, Woojoong, Veudi y Rodrigo me acompañaron en esta gran aventura y la gran parte de ellos actualmente forman parte de mis amigos más cercanos con los cuales he podido compartir muchas otras experiencias.

El día de los exámenes llegó y, después de mucha presión y adrenalina, conseguí una medalla de bronce y, junto con Leo, Javi y Woojoong, conseguimos un bronce por grupos. Definitivamente, me sentí satisfecha por haber tenido una mejora respecto al año anterior y así fue como cerré mis participaciones en la IMC. Es muy curioso pensar que la olimpiada no te da solo oportunidades para conseguir medallas, sino que también te abre las puertas para crear relaciones profundas con personas que tienen al menos una pasión en común contigo. A la mayor parte de ellos los conocí en mis inicios en la olimpiada y verlos crecer y lograr aquello por lo que tanto se han esforzado me causa un sentimiento tan hermoso.

Eventualmente la OMCC llegó y, a pesar de que fui la única niña en el equipo de México, nunca me sentí excluida por Leo, JL e Iker; diría que fuimos una delegación muy unida, incluso alguien nos llegó a decir que éramos prácticamente la misma persona. Recuerdo el primer día de desayuno, un buffet, donde JL y yo nos emocionamos por la idea de ver las típicas bandejas de comida con tapa que ves en cualquier buffet en México, pensando que tendrían chilaquiles en ellas. No pensamos por un pequeño momento que estábamos en El Salvador y que era casi imposible que esas bandejas tuvieran chilaquiles y cuando recordamos dónde estábamos realmente, no pudimos hacer más que reírnos de lo que acababa de pasar.

Con el apoyo de Deni y José Antonio, tuvimos una participación histórica en esta competencia, pues conseguimos tres medallas de oro y una de plata, además de haber conseguido la puntuación como equipo más alta que se ha tenido. Logré conseguir el segundo puntaje más alto de toda la competencia, solo un punto debajo del más alto. Definitivamente, aquí fue donde empecé a sentir que todo iba a comenzar a marchar mejor para mí, pero dos semanas después dejé de creerlo un poco. Mi segunda y última PAGMO llegó y con ella el sueño de lograr una medalla de oro en dicha competencia. Volví a ver a varias niñas que había conocido hace dos semanas y a algunas que había conocido hace casi un año en la Olimpiada Matemática Rioplatense.

Me encantó volver a participar en una competencia femenil, pues, como mencioné antes, es una experiencia totalmente distinta a las mixtas; por ejemplo, aquí Ángela, Bogo (Sofia), Eunice y yo nos tomamos fotos aesthetics frente a un volcán costarricense, cosa que no pasó ni de chiste en la OMCC a pesar de que también nos llevaron a un volcán. Regresando a la competencia, me la pasé muy bien en los exámenes y sentí que me había ido muy, muy bien; sin embargo, es aquí donde me di cuenta de que incluso un pequeño momento de desconcentración te puede costar una medalla. Había hecho una demostración falsa para una parte de uno de mis problemas, y con eso se fueron tres puntos. Esos tres puntos fueron suficientes para dejarme a dos puntos, de nuevo, de obtener la tan deseada medalla de oro.

No podía creer que estuviera pasando de nuevo, pues pensé que cometer ese tipo de errores, después de tantos años de competencias, no era algo que me podía seguir permitiendo a esas alturas del juego. Pasé de sentirme súper orgullosa de mí a sentirme decepcionada de mí, en tan solo dos semanas. Myriam y Kenya, nuestras líderes, estuvieron para mí en ese momento tan complicado. Myriam me dijo algo del estilo de que todos cometemos errores, que es humano cometer errores, pero yo seguía en mi posición de que no debería seguir permitiéndome cometer ese mismo tipo de errores una y otra vez. No podía hacer más que aprender de mi error y hacer todo lo posible para intentar no cometerlo en el futuro.

Meses después fue la OMM en Durango, cosa que me causó mucha ilusión, ya que todos mis nacionales habían sido o en línea o en Morelos. Tuvimos un entrenamiento previo que recuerdo con mucho cariño, pues Alka y Zaida, ex-olímpicas de Morelos, nos entrenaron. Diría que esta fue mi OMM favorita, no solo por el cambio de ambiente, sino porque pienso que la delegación de ese año fue, y sigue siendo, bastante unida. Kmi (Cami), Yhel, Ale, Charlie y Leo me dieron una OMM inolvidable que disfruto mucho recordar. Volví a reencontrarme con amigos como Elías, Franco, Nat y Sofi que me recordaron qué es lo más valioso que nos deja la olimpiada: los amigos. Hice algunas otras amistades también, como Eka, Said y Osva, por mencionar a algunos.

Las coordinaciones, cuando nuestros delegados pelean por nuestros puntos, llegaron; y junto con ellas salió a la luz el error más chistoso de mi vida olímpica: ese error que no te hace sentir precisamente mal que lo hayas cometido, pues aunque es triste, no puedes hacer nada más que reírte. En una de las hojas de mi examen estaba claramente escrito que una variable entera debía ser necesariamente 1 solo porque 1 era divisor de dicha variable. Creo que podrán ver lo absurdo que fue eso y, como solo me costó 1 punto, lo considero el error más chistoso que he hecho, pero de nuevo, fue fruto de una desconcentración, pues no me di cuenta ni cuando lo escribí ni en ninguna de las múltiples veces que lo leí. Otro factor por el cual esta OMM es mi favorita es porque aquí conseguí mi primera medalla de oro en esta olimpiada, siendo la niña con el puntaje más alto y una de las únicas dos en conseguir dicha presea dorada. Con esto llegó otra preselección para EGMO y también para la IMO; no podía haber estado más feliz que en ese momento.

Después de 4 meses llenos de entrenamientos y exámenes selectivos, llegó una buena y una mala noticia. La buena: volví a obtener la primera posición para la delegación EGMO; la mala: mi camino rumbo a la IMO había terminado. No era algo que no viera venir, pues había pasado momentos algo difíciles durante los días de entrenamiento y selección, así que ese duelo ya lo había tenido mucho antes de que me lo confirmaran, pero igual el momento donde te lo dicen duele igual que cuando comienzas a verlo venir. Esta noticia me llegó una semana antes de la EGMO, por lo que decidí ponerla de lado y concentrarme en la olimpiada que se aproximaba.

Un día antes de nuestro viaje, después de pasar un rato en la Carrera de Pi de la UNAM con Lalo y Lupita, decidimos divertirnos un poco, y esa diversión terminó, de alguna manera, en una visita nocturna al hospital. Mamá Vicky, Myriam y Lalo Gnz estuvieron conmigo toda mi estancia y yo solo recuerdo que es el momento donde más me he reído en toda mi vida. Estaba muerta de miedo, claro que sí, pero no podía hacer más que reírme y llorar cuando el doctor examinaba mi tobillo. Después de unas horas, nos dijeron que tendría que usar una bota por al menos 3 semanas, así que tendría que viajar con esa bota hasta el otro lado del mundo.

Fue una anécdota muy interesante, y gracias a mi asistencia de movilidad, Myriam y yo pasábamos súper rápido por los controles de seguridad en los aeropuertos. De camino a Georgia me enfermé, y aunque esperaba que fuera algo pasajero, esa bacteria llegó para quedarse un buen rato. Puesto que para llegar al salón designado para la realización de los exámenes debía subir escaleras, me designaron un salón aparte.

Al momento me agradó tener un pequeño salón para mí solita, pero extrañé el momento de la EGMO 2023 donde, al mirar a cualquier lado, podía ver a una niña haciendo lo que más le gusta. No me la pasé del todo bien en los exámenes; aunque los disfruté, la enfermedad degradó la experiencia de los mismos. Pronto me di cuenta de que las actividades no eran del todo adecuadas para mí, y mientras las demás jugaban algún deporte o aprendían bailes tradicionales, yo decoraba tazas y hacía jabones. No digo que no fuera divertido, me encantó hacer dichas actividades, pero me hubiera gustado poder haber pasado más tiempo con el resto de la delegación.

A pesar de todo, pude conseguir una medalla de bronce, a tan solo un punto de la plateada. Me hizo sentir muchas cosas: felicidad, decepción, orgullo y más. No era el resultado que tenía en mente, no cumplí mis expectativas, pero después recordé que dichas expectativas las creé sin considerar todas las otras situaciones que tuve que pasar. Lo que más me gusta de viajar a países nuevos es conocer las ciudades y sobre la historia de dicho país, así que disfruté mucho mi patoaventura con Myriam a Kutaisi.

A mi regreso de Georgia fui a Guanajuato a otro entrenamiento, y aunque ya no contaba como proceso selectivo para mí, fue uno que disfruté mucho entrenando con Leo, Emi y Ansolo. Poder convivir una vez más con las personas que más admiro y aprecio fue algo que alivió la decepción que acababa de vivir y me hizo recordar que la olimpiada no son sólo los resultados que obtenemos, sino también los amigos que hacemos en el camino.

Meses después fue mi último Concurso Nacional Femenil de la OMM y, aunque ya no podía ser parte de la preselección para la internacional, me divertí mucho e intenté pasarla lo mejor posible en los exámenes, por lo que decidí hacer una historieta como solución a uno de los problemas, como mismo hice en la Femenil anterior. Este nacional fue una oportunidad para aprender más de Lau, Alets y Víctor, nuestros líderes; conectar y conocer más a Eunice y Vale; y poder ser una vez más testigo de que cuando las mujeres tenemos acceso a las herramientas, siempre podemos triunfar.

Los entrenamientos continuaron y las ganas de mejorar crecieron, y en el mes de noviembre, participé en el nacional de la OMM. Aunque en Oaxtepec, de nuevo, me divertí mucho. Aprendí que lo más importante es disfrutar los exámenes y, a pesar de que estuve más de 3 horas en un solo problema, no podía dejar de reír, por lo que para mí fue una experiencia muy divertida.

Después de días de alberca, búsquedas del tesoro, aventuras por el andador ecológico y litros de Tepoznieves, llegó la noche de cortes. Estábamos todos en la cena en el momento en el que vimos a los delegados salir del salón de juntas. Leo y yo corrimos en busca de los nuestros y les hicimos la pregunta del millón: “¿Sí llegué al oro?.En los exámenes cometí varios errores que me costaron muchos puntos, por lo que la respuesta era incierta. No vimos a Richi, por lo que Charlie y Bruno procedieron a decir al unísono: “No”. De repente todo se paró; estaba en shock. A pesar de que ya sabía que era un posible escenario, claro que no estaba lista para afrontarlo. Ambos preguntamos: “¿Es en serio?”, a lo que recibimos un sí. Ninguno sabía qué más decir o qué hacer; solo nos quedamos viendo a nuestros delegados con incredulidad. Volvimos a preguntar: “¿No es una broma?”, aún sin poder entender todavía qué estaba pasando, pues literalmente ambos estábamos en modo tieso.

Por unos minutos que parecieron horas, se derrumbaron mis metas y expectativas; no sabía ni siquiera cómo sentirme. Al ver que estábamos al borde del colapso, Charlie por fin dijo lo que tanto deseábamos oír: “Es broma, sí sacaste oro” Literalmente todo recobró su color y una felicidad muy fuerte surgió dentro de mí, pues logré lo que tanto anhelaba. Poco después supe que fui la única niña que logró conseguir la presea dorada, haciendo a este logro uno más importante para mí. Gracias a esto, me encuentro nuevamente preseleccionada para la EGMO y para la IMO.

Puedo describir mi experiencia olímpica con demasiadas palabras, pero creo que las que más resuenan son resiliencia, comunidad y crecimiento. La olimpiada de matemáticas ha sido mucho más que un lugar para competir; ha sido el espacio donde descubrí lo que soy capaz de lograr y donde viví algunos de los momentos más importantes de mi vida. Me ha enseñado que los retos no se superan solo con talento, sino con esfuerzo constante, disciplina y las ganas de siempre mejorar. Aquí aprendí que las derrotas no te definen y que cada tropiezo es una oportunidad para levantarte más fuerte.

Pero más allá de las medallas o los resultados, la olimpiada me dejó algo mucho más valioso: personas increíbles. Amigos que se han convertido en familia, entrenadores que creyeron en mí incluso cuando yo misma lo dudaba, y una comunidad que siempre me impulsó a dar lo mejor. Las risas, las largas horas de entrenamiento, los juegos y las noches compartidas me enseñaron que lo más importante no siempre está en los logros, sino en esas conexiones que hacemos en el camino.

La olimpiada me regaló la oportunidad de crecer no solo como estudiante, sino también como persona. Cada competencia, cada entrenamiento y cada momento de frustración me han ayudado a construir la mejor versión de mí misma, una versión que aún sigue soñando en grande y que sabe que todo lo que vale la pena requiere dedicación.

Por último, quiero agradecer a todas las personas que mencioné a lo largo de estas hojas y a todas aquellas que han sido parte de mi camino en la olimpiada y fuera de ella. A mis entrenadores, por su constancia y guía constante; a mis amigos, por todas las risas y apoyo incondicional; a Jaky, que siempre ha estado para ayudarme a no morir académicamente en la escuela; a mi familia, que ha creído en mí y me ha apoyado en cada paso de este camino; a todas las personas que de alguna forma han contribuido a que yo siga avanzando, gracias por su apoyo, su tiempo y sus palabras. Cada uno de ustedes ha dejado una huella en mi vida, y no puedo estar más agradecida por todo lo que han hecho por mí. Mi camino no habría sido posible sin ustedes.

Imelda Mayrlandia Flores Vazquez

Exolímpica de San Luis Potosí

Mi nombre es Imelda Mayrlandia Flores Vazquez. Actualmente trabajo como asesora en ciencias de datos en la empresa estadounidense The Cigna Group, una de las 40 empresas más grandes a nivel mundial. Vivo en en el area metropolitana de Seattle, Washington en Estados Unidos con mi esposo, hijo e hija.

Descubrí que existía la olimpiada de matemáticas al entrar al bachillerato, gracias a mi maestra Isabel Cristina Martinez Alvarado y participé en la olimpiada por dos años durante mis estudios de bachillerato. La primera vez que participé, no quedé ni entre los finalistas de mi región, pero me gustó mucho trabajar con la maestra en los problemas. Eran problemas muy diferentes a todo lo que me había tocado ver en mi educación y aunque nadie me lo dijo abiertamente yo sentía que trabajar en esos problemas era bueno para mi formación académica y para mi futuro profesional ademas de que me gustaba ejercer la creatividad que necesitaban esos problemas.

En mi segunda participación, logre medalla de bronce en la olimpiada mexicana de matemáticas (OMM) representando al estado de San Luis Potosí. No es exageración decir que ese fue un logro y una experiencia que definieron mi vida. Todavía hoy, décadas después de haber participado en la olimpiada, me defino como olímpica y hablo de mi experiencia hasta con mis hijos y con sus amigos.

Hubo varias razones por las que mi experiencia en las olimpiadas tuvo ese gran impacto en mi vida. Primero, desde que empecé a practicar problemas de olimpiada con estudiantes a nivel estatal me di cuenta de la diferencia de recursos que tenían mis compañeros comparado con los que tenía yo. Soy originaria de un municipio (Cedral) al norte de mi estado, lejos de la capital y cuya cabecera municipal solo cuenta con alrededor de 10 mil habitantes actualmente, era mas chico cuando yo vivía allí.

En términos económicos yo tampoco contaba con muchos recursos e iba a un bachillerato publico. Esto significaba que en términos de conocimientos generales y experiencias de vida había grandes diferencias entre mis compañeros de la olimpiada y yo. Esas diferencias eran intimidantes pero al mismo tiempo mi intuición me decía que participar en la olimpiada era una gran oportunidad y seguí adelante aun con mis miedos. Entonces, lograr una medalla de bronce en la OMM cambió completamente mi perspectiva. Me convenció que era posible superar las posibles deficiencias en mi educación y experiencias de vida y esa convicción se ha quedado conmigo impulsandome en lo profesional y en lo personal por el resto de mi vida.

La otra razón por la que le la olimpiada tuvo un gran impacto en mi vida profesional fue la invitación que recibí ese año para solicitar admisión a la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Guanajuato. Tengo la gran bendición de ser graduada de la universidad de Guanajuato así como tener un posgrado en matemáticas del Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT).

La primera parte de esa bendición fue tener las becas de licenciatura y maestría para completar mis estudios, pues yo no tenía forma de estudiar lejos de casa sin el apoyo financiero que representaron esas becas. La segunda parte fue tener contacto con los profesores del departamento de matemáticas de la universidad y del CIMAT.

Mis profesores me enseñaron matemáticas en todo el sentido, no solo teoremas y definiciones, sino también “como pensar”, básicamente una forma de ver los problemas, incluso los de la vida, de forma metódica, con lógica pero también con creatividad. Es una forma de abordar los problemas que empecé a ver durante mi experiencia olímpica y que solidifiqué en la licenciatura y posgrado.

Aun hoy, décadas después, mis colegas y superiores me comentan sobre mi forma lógica pero única de resolver problemas profesionales. Yo creo que esta forma de abordar los problemas es lo que yo intuía en mis principios como olímpica que me iba a servir en el futuro incluso si no llegaba a ser matemática de profesión.

Mis profesores de la licenciatura y maestría también me apoyaron inmensamente en lo personal para decidirme a hacer un doctorado en el extranjero. Hice mi doctorado en economía en la Universidad de Nueva York. El resto de mi historial profesional ha ocurrido en diferentes partes de Estados Unidos. He trabajado en el sector publico para gobiernos estatales también el gobierno federal estadounidense así como para el sector privado como actualmente lo hago. Me dedico principalmente a usar econometría (estadística y economía) para estimar el impacto de políticas publicas o iniciativas del sector privado. He tenido muchas satisfacciones profesionales por ejemplo:

- Estimar el costo y beneficio de proveer leche materna donada para bebes extremadamente prematuros y así lograr el cambio en la política de cobertura de leche materna donada

- Estimar el impacto positivo de un programa donde se usan enfermeras para apoyar a pacientes via telefónica y así lograr la continuación del programa.

- Estimar el impacto real de un modelo de aprendizaje de computadora para identificar clientes antes de que a estos les recomienden el producto y así lograr la expansion del uso del modelo para identificar clientes.

Para mí ha sido un largo camino desde aquella estudiante de bachillerato publico en un pueblo pequeño y de escasos recursos a donde estoy ahora. Algunas personas de mi actual ambiente me preguntan cómo logré tener una historia tan improbable, y mi respuesta siempre es: todo empezó con mi maestra de bachillerato y la olimpiada de matemáticas.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** Si a y b son números enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = a \cdot q$ para algún número entero q; lo anterior se denota por $a \mid b$.

Definición 2 (Congruencias)**.** Dados dos números enteros a, b y un número entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** Sean a, b, c, d, m números enteros con $m \geq 1$.

1. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.
2. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + b \equiv c + d \pmod{m}$.
3. Si $a \equiv c \pmod{p}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.
4. Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo número entero positivo n.
5. Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{\operatorname{mcd}(b,m)}}$ donde $\operatorname{mcd}(b, m)$ denota el máximo común divisor de b y m.

Teorema 2 (Pequeño teorema de Fermat)**.** Si p es un número primo y a es un número entero coprimo con$p$ (*i.e.*, $\operatorname{mcd}(a, p) = 1$), entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema 3 (Inducción)**.** El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo número entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un número entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:

1. Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.

2. Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ donde $k \geq k_0$ es un número entero fijo (pero arbitrario).

3. Paso de inducción: Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo número entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las casillas). Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.

Teorema 5 (Combinaciones). Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio de Newton). Para a y b números reales cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no negativos, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

Teorema 9 (Pitágoras). En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Definición 3 (Congruencia de triángulos). Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.

Teorema 10 (Criterio de congruencia LLL)**.** Si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.

Teorema 11 (Criterio de congruencia ALA)**.** Si tenemos dos triángulos con un lado igual y los respectivos ángulos adyacentes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales (es decir, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$ y $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$) y sus lados homólogos son proporcionales (esto es, si $AB/A'B' = BC/B'C' = CA/C'A'$).

Teorema 12 (Criterio de semejanza AA)**.** Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.

Teorema 13 (Tales)**.** Si ABC es un triángulo y D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Teorema 14 (Teorema de la bisectriz)**.** Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Teorema 15 (Ceva)**.** Dado ABC un triángulo y L, M y N puntos sobre los lados (o extensiones de éstos) BC, CA y AB, respectivamente, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.

Teorema 16 (Menelao)**.** Dado un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común sobre la circunferencia.

2. Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente a la circunferencia en el punto de tangencia.

3. Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 17 (Medida del ángulo inscrito)**.** La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 18 (Medida del ángulo seminscrito)**.** La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.

Teorema 19 (Potencia de un punto)**.**

1. Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersecan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.

Teorema 20 (Cuadrilátero cíclico)**.** Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de cualquiera de sus pares de ángulos opuestos es igual a 180°, esto es,

$$\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180^\circ.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades, 5^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2014.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría - Ejercicios y problemas, 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado; 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas, 2^a ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2014.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada, 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers.* John Wiley & Sons, Inc., 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria, 3ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2005.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2019.

[14] M. L. Pérez Seguí (con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez). *Matemáticas preolímpicas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números, 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Guadalupe Russell Noriega
(Presidente)

César Guadarrama Uribe
Claudia Marcela Aguilar Hernández
David Guadalupe Torres Flores
Enrique Treviño López
Héctor Raymundo Flores Cantú
Hugo Villanueva Méndez
Ignacio Barradas Bribiesca
José Eduardo Cázares Tapia
José Omar Guzmán Vega
Kenya Verónica Espinosa Hurtado
Kevin William Beuchot Castellanos
Luis Eduardo García Hernández
Luis Mauricio Montes de Oca Mena
María Eugenia Guzmán Flores
María Luisa Pérez Seguí
Mónica Mateos Vega
Myriam Hernández Ketchul
Rosa Victoria Rodríguez Olivé
Sergio Guzmán Sánchez

SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864