ISSN 2954-4971

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

17 • 03

Información legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS (Año 17, No. 3, Octubre de 2025) es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A. C.

Dirección: Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Del. Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México.
Tel.: 55-5849-6709
Email: smm@smm.org.mx
Sitio web: https://www.smm.org.mx
Editor responsable: Pedro David Sánchez Salazar.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Los contenidos e imágenes de Tzaloa pueden ser reproducidos y utilizados, citando apropiadamente y otorgando el crédito correspondiente a la publicación y a la Sociedad Matemática Mexicana.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Año 2025, No. 3

Comité Editorial:

Francisco Eduardo Castillo Santos
Myriam Hernández Ketchul
José Hernández Santiago
Pedro David Sánchez Salazar

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán, C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
https://www.ommenlinea.org

Editor en jefe:
Pedro David Sánchez Salazar

Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
Mérida, Yucatán C.P. 97203
Correo de contacto: revistaomm@gmail.com

Diseño de la portada: La imagen que aparece en la portada de este número de TZALOA es de la autoría de Michael Sterling Helso. La imagen se ha usado con la respectiva autorización del artista.

Octubre de 2025

Índice general

Presentación **v**

El criterio lado-ángulo-lado y la semejanza en espiral **1**

Problemas de práctica **16**
Problemas de práctica 16
Soluciones a los problemas de práctica 18

Problemas de entrenamiento **24**
Problemas de entrenamiento (Año 2025, No. 3) 24
Soluciones a los problemas de entrenamiento (Año 2024, No. 3) 25

9.º Concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica **35**
Prueba Individual, Nivel I 37
Soluciones de la prueba individual, nivel I 40

Competencia Internacional de Matemáticas 2025 **45**

Olimpiada Internacional de Matemáticas 2025 **56**

Voces de la comunidad olímpica **69**
Itzel Cano Rivas (GTO) 70

Apéndice **74**

Bibliografía **78**

Presentación

Tzaloa*, la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral auspiciada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que gusta de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemáticas simples y elegantes, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

México y las olimpiadas de matemáticas

La Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) desde los albores de ésta. Este programa sólo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el análisis, la creatividad matemática y el pensamiento crítico.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido en el desarrollo científico del

*Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

El criterio lado-ángulo-lado y la semejanza en espiral

Carlos Yeddiel Cortés Ruelas

Introducción

La semejanza de triángulos es un tema fundamental en geometría siendo uno de los primeros temas con los que nos encontramos en la Olimpiada. El criterio de semejanza más conocido y el que solemos encontrar es el criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo: Si dos triángulos tienen tres pares de ángulos iguales, entonces los triángulos son semejantes entre sí. Sin embargo, este no es el único criterio de semejanza de triángulos, y conocer y saber manejar el siguiente criterio puede marcar una gran diferencia en la Olimpiada:

Teorema 1. *Sean ABC y $A'B'C'$ triángulos tales que $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y*

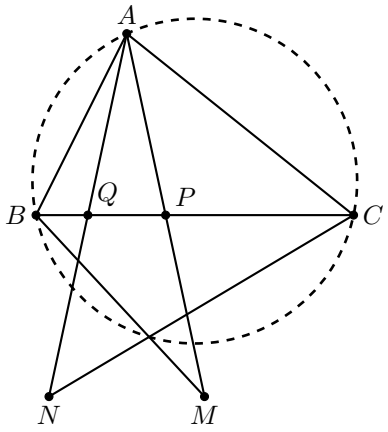
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Entonces los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

El propósito de este texto es familiarizar al lector con este criterio de semejanza. Dedicamos además una sección sobre *semejanza en espiral*, un caso particular de semejanza que puede ser demostrado con trabajo de ángulos o con el criterio Lado-Ángulo-Lado.

El criterio lado-ángulo-lado

Problema 1 (IMO 2014)**.** Los puntos P y Q están en el lado BC del triángulo acutángulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Los puntos M y N están en las rectas AP y AQ, respectivamente, de modo que P es el punto medio de AM, y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se cortan en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.



Demostración. Notamos que en los triángulos ABC y PBA tenemos que $\angle ABC = \angle PBA$ y $\angle BAP = \angle BCA$, así que ABC y PBA son semejantes. Análogamente los triángulos ABC y QAC son semejantes. En consecuencia

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{QC}{AQ}.$$

Como P y Q son los puntos medios de AM y AN respectivamente, entonces $AP = PM$ y $AQ = QN$. Entonces la igualdad de razones anterior implica que

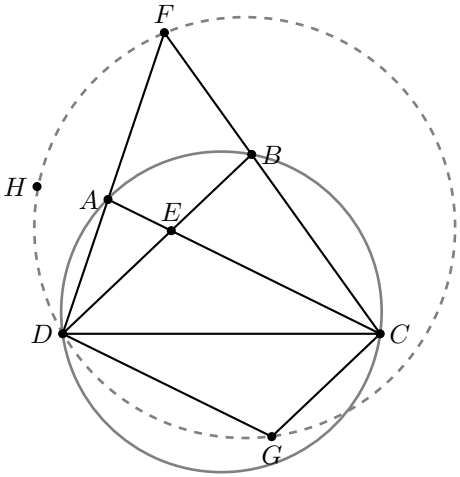
$$\frac{PM}{PB} = \frac{AP}{PB} = \frac{QC}{AQ} = \frac{QC}{QN}.$$

Además, como $\angle APQ = \angle BAC = \angle PQA$, se tiene que sus ángulos suplementarios son iguales. Es decir, $\angle BPM = \angle CQN$. El criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado nos indica entonces que los triángulos BPM y NQC son semejantes. En particular, esto implica que $\angle QCN = \angle PMB$. Entonces

$$\begin{aligned}\angle ACN + \angle MBA &= \angle ACB + \angle QCN + \angle MBP + \angle CBA \\ &= \angle ACB + \angle PMB + \angle MBP + \angle CBA \\ &= \angle ACB + \angle BAC + \angle CBA \\ &= 180^\circ.\end{aligned}$$

La conclusión se sigue. □

Problema 2 (ISL 2012)**.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD se cortan en E. Los rayos DA y CB se cortan en F. Sea G un punto tal que $ECGD$ es un paralelogramo, y sea H la reflexión de E respecto a AD. Muestra que D, H, F y G son concíclicos.



Demostración. Como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces $\angle FBA = \angle FDC$ y $\angle BAF = \angle DCF$, así que los triángulos FBA y FDC son semejantes. Análogamente, como $ABCD$ es cíclico entonces $\angle EBA = \angle ECD$ y $\angle CDE = \angle BAE$, por lo que los triángulos EBA y ECD son semejantes. Así que

$$\frac{FB}{FD} = \frac{BA}{DC} = \frac{BE}{CE}.$$

Como $DECG$ es un paralelogramo entonces $CE = DG$. Sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos

$$\frac{FB}{FD} = \frac{BE}{CE} = \frac{BE}{DG}.$$

Observamos que al ser $ABCD$ cíclico se tiene $\angle DAC = \angle DBC$. Luego

$$\angle FBE = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - \angle DAC.$$

Por otro lado, por la suma de ángulos internos en el triángulo ADC

$$180^\circ - \angle DAC = \angle CDA + \angle ACD.$$

Como $ECGD$ es un paralelogramo entonces $\angle ACD = \angle GDC$. Así que

$$\angle CDA + \angle ACD = \angle CDA + \angle GDC = \angle FDG.$$

De las igualdades anteriores obtenemos que $\angle FBE = \angle FDG$.

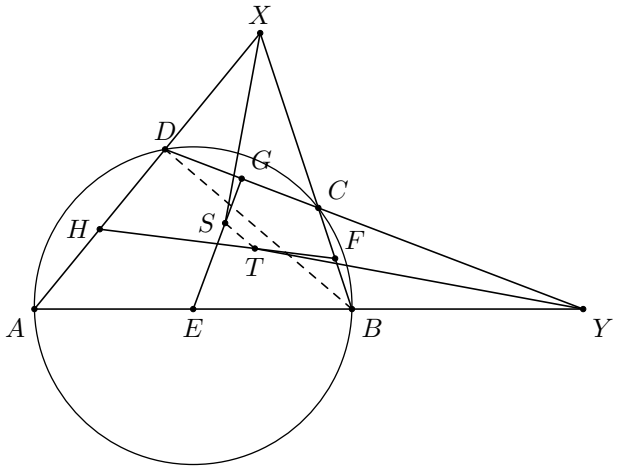
Como ya vimos $FB/FD = BE/DG$. De lo anterior, el criterio Lado-Ángulo-Lado indica que los triángulos FBE y FDG son semejantes. En particular $\angle BEF = \angle DGF$.

Como H es la reflexión de E respecto a AD entonces $\angle DHF = \angle DEF$. Así que

$$\angle DHF + \angle DGF = \angle DEF + \angle BEF = 180^\circ.$$

Entonces dos de los ángulos opuestos del cuadrilátero $DHFG$ suman 180°, por lo que este es cíclico. □

Problema 3 (Japón, 2016)**.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $AB : AD = CD : CB$. La línea AD intersecta a la línea BC en X, y la línea AB intersecta a la línea CD en Y. Sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. La bisectriz del ángulo $\angle AXB$ intersecta al segmento EG en S, y la bisectriz del ángulo $\angle AYD$ intersecta al segmento FH en T. Muestra que las líneas ST y BD son paralelas.



Demostración. Como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces $\angle BAX = \angle DCX$ y $\angle XBA = \angle XDC$. Así que los triángulos XAB y XCD son semejantes y por lo tanto $XA/XC = AB/CD$. Como E y G son los puntos medios de AB y CD respectivamente, entonces $AB = 2AE$ y $CD = 2CG$. Sustituyendo en la igualdad de razones anterior obtenemos

$$\frac{XA}{XC} = \frac{AB}{CD} = \frac{2AE}{2CG} = \frac{AE}{CG}.$$

Ya mencionamos que $\angle BAX = \angle DCX$, o bien que $\angle EAX = \angle GCX$. Por el criterio Lado-Ángulo-Lado se sigue que los triángulos XAE y XCG son semejantes.

La semejanza anterior implica que $\angle EXA = \angle GXC$. Como XS es bisectriz del ángulo AXC, lo anterior indica que XS es bisectriz del ángulo $\angle EXG$. Por el Teorema de la bisectriz se sigue que $ES/SG = XE/GX$. Además por la semejanza de XAE y XCG tenemos que $XE/XG = AE/GC$. Así que

$$\frac{ES}{SG} = \frac{XE}{GX} = \frac{AE}{GX} = \frac{AB/2}{CD/2} = \frac{AB}{CD}.$$

Análogamente obtenemos que los triángulos YBF y YDH son semejantes y que YT se bisectriz del ángulo $\angle HYF$. En consecuencia y de manera análoga

$$\frac{HT}{TF} = \frac{HY}{YF} = \frac{HD}{FB} = \frac{DA/2}{BC/2} = \frac{DA}{BC}.$$

Por hipótesis $AB : CD = DA : BC$, entonces

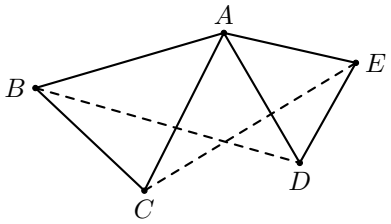
$$\frac{ES}{SG} = \frac{AB}{CD} = \frac{DA}{BC} = \frac{HT}{TF}.$$

Por el Teorema de Varignon sabemos que EH y GF son paralelas entre sí, y paralelas a BD. Por esto y como $ES/SG = HT/TF$, el Teorema de Tales nos indica que TS es paralela a EH y GF, y por tanto paralela a BD. □

Semejanza en espiral

Un caso que nos interesa en particular es cuando dos triángulos semejantes comparten un vértice.

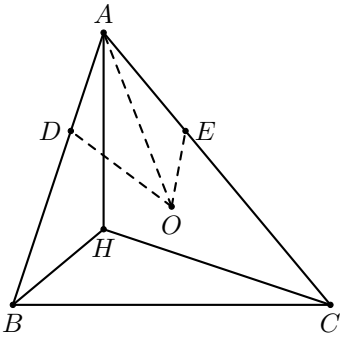
Proposicion 1. *Supongamos que los triángulos ABC y ADE son semejantes. Si ABD es un triángulo, entonces es semejante al triángulo ACE.*



Decimos que A es el centro de **semejanza en espiral** que manda BC a DE y BD a CE.

Demostración. Como los triángulos ABC y ADE son semejantes entonces $AB/AD = AC/AE$. Además $\angle BAC = \angle DAE$, por lo que $\angle BAD = \angle CAE$. Por el criterio Lado-Ángulo-Lado esto implica que los triángulos ABD y ACE son semejantes. □

Problema 4. Sean H y O el ortocentro y circuncentro respectivamente, del triángulo acutángulo ABC. La mediatriz de AH corta a AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Muestra que $\angle DOA = \angle EOA$.

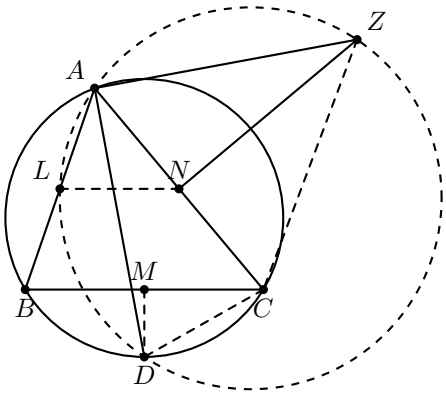


Demostración. Observamos que $\angle OAC = 90° - \angle ABC = \angle BAH$. Además $DA = DH$ y $OA = OC$. Entonces los triángulos ADH y AOC son semejantes. Entonces A es el centro de semejanza en espiral que manda DH en OC, y por lo tanto manda DO en HC; más aún, los triángulos ADO y AHC también son semejantes. Entonces $\angle DOA = \angle ACH$. Análogamente obtenemos que $\angle EOA = \angle HBA$. Como $\angle ACH = 90° - \angle BAC = \angle HBA$, se sigue que

$$\angle DOA = \angle ACH = \angle HBA = \angle EOA.$$

□

Problema 5 (APMO 2017)**.** Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$. Sea D el punto de intersección de la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$ y el circuncírculo de ABC. Sea Z el punto de intersección de la mediatriz de AC y la bisectriz externa del ángulo $\angle BAC$. Demuestra que el circuncírculo del triángulo ADZ pasa por el punto medio del lado AB.



Demostración. Sean M, N y L los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Como $ABDC$ es cíclico y DA es bisectriz del ángulo $\angle BAC$ tenemos que

$$\angle DBC = \angle DAC = \angle BAD = \angle BCD.$$

Entonces $BD = DC$. Como M es punto medio de BC entonces $\angle DMC = 90^\circ$ y $\angle MDC = 90^\circ - \angle MCD = 90^\circ - \angle DAC$. Observamos que al ser Z un punto en la mediatriz de AC se tiene que

$$\angle ZCA = \angle ZAC = 90^\circ - \angle DAC$$

donde esta última igualdad se tiene ya que ZA es biesctriz externa del ángulo $\angle BAC$. Además al ser N el punto medio de AC se tiene que $\angle ZNC = 90^\circ$. Entonces los triángulos ZNC y CMD tienen dos pares de ángulos iguales, por lo que son semejantes. En consecuencia

$$\frac{ZC}{CD} = \frac{ZN}{CM}.$$

Como L y N son puntos medios de AB y AC respectivamente, por el Teorema de Tales tenemos que los triangulos ALN y ABC son semejantes. Más aún, $LN/BC = AL/AC = 1/2$. Entonces $LC = BC/2 = MC$. Por lo tanto

$$\frac{ZC}{CD} = \frac{ZN}{CM} = \frac{ZN}{LN}.$$

Notamos que por un lado

$$\angle LNZ = \angle LNA + \angle ANZ = \angle ACB + 90^\circ.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\angle DCZ &= \angle MCD + \angle ACB + \angle NCZ \\ &= \angle CAD + \angle ACB + (90^\circ - \angle CAD) = \angle ACB + 90^\circ.\end{aligned}$$

Así que $\angle LNZ = \angle DCZ$. Ya vimos que $ZC/CD = ZN/LN$, entonces por el criterio Lado-Ángulo-Lado tenemos que los triángulos ZNL y ZCD son semejantes. Así que Z es el centro de semejanza en espiral que manda LN en DC, y manda LD en NC. Más aún, los triángulos ZLD y ZNC son semejantes y por lo tanto

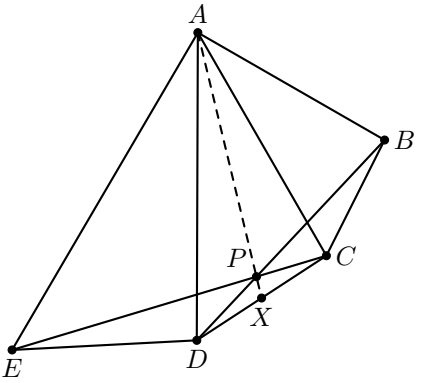
$$\angle ZLD = \angle ZNC = 90^\circ.$$

Finalmente observamos que $\angle ZLD = 90^\circ = \angle ZAD$, por lo que $ALDZ$ es un cuadrilátero cíclico. □

Problema 6 (ISL 2006)**.** Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \qquad \text{y} \qquad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Las diagonales BD y CE se cortan en P. Demuestra que la línea AP bisecta al lado CD.



Demostración. Sea X el punto de intersección de AP con CD. Como $\angle BAC = \angle DAE$ y $\angle ABC = \angle ADE$ entonces los triángulos ABC y ADE son semejantes. Entonces A es el centro de semejanza en espiral que manda DE a BC, y por tanto manda CE a BD; más aún, los triángulos ACE y ABD son semejantes. Así que $\angle ABP = \angle ACP$, lo que implica que $ABCP$ es un cuadrilátero cíclico. Además como $\angle ABC = \angle ACD$ se sigue que

$$\angle PCX = \angle ACX - \angle ACP = \angle ABC - \angle ABP = \angle PBC.$$

Entonces la línea XC es tangente al circuncírculo del triángulo PBC, es decir, al circuncírculo del cuadrilátero $ABCP$. Por potencia de un punto se tiene que

$$XC^2 = XP \cdot XA.$$

Análogamente obtenemos que $\angle AEP = \angle ADP$, por lo que $AEDP$ es un cuadrilátero cíclico. De la misma manera, como $\angle ADC = \angle AED$ se sigue que $\angle XDP = \angle DEP$. Entonces XD es tangente al circuncírculo del cuadrilátero $AEDP$. Por potencia de un punto obtenemos

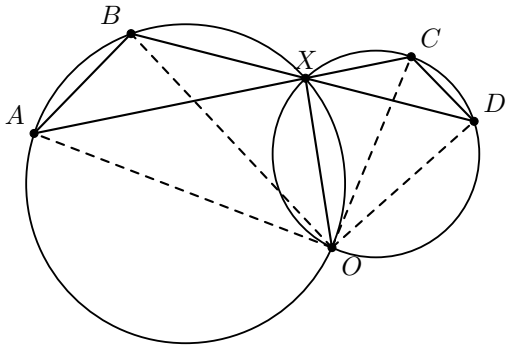
$$XD^2 = XP \cdot XA.$$

Así que $XD^2 = XP \cdot XA = \cdot XC^2$. Luego $XD = XC$ como se quería demostrar. □

Más semejanza en espiral y el punto de Miquel

Presentamos una última herramienta sobre semejanza en espiral que nos será útil.

Lema 1. *Sean A, B, C y D puntos tales que AC y BD se intersectan en el punto X. Los circuncírculos de los triángulos ABX y CDX se intersectan por segunda vez en O. Entonces O es el centro de semejanza en espiral que manda AB a CD, y por tanto AC a BD.*



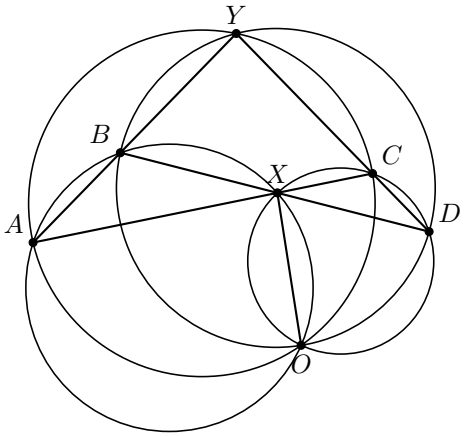
Demostración. Como $ABXO$ es cíclico entonces $\angle OAB = \angle OXD$. Como $OXCD$ es cíclico entonces $\angle OXD = \angle OCD$. En consecuencia $\angle OAB = \angle OCD$. Análogamente obtenemos

$$\angle OBA = \angle OXA = \angle ODC.$$

Entonces los triángulos OAB y OCD tienen dos pares de ángulos iguales, por lo que son semejantes. □

El resultado anterior nos sugiere que si las líneas AB y CD se intersectan en un punto Y, entonces los circuncírculos de los triángulos BDY y ACY deben definir el mismo centro de rotohomotecia O. En efecto esto es cierto.

Lema 2 (Miquel)**.** *Sean A, B, C y D puntos tales que AC y BD se intersectan en el punto X, y AB y CD se intersectan en el punto Y. Entonces los circuncírculos de los triángulos ABX, CDX, BDY y ACY comparten un mismo punto llamado el punto de Miquel del cuadrilátero $ABCD$.*



Demostración. Como antes, sea O el punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos ABX y CDX. Notamos que $\angle YCA = \angle DOX$ y $\angle XAB = \angle XOB$. Entonces

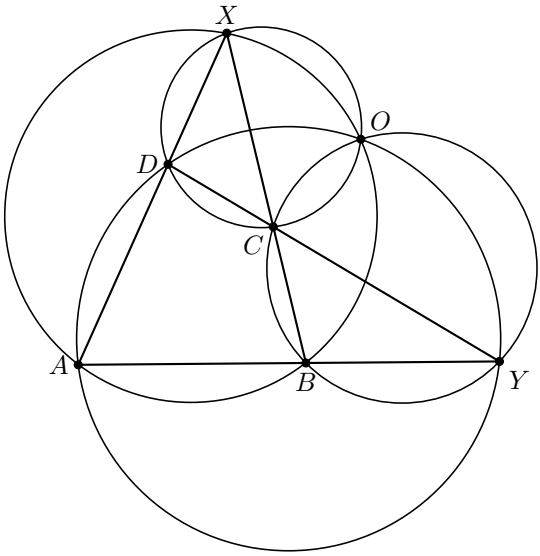
$$\begin{aligned}\angle AYC &= 180^\circ - \angle YCA - \angle CAY \\ &= 180^\circ - \angle DOX - \angle XOB \\ &= 180^\circ - (\angle DOX + \angle XOB) \\ &= 180^\circ - \angle DOB.\end{aligned}$$

Entonces $BODY$ es cíclico. Análogamente notamos que

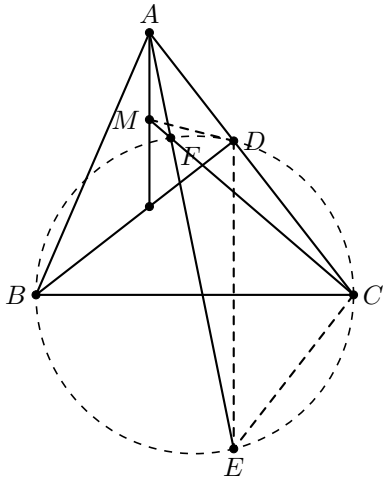
$$\angle COA = \angle DOB = 180^\circ - \angle AYC.$$

Así que $AOCY$ es cíclico. □

Es importante tener cuidado con la forma en la que aparecen los vértices, pues esto afecta como se ve la figura. Podriamos por ejemplo tener el siguiente diagrama.

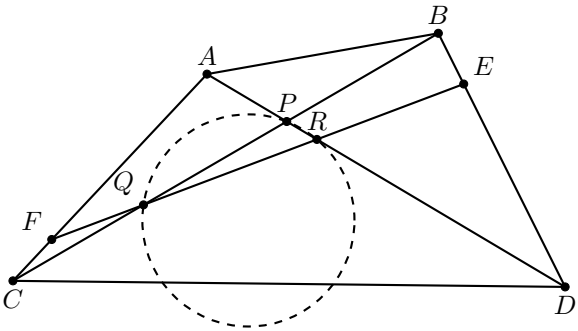


Problema 7 (OMM 2019)**.** Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y sea M el punto medio de AH. La línea BH corta a AC en D. Sea E un punto tal que BC es la mediatriz del segmento DE. Los segmentos CM y AE se cortan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.



Demostración. Notamos que $\angle MAD = 90° - \angle ACB = \angle EDC$. Además $MA = MD$ y $CD = CE$. Entonces los triángulos DCE y DMA son semejantes. El centro de semejanza D en espiral que manda CE a MA. Lo anterior implica que F, el punto de intersección de CM y AE, está en el circuncírculo de DCE y MAD. En particular, como el circuncírculo del triángulo DCE es la circunferencia de diámetro BC, se sigue que $\angle BFC = 90°$. □

Problema 8 (IMO 2005)**.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cuyos lados BC y AD tienen la misma longitud y no son paralelos. Sean E y F puntos en los segmentos BC y AD respectivamente tales que $BE = DF$. Las líneas AC y BD se cortan en P, las líneas BD y EF se cortan en Q, las líneas EF y AC se cortan en R. Considera todos los triángulos PQR conforme E y F varian. Demuestra que los circuncírculos de dichos triángulos tienen un punto en común distinto de P.



Demostración. Sea X el punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos APD y BPC. Entonces X es el centro de semejanza en espiral que manda DA en BC.

Más aún, como $DA = BC$ entonces los triángulos XDA y XBC son congruentes. Así que $XD = XB$ y $\angle XDA = \angle XBC$. Como $BE = DF$, por el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado se sigue que los triángulos XDF y XBE son congruentes. Entonces X es el centro de semejanza en espiral que manda DF en BE, y en consecuencia $XDFQ$ es un cuadrilátero cíclico. Por lo tanto

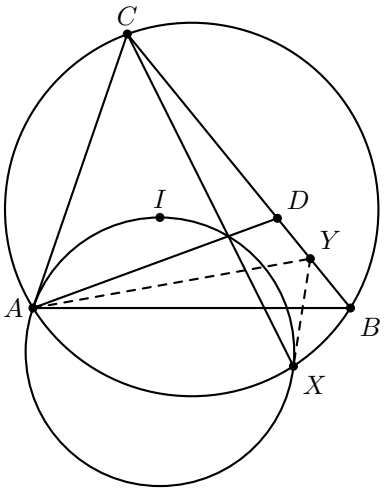
$$\angle XQR = \angle XDA.$$

Como además $APXD$ es cíclico, entonces $\angle XDA = \angle XPR$. Por lo tanto

$$\angle XQR = \angle XDA = \angle XPR.$$

Esto implica que X está en el circuncírculo del triángulo PQR. Nota que X no depende de la elección de E y F, pues se construye únicamente a partir del cuadrilátero $ABCD$. □

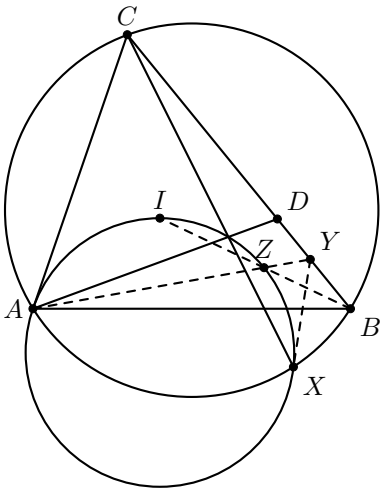
Problema 9 (EGMO 2019)**.** Sea ABC un triángulo tal que $\angle CAB > \angle ABC$ y sea I su incentro. Sea D el punto en el segmento BC tal que $\angle CAD = \angle ABC$. Sea ω la circunferencia que pasa por I y es tangente a la recta AC en el punto A. Sea X el segundo punto de intersección de ω con la circunferencia circunscrita de ABC. Muestre que las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CXB$ se intersectan en un punto en la recta BC.



Demostración. Sea Y el punto de intersección de la bisectriz del ángulos $\angle BXC$ con el segmento BC. Como $AXBC$ es cíclico entonces $\angle BXC = \angle BAC$. Luego

$$\angle BXD = \frac{\angle BXC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = \angle IAC.$$

Como ω es tangente a CA en A entonces $\angle IAC = \angle IXA$. Por lo tanto $\angle BXD = \angle IXA$. Además, por la misma tangencia obtenemos que $\angle AIX = 180^\circ - \angle XAC$. Mientras que por el cíclico $AXBC$ se tiene que $180^\circ - \angle XAC = \angle CBX$. Entonces $\angle AIX = \angle CBX$. Así que los triángulos AIX y YBX tienen dos pares de ángulos iguales, por lo que son semejantes. Así que X es el centro de semejanza en espiral que manda AI en YB. Más aún, el punto de intersección de AY con BI, el cual llamamos Z, está en ω.



Por la tangencia de AC con ω tenemos que

$$\angle ZAC = 180^\circ - \angle AIZ = \angle BAI + \angle IBA.$$

Más aún, como $\angle ZAC = \angle ZAI + \angle IAC$ y $\angle IAC = \angle BAI$ se sigue que

$$\angle ZAI + \angle IAC = \angle ZAC = \angle BAI + \angle IBA \implies \angle ZAI = \angle IBA.$$

Por lo tanto

$$\angle BAZ = \angle BAI - \angle ZAI = \angle BAI - \angle IBA = \frac{\angle CAB}{2} - \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\angle CDA}{2} - \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\angle BAD}{2}.$$

Entonces AZ, y en consecuencia AY, es bisectriz del ángulo $\angle BAD$. □

Problemas

Problema 10 (ISL 2003)**.** Sea ABC un triángulo isósceles tal que $AC = BC$, cuyo incentro es I. Sea P un punto en el circuncírculo del triángulo AIB, dentro del triángulo

ABC. Las líneas por P paralelas a CA y a CB cortan a AB en D y E, respectivamente. La línea por P paralela a AB corta a CA y a CB en F y G, respectivamente. Muestra que las líneas DF y EG se cortan en el circuncírculo del triángulo ABC.

Problema 11 (EGMO 2016)**.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y sea X el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Sean C_1, D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX, DX y CD, respectivamente. Las líneas AD_1 y BC_1 se intersectan en Y, y la línea MY intersecta a las diagonales AC y BD en puntos distintos E y F, respectivamente. Demuestra que la línea XY es tangente a la circunferencia que pasa por E, F y X.

Problema 12 (IMO 2010)**.** Sea I el incentro del triángulo ABC y sea Γ su circuncírculo. La línea AI intersecta a Γ en D. Sea E un punto en el arco BDC y F un punto en el lado BC tales que

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Finalmente, sea G el punto medio del segmento IF. Demuestra que las líneas DG y EI se intersectan en Γ.

Problema 13 (EGMO 2014)**.** Sean D y E puntos en los lados AB y AC de un triángulo ABC, respectivamente, y tales que $DB = BC = CE$. Sea F el punto de intersección de las rectas CD y BE, I el incentro del triángulo ABC, H el ortocentro del triángulo DEF, y M el punto medio del arco BAC del circuncírculo del triángulo ABC. Demuestra que I, H y M son colineales.

Problema 14 (ISL 2015)**.** Sea ABC un triángulo tal que $\angle C = 90^\circ$, y sea H el pie de la perpendicular desde C. Sea D un punto dentro del triángulo CBH tal que CH bisecta a AD. Sea P el punto de intersección de las líneas BD y CH. Sea ω la semicircunferencia de diámetro BD la cual corta al segmento CB en un punto interior. Una línea por P es tangente a ω en Q. Demuestra que las líneas CQ y AD se cortan en ω.

Problema 15 (APMO 2010)**.** Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $AB > BC$ y $AC > BC$. Sean O y H el circuncentro y ortocentro, respectivamente, del triángulo ABC. Suponga que el circuncírculo del triángulo AHC intersecta a la línea AB en el punto M distinto de A, y que el circuncírculo del triángulo AHB intersecta a la línea AC en el punto N distinto de A. Demostrar que el circuncentro del triángulo MNH está en la línea OH.

Problema 16 (ISL 2016)**.** Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC \neq BC$ y sea I su incentro. La línea BI corta a AC en D, y la línea por D perpendicular a AC corta a AI en E. Demuestra que la reflexión de I respecto a AC está en el circuncírculo del triángulo BDE.

Problema 17 (India 2024)**.** Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$, y sean O y H su circuncentro y ortocentro, respectivamente. Sean Z y Y puntos en los segmntos AB y AC respectivamente, tales que

$$\angle ZOB = \angle YOC = 90^\circ.$$

La perpendicular desde H hacia YZ intersecta a BO y CO en Q y R respectivamente. Las tangentes al circuncírculo del triángulo AYZ por Y y Z se cortan en T. Demuestra que Q, R, O y T son concíclicos.

Problema 18 (IGO 2017)**.** Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La línea CO intersecta a la altura por A en el punto K. Sean P y M los puntos medios de AK y AC respectivamente. Si PO intersecta a BC en Y, y el circuncírculo del triángulo BCM corta a AB en X, demuestra que $BXOY$ es cíclico.

Problema 19 (OMM 2016)**.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia , ℓ_1 la recta paralela a BC que pasa por A y ℓ_2 la recta paralela a AD que pasa por B. La recta DC corta a ℓ_1 y ℓ_2 en los puntos E y F, respectivamente. La recta perpendicular a ℓ_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a ℓ_2 que pasa por B corta a AD en Q. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos ADE y BFC, respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y sólo si DP es perpendicular a CQ.

Problema 20. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O y circuncírculo Γ cuyo lado más corto es AB. La perpendicular desde A hacia BC corta a Γ de nuevo en E. Sea P un punto en el arco menor BC de Γ tal que $AB = BP$. Sea M el punto medio del lado BC y sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos OBP y MCP, respectivamente. Finalmente, sea K el punto medio de EP. Muestra que $\angle MO_1K + \angle OO_2K = 180^\circ$.

Problema 21 (OMM 2018)**.** Sean ABC un triángulo acutángulo y Γ la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. La bisectriz el ángulo en B corta a Γ en M y la bisectriz del ángulo en C corta a Γ en N. Sea I el punto de intersección de las bisectrices anteriores. Considera M' y N' las reflexiones de M y N respecto a CA y AB, respectivamente. Muestra que el centro de la circunferencia que pasa por los puntos I, M' y N' está en la altura del triángulo ABC que pasa por A.

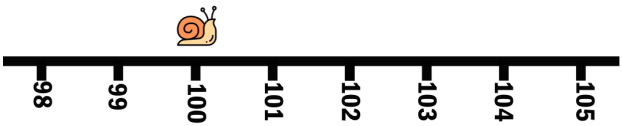
Problema 22 (APMO 2024)**.** La línea ℓ intersecta a los lados BC y AD del cuadrilátero cíclico $ABCD$ en puntos interiores R y S, respectivamente, e intersecta al rayo DC más allá de C en Q, y al rayo BA más allá de A en P. Los circuncírculos de los triángulos QCR y QDS se intersectan en $N \neq Q$, mientras que los circuncírculos de los triángulos PAS y PBR se intersectan en $M \neq P$. Las líneas MP y NQ se cortan en el punto X, las líneas AB y CC se cortan en el punto K, y las líneas BC y AD se cortan en el punto L. Demuestra que el punto X está en la recta KL.

Problemas de práctica

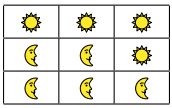
A continuación encontrarás diez problemas de práctica que seleccionamos especialmente para este número. Aprovechamos la ocasión para solicitar tu apoyo para enriquecer esta sección de la revista. Si tienes problemas inéditos que te gustaría compartir con nosotros, puedes contactarnos enviando un mensaje a `revistaomm@gmail.com`: ¡recibiremos con mucho gusto todas tus propuestas!

Problema 1. ¿Cuántas formas hay de acomodar las cinco letras ABCDE, de manera que no queden dos letras consecutivas en posiciones juntas? Por ejemplo, no se puede EBDCA porque D y C son letras consecutivas que quedaron juntas.

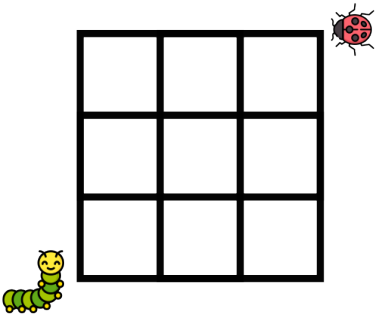
Problema 2. Cari, el caracol, está sobre una pista marcada cada metro. Ahora está en la marca de la posición 100. Comienza a moverse de la siguiente forma. La primera hora, se mueve 10 metros hacia la derecha, luego la segunda hora se mueve 3 metros hacia la izquierda, la tercera hora se mueve 8 metros a la derecha y en la cuarta hora se mueve 6 a la izquierda. Luego repite ese patrón, la quinta hora se mueve 10 metros hacia la derecha, la sexta hora se mueve 3 metros a la izquierda, y así sucesivamente. Si está moviéndose durante una semana completa, ¿Qué número tiene la marca donde terminó?



Problema 3. En un tablero de 3×3 se colocan lunas y soles. En la figura mostramos un ejemplo. Observa que, en el ejemplo, hay 3 soles que quedaron alineados y 3 lunas que quedaron alineadas. ¿Cuántas formas distintas hay de colocar lunas y soles en el tablero para que haya al menos 3 lunas alineadas y al menos 3 soles alineados? (Pueden ser en vertical o en horizontal y puedes usar cualquier cantidad de lunas y soles)



Problema 4. En la figura se muestra una cuadrícula sobre la que Ori la oruga, y Cati la catarina van a caminar. Ori solo puede avanzar moviéndose hacia la derecha o hacia arriba, mientras que Cati puede moverse hacia la izquierda o hacia abajo.



Si cada una de ellas da 3 pasos, ¿qué probabilidad hay de que terminen en el mismo lugar?

Problema 5 (Examen Regional del Sureste - 2025)**.** Encuentra todos los enteros positivos n tales que $3^{n-1} + 7^{n-1}$ divide a $3^n + 7^n$.

Problema 6. En un club de 2^{2025} personas se les otorga, a cada uno, una tarjeta que tiene una lista de 2025 círculos de color rojo o azul, de modo que todas las combinaciones posibles aparecen en las tarjetas y ninguna tarjeta se repite.

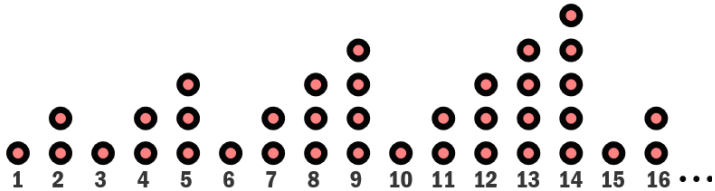
Las reglas del club dicen que dos espías pueden intercambiar información si y solo si, sus tarjetas son casi las mismas, pero difieren en el color de solo una posición solo difieren en el color de exactamente una posición de la lista de círculos.

Inicialmente, el espía que tiene 2025 círculos rojos, transmite un mensaje a uno de sus compañeros (y solo a uno). A continuación, ese segundo espía se lo comunica a un tercero, el tercero se lo pasa a un cuarto, y así sucesivamente.

Demuestra que es posible que el mensaje le llegue a todos los espías, sin que nadie reciba el mensaje más de una vez, y que además el último espía en recibirlo, puede transmitirlo de vuelta al espía inicial.

Problema 7 (Examen Regional del Sureste - 2025)**.** ¿Cuántos números enteros, positivos y distintos existen, tales que el producto de sus dígitos es 2025 y la suma de sus dígitos es un múltiplo de 5 menor o igual a 45?

Problema 8. En la figura se muestra un patrón que se continúa hasta llegar al término 2025. ¿Cuántos puntos se habrán usado en total?



Problema 9. Se tiran dos dados bien construidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de las caras que quedan a los lados sean igual a la suma de las caras que quedaron hacia arriba. Nota: En un dado bien construido, todas las caras tienen la misma probabilidad de caer, y cualquier par de lados opuestos tienen una suma igual a 7.

Problema 10. Encuentra todos los números de 4 cifras a los cuales, si les sumas la suma de sus dígitos, obtienes 2025.

Soluciones a los problemas de práctica

Solución 1. Procedemos a contar de forma ordenada y por casos.

Cuando A está a la izquierda, la palabra tiene la estructura $A****$. Entonces, la letra B puede ir en las tres últimas posiciones:

- En el caso $A*B**$, la letra C solo puede ir al final ($A*B*C$) y por tanto el único acomodo posible es $ADBEC$.
- En el caso $A**B*$, la letra C solo puede ir en la segunda posición ($AC*B*$) y por lo tanto el único acomodo posible es $ACEBD$.
- En el caso $A***B$, si usamos $AC**B$, las letras D y E quedarán forzosamente contiguas, por lo que no hay acomodo, mientras que si usamos $A*C*B$, las letras C y D quedarán consecutivas y tampoco habrá acomodo.

Cuando la letra A está en la segunda posición ($*A***$) tenemos dos casos:

- Si la letra B va en la cuarta posición, $*A*B*$, la C irá al inicio y tendremos los acomodos $CADBE, CAEBD$.
- Si la letra B va al final, $*A**B$, no podemos poner C al inicio pues ello haría que D, E quedaran juntas. Entonces C va en medio, $*AC*B$ y obtenemos el acomodo $DACEB$.

Cuando la letra A va en medio, la B puede ir al inicio o al final, pero por simetría ambos subcasos tienen la misma cantidad de acomodos. Así, basta considerar $B*A**$. Los subcasos son:

- $B * AC*$ que corresponde al acomodo $BDACE$.
- $B * A * C$ que corresponde al acomodo $BDAEC$.

Por simetría, hay otros dos acomodos cuando B va al final. Por tanto, el caso A en medio tiene 4 acomodos.

Finalmente, cuando la A va en las posiciones cuarta o quinta, son casos simétricos a los primeros dos, teniendo respectivamente 3 y 2 acomodos. Concluimos entonces que hay un total de $2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 14$ posibles acomodos.

Solución 2. Una de las ideas en las que se hace mas énfasis cuando se empieza a practicar matemáticas, es que si buscamos patrones, podemos evitar hacer cuentas repetitivas. En este problema, la clave es darse cuenta que tras los movimientos de cada cuatro horas, el resultado es equivalente a haberse movido 9 metros hacia la derecha.

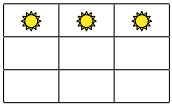
Ahora, en una semana, ¿cuántos *bloques* de 4 horas hay? Como cada día tiene 24 horas, que corresponden a 6 bloques, en 7 días habrá $7 \cdot 6 = 42$ bloques, por lo que se habrá movido 42 veces una cantidad de 9 metros, resultando en un total de 378 metros. Sin embargo, dado que inició en la marca de 100 metros, en realidad terminará en la marca con el número 478.

Solución 3. Notemos que no puede haber tres soles en diagonal ni tres lunas en diagonal, y que si hay 3 soles en línea horizontal, no puede haber tres lunas en vertical o viceversa.

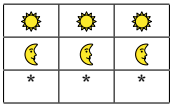
Así, todos los acomodos posibles tendrán los soles y las lunas, ambos alineados de forma horizontal, o ambos alineados de forma vertical. Sin embargo, cualquier acomodo de uno de esos tipos, se puede transformar en el otro mediante una rotación, por lo que debe haber la misma cantidad de cada tipo. Por eso, nos podemos concentrar en contar los casos donde las figuras quedan alineadas horizontalmente, y luego multiplicamos por 2 para incluir los acomodos con alineaciones verticales.

Una vez más, el secreto para el buen conteo es proceder de forma ordenada. Vamos a dividir en casos, dependiendo de dónde están los tres soles alineados (recordando que puede haber más de dos líneas de soles, pero al menos debe haber una).

Primero, consideremos el caso en que hay tres soles en en renglón superior.

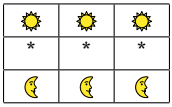


Hay dos opciones para colocar el renglón de lunas. Cuando las colocamos en el segundo renglón,

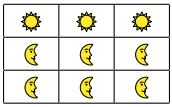


podemos llenar el renglón inferior de $2 \times 2 \times 2 = 8$ formas.

Lo mismo sucede cuando colocamos las lunas en el renglón inferior,

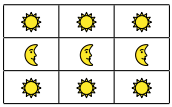


por lo que aparentemente hay 16 posibilidades teniendo soles en el renglón superior. Sin embargo, observemos que los casos anteriores no son disjuntos, por que el arreglo que tiene lunas en los dos renglones, lo estamos contando doble, dentro de cada uno de los subcasos.



Así, en realidad solo hay $8 + 8 - 1 = 15$ acomodos que tienen tres soles en la parte superior.

Un conteo similar se realiza cuando los tres soles están en el renglón medio, y cuando hay tres soles en el renglón inferior, por lo que , en apariencia, el total sería $15+15+15 = 45$. Sin embargo, nuevamente hay arreglos que están siendo contados más de una vez. Por ejemplo, el arreglo siguiente

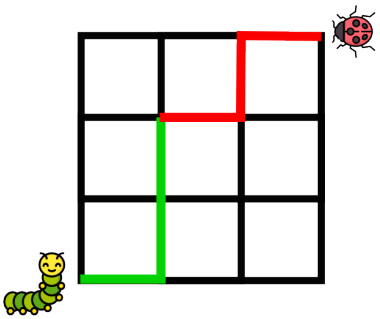


aparece dentro del primer caso (tiene tres soles en la parte superior) y dentro del tercer caso (tiene tres soles en la parte inferior). Dado que de estos hay 3 posibles, en realidad la cantidad de acomodos es $45 - 3 = 42$.

Pero, recordando que este conteo es únicamente los tableros donde las figuras quedan alineadas horizontalmente, hay que multiplicar por 2 para los arreglos verticales. De este modo, el total buscado es 84.

Solución 4. El número total de caminos de 3 pasos que puede dar cada una de ellas es 2^3 (porque siempre tienen 2 opciones para moverse en cada paso), por lo que en total hay $2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 64$ posibles parejas de recorridos de ambas al mismo tiempo.

Por otro lado, solo van a terminar en el mismo lugar, si al unir los recorridos, como en la figura, se completa un recorrido desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha en 6 pasos.



Ahora, la cantidad de formas de hacer esto, es $\binom{6}{3} = 20$ (ver el artículo en Tzaloa No.1, 2025). Concluimos entonces que la probabilidad de que terminen en el mismo lugar luego de 3 pasos es $20/64$.

Solución 5. Dado que $7(3^{n-1}+7^{n-1}) = 7\cdot 3^{n-1}+7^n$, esta última expresión es múltiplo de $3^{n-1}+7^{n-1}$, y por hipótesis 3^n+7^n también, por lo que también divide a su resta $7\cdot 3^{n-1}-3^n = 4\cdot 3^{n-1}$.

Por otra parte, $3^{n-1}+7^{n-1}$ es primo relativo con 3^{n-1}, por lo que de la divisibilidad $3^{n-1}+7^{n-1} \mid 4\cdot 3^{n-1}$, concluimos $3^{n-1}+7^{n-1} \mid 4$. Esto solo es posible cuando $n<2$. Pero $n=1$ sí cumple la condición, por lo que ésta es la única posibilidad.

Solución 6. Vamos a demostrar algo más fuerte: siempre es posible hacerlo para cualquier potencia de dos. La prueba será por inducción. El caso base ($n=1$) es que hay $2^1=2$ espías, cada uno tiene 1 círculo en su tarjeta. El espía con el círculo rojo pasa el mensaje al de azul (porque sus tarjetas difieren en exactamente un círculo), en este momento ya todos recibieron el mensaje, y el de círculo azul puede regresar el mensaje al original.

Aunque no es necesario, vamos a hacer el caso $n=2$. Las $2^2=4$ tarjetas posibles tienen dos círculos. Entonces las posibilidades de colores son (R,R), (R,A), (A,R) y (A,A). A continuación se muestra una forma de transmitir el mensaje según las reglas del problema:

$$(R,R)\to(R,A)\to(A,A)\to(A,R)\to(R,R).$$

Observemos que en cada paso, se están comunicando dos espías cuyas tarjetas difieren solo en una posición, y al final el mensaje regresa al espía original.

Supongamos ahora que se puede hacer con 2^k espías y vamos a demostrar que es posible hacerlo para 2^{k+1} espías. Separemos a los 2^{k+1} espías en dos conjuntos, el conjunto X formado por aquellos que tienen R al final, y el conjunto Y formado por aquellos que tienen A al final. Ambos conjuntos tienen 2^k elementos.

Observemos que podemos aplicar la hipótesis de inducción dentro de cada conjunto, pues si nos olvidamos del último círculo, aparecen todas las 2^k posibilidades en las

primeras k posiciones. Esto es, podemos encontrar una sucesión de espías $E_1 \to E_2 \to E_3 \to \cdots \to E_{2^k}$ en el conjunto X (que tienen todos una R adicional al final) que lo recorre todo sin repetición.

Ahora, si el último espía E_{2^k} de la sucesión tiene colores $(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{2^k}, R)$, puede transmitir su mensaje al espía que tiene los colores $(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{2^k}, A)$. En este momento, podemos recorrer todo el conjunto Y siguiendo el orden inverso $E_{2^k} \to E_{2^k-1} \to \cdots \to E_1$, pero poniendo A al final en vez de R. Pero el último espía tendrá los colores $(R, R, \cdots, R, A)$, de modo que solo difiere en una posición con el primer espía y por tanto puede regresarle el mensaje.

Concluimos por inducción que es posible realizar el proceso para cualquier potencia de 2, en particular, para 2^{2025} espías.

Solución 7. Dado que $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ debemos usar el 5 dos veces, pero los factores 3 pueden corresponder a las posibilidades $(3,3,3,3), (3,3,9), (9,9)$. Además siempre podemos añadir dígitos 1 de ser necesario.

Procedemos por casos.

Cuando usamos $(5,5,3,3,3,3)$ la suma es igual a 22. Como la suma de las cifras es múltiplo de 5, ésta puede ser, 25, 30, 35, 40 o 45, añadiendo respectivamente 3, 8, 13, 18, 23 veces el dígito 1. Aplicando la fórmula de permutaciones con repetición, obtenemos que en este caso hay

$$\frac{9!}{2!4!3!} + \frac{14!}{2!4!8!} + \frac{19!}{2!4!13!} + \frac{24!}{2!4!18!} + \frac{29!}{2!4!23!} = 9597525.$$

Cuando usamos $(5,5,3,3,9)$ podemos añadir $0, 5, 10, 15$ o 20 dígitos 1. Aplicando la fórmula de permutaciones con repeción, en este caso tenemos:

$$\frac{5!}{2!2!10!} + \frac{10!}{2!2!15!} + \frac{15!}{2!2!20!} + \frac{20!}{2!2!15!} + \frac{25!}{2!2!20!} = 2156700.$$

Finalmente, cuando usamos $(5,5,9,9)$, se pueden usar $2, 7, 12, 17$ veces el dígito 1 y la suma correspondiente es:

$$\frac{6!}{2!2!2!} + \frac{11!}{2!2!7!} + \frac{16!}{2!2!12!} + \frac{21!}{2!2!17!} = 48900.$$

Concluimos que la cantidad total es $597525 + 2156700 + 48900 = 11803125$.

Solución 8. Observemos que los triángulos que forman los puntos, corresponden a sumas de Gauss. Denotemos por $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Entonces las primeras dos columnas usan S_2 puntos, las siguientes tres columnas usan S_3 puntos, luego las cuatro columnas que siguen usan S_4 puntos y así sucesivamente.

Por otro lado, para llegar a la posición 2025, determinamos el máximo valor m tal que $2 + 3 + 4 + \cdots + m \leq 2025$ (porque esa suma corresponde a la cantidad de puntos en las bases de los triángulos). El valor m que obtenemos es $m = 66$ (de manera equivalente, queremos encontrar una m tal que $1 + 2 + \cdots + m \leq 2026$).

Como $2+3+4+\cdots+66=2210$, eso quiere decir que hasta el término 2210 del patrón habremos usado $S_2+S_3+\cdots+S_{66}$ puntos.

Aunque existen fórmulas para *sumar sumas de Gauss*, una alternativa es observar que $S_n=\binom{n+1}{2}$ y entonces la suma $S_2+S_3+\cdots S_{66}$ la podemos reescribir como $S_1+S_2+\cdots+S_{66}-S_1$ y por tanto es igual a

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{67}{2}-1.$$

Esa suma de coeficientes binomiales la evaluamos con la *identidad del calcetín* (ver Tzaloa No. 1, 2025), obteniendo $\binom{68}{3}-1=50115$.

Así, el total de puntos usados hasta la posición 2210 es 50115. Ahora, las posiciones $2211, 2212, 2213, \ldots, 2025$ corresponden a iniciar un nuevo triángulo, de modo que tienen $1+2+3+\cdots 15=120$ puntos. De esta manera, el total completo de puntos usados en ese momento será $50115+120=50235$.

Solución 9. Hay cuatro caras que quedan a los lados en cada dado, y como hay dos dados, tenemos ocho números. Para que su promedio sea entero (porque el promedio es la suma de las dos caras hacia arriba), necesitamos que la suma sea múltiplo de 8.

Sin embargo, como los dados están bien construidos, las 8 caras que quedan a los lados quedan agrupadas en 4 pares de caras opuestas, cuya suma siempre es 7. De esta manera, no importa cómo se tiren los dados, la suma de las caras laterales siempre será 28. Como 28 no es múltiplo de 8, es imposible que su promedio sea entero. Concluimos que la probabilidad de lo que se pide es, forzosamente, cero.

Solución 10. La mayor suma posible de cifras de un número de cuatro cifras es 36 (cuando el número es 9999 y la menor es 1 cuando es 1000).

Por ello, cualquier número que cumpla la condición debe estar entre $2025-36$ y $2025-1$, es decir, entre 1989 y 2024. Verificando los casos encontramos que 1998 y 2016 son los únicos que tienen la propiedad.

Problemas de entrenamiento
Año 2025, No. 3

Problemas de entrenamiento (Año 2025, No. 3)

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este tercer número del año 2025. Te recordamos que las soluciones a los problemas en este número no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que trabajes en ellos y redactes con detenimiento tus soluciones. Las soluciones a los problemas en este número se publicarán en la segunda entrega de 2026 de la revista y se escogerán entre las contribuciones que la comunidad olímpica tenga a bien hacernos llegar.

Con el fin de dar tiempo a los lectores para que preparen y envíen sus soluciones, anunciamos que estaremos recibiendo soluciones para los 10 problemas que se listan a continuación hasta el **1 de marzo de 2026**. Las inquietudes o propuestas relacionadas con este apartado de la revista deberán ser remitidas por *email* a

`revistaomm@gmail.com`

¡No dejen de hacernos llegar sus soluciones!

Problema 1.3.25. Con la representación en números romanos de los enteros del intervalo $[1, 2025]$ se crea una lista, la cual se ordena lexicográficamente. ¿A qué número entero corresponde el número romano que queda a la mitad de la lista?

Problema 2.3.25. Sea $k \geq 1$ un número entero. Determine todos los números enteros $A = \overline{a_s a_{s-1} \ldots a_1}$ tales que existen números enteros $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ de tal modo que el número $\overline{a_s a_{s-1} \ldots a_1 b_k \ldots b_1}$ es igual a $1 + 2 + \cdots + A$.

Problema 3.3.25. Halle todas las ternas $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tales que

$$5^x + y^2 = z! + 1.$$

Problema 4.3.25. Sean b y n números enteros mayores que 1. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existe un número entero a_k tal que $k \mid (b - a_k^n)$. Demuestre que b es la potencia n-ésima de un número entero.

Problema 5.3.25. Sea p un número primo impar; suponga que $2p + 1 \mid 2^{2p} - 1$. Demuestre que $2p + 1$ es un número primo.

Problema 6.3.25. Con centro en los vértices A, B y C de un triángulo ABC se quieren trazar círculos de radios r_a, r_b y r_c, respectivamente, de forma que los círculos no se traslapen. Suponiendo que $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$, determine el máximo valor que puede alcanzar la expresión $r_a + r_b + r_c$ (en términos de a, b y c).

Problema 7.3.25. En un triángulo ABC se observa que $\measuredangle CAB = 40^\circ$ y que $\measuredangle ABC = 60^\circ$. La bisectriz del ángulo CAB interseca a BC en D y F es el punto sobre AB tal que $\measuredangle ADF = 30^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle DCF$?

Problema 8.3.25. Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto tiene por vértice al punto C. Sean ACP y BCQ triángulos rectángulos isósceles, externos a $\triangle ABC$, con ángulos rectos en P y Q, respectivamente. Además, sea F el pie de la perpendicular a AB por C y sean D y E los puntos de intersección de AC con $\overleftrightarrow{PF}$ y de la recta BC con $\overleftrightarrow{QF}$ (respectivamente). Demuestre que $DC = EC$.

Problema 9.3.25. Supongamos que $n = 2^{75} \cdot 3^{27}$. ¿Cuántos números enteros positivos d satisfacen las tres condiciones siguientes?

a) $d \mid n^2$

b) $d < n$

c) $d \nmid n$

Problema 10.3.25. Encuentre todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + y) \leq f(xy).$$

Soluciones a los problemas de entrenamiento (Año 2024, No. 3)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en la tercera entrega de 2024 de Tzaloa. En esta ocasión agradecemos a José Luis Carballo Lucero de Baja California Sur (México) por la solución para el problema 1.3.24 que nos hizo llegar; a Jonathan Toledo Toledo de El Espinal (Oaxaca, México) por las soluciones que envió para los problemas 1.3.24 y 5.3.24; a Juan José Bravo Martínez

de Popayán (Colombia) por la solución para el problema 2.3.24 que tuvo a bien compartirnos; a Nicolás Campanelli de Saint Étienne de Tinée (Francia) por su solución al problema 5.3.24 y a Adán Medrano Martín del Campo (ahora en Radix Trading) por brindarnos una solución para el problema 10.3.24 .

Reiteramos la invitación a todos nuestros lectores a seguir enviando soluciones para que éstas puedan aparecer en la páginas de Tzaloa eventualmente. En el siguiente número aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en el primer número de 2025 de la revista. ¡Aún están a tiempo de enviar soluciones!

Problema 1.3.24. Sean x, y números reales distintos de cero. Demuestre que

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10\geq 0.$$

Solución de Jonathan Toledo Toledo. Primero analicemos el polinomio $f(a)=3a^2-8a+4$. Vemos que sus raíces son $a_1=\frac{2}{3}$ y $a_2=2$. Tenemos así que $f(a)\geq 0$ para cada $a\in(-\infty,\frac{2}{3}]\cup[2,\infty)$. Por otro lado, es un hecho conocido que $b+\frac{1}{b}\geq 2$ para cada $b>0$ y que $b+\frac{1}{b}\leq -2$ para cada $b<0$; por consiguiente, si x y y son números reales distintos de cero se cumple que $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ y, en consecuencia,

$$0\leq f\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4=3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10.$$

□

Problema 2.3.24. A un congreso de matemáticas asistieron 15 mexicanos y 24 mujeres. De los asistentes, sólo ocho no provenían ni de México ni de Sudamérica y, de esos ocho, cuatro eran mujeres. Demuestre que al congreso asistieron más mujeres sudamericanas que hombres mexicanos.

Solución de Juan José Bravo Martínez. Denotemos con m_M al total de mujeres mexicanas que asistieron al congreso, con h_M al total de hombres mexicanos que asistieron y con m_S al total de mujeres de Sudamérica que asistieron. Por un lado se tiene que

$$m_M+h_M=15. \tag{1}$$

Por otra parte, al tenerse que cuatro de las 24 mujeres que asistieron al congreso no eran ni México ni de Sudamérica se puede afirmar que

$$m_M+m_S=20. \tag{2}$$

De (1) y (2) se colige que

$$m_S = 20 - m_M > 15 - m_M = h_M$$

que es justamente lo que se deseaba establecer.

□

Problema 3.3.24. Determine todos los pares ordenados de números enteros positivos (a, b) tales que $39 \nmid (a^4 + 1)$ y $39 \nmid (b^2 - 1)$ pero $39 \mid (a^4 + 1)(b^2 - 1)$.

Solución de Daniel Alfonso Santiesteban. Mediante reducción al absurdo mostraremos a continuación que no hay números enteros positivos a y b que cumplan las tres condiciones en el planteamiento del problema.

Puesto que $39 = 3 \cdot 13$ y $a^4 + 1$ nunca es divisible por 3 (pues siempre es congruente con 1 o con 2 módulo 3) y se necesita que $39 \mid (a^4+1)(b^2-1)$, entonces debe cumplirse que $3 \mid (b^2 - 1)$. De esto último y de la condición de que $39 \nmid (b^2 - 1)$ se desprende que $13 \nmid (b^2 - 1)$; nuevamente, al requerirse que $39 \mid (a^4 + 1)(b^2 - 1)$, debe ser el caso que $13 \mid (a^4 + 1)$. No es difícil convencerse de que esa relación de divisibilidad no es válida: de cumplirse, a tendría que ser un número coprimo con 13 y la divisibilidad podría expresarse como $a^4 \equiv -1 \pmod{13}$. Elevando ambos miembros de la congruencia al cubo se llega a que $a^{12} \equiv -1 \pmod{13}$, lo cual entra en conflicto con la congruencia $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ que proviene del pequeño teorema de Fermat.

□

Problema 4.3.24. Un empleado del ayuntamiento de Pelotillehue sale a comer poco después de las 6:00 P. M. y en ese momento observa que las manecillas del reloj de la catedral del pueblo forman un ángulo de $110°$. Al regresar, un poco antes de las 7:00 P. M., observa que el ángulo entre las manecillas del reloj es nuevamente de $110°$. Determine cuántos minutos estuvo fuera del ayuntamiento esa persona.

Solución. En primer lugar determinaremos el instante en el que el empleado salió a comer. Si la manecilla grande apuntaba hacia la marca de los x minutos, entonces la manecilla corta apuntaba hacia la marca de los $30 + \frac{x}{12}$ minutos. Puesto que el ángulo central de cada arco determinado por las marcas de minutos consecutivos en la carátula del reloj es de $6°$ tenemos que

$$\left(30 + \frac{x}{12} - x\right) 6° = 110°.$$

De esto se obtiene que

$$x = \frac{12}{11}\left(30 - \frac{110}{6}\right) = \frac{2 \cdot 70}{11} = 12\frac{8}{11}. \tag{3}$$

Ahora bien, supongamos que, al momento en que el empleado regresa de comer, la manecilla grande apuntaba hacia la marca de los y minutos; en ese mismo instante la manecilla corta del reloj apuntaba hacia la marca de los $30 + \frac{y}{12}$ minutos y entonces resulta que

$$\left(y - \left(30 + \frac{y}{12}\right)\right) 6° = 110°$$

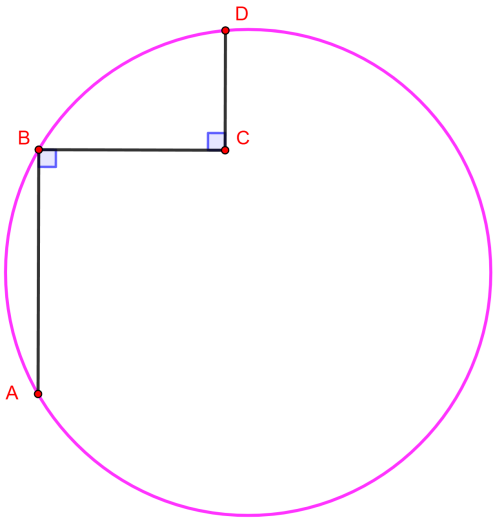
y, por consiguiente,

$$y = \frac{12}{11}\left(30 + \frac{110}{6}\right) = \frac{2 \cdot 290}{11} = 52\frac{8}{11}. \tag{4}$$

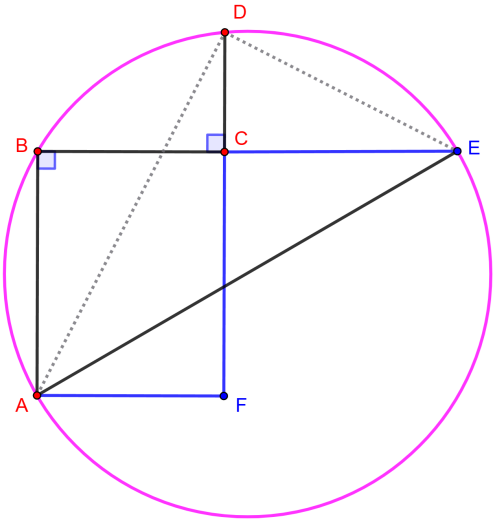
De (3) y (4) se concluye que la persona estuvo 40 minutos fuera del ayuntamiento.

□

Problema 5.3.24. Considere la figura que se presenta a continuación. Supongamos que A, B y D son puntos sobre la circunferencia y que AB $=$ 9, BC $=$ 8, CD $=$ 6, AB $\perp$ BC y BC $\perp$ CD. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



Solución de Jonathan Toledo Toledo. Prolonguemos los segmentos BC y DC hasta E y F, respectivamente, donde E es un punto en la circunferecia y $BCFA$ es un rectángulo. Puesto que $\measuredangle ABE = 90°$ se sigue que AE es un diámetro de la circunferencia; de esto se desprende que ADE también es un ángulo recto.



Al considerar los triángulos rectángulos ADF, EDC, AEB y AED se obtiene que $AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$, $DE^2 = 6^2 + CE^2$, $AE^2 = 9^2 + (8 + CE)^2$ y que $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 17^2 + DE^2$. Se llega así a que

$$\begin{aligned} 9^2 + (8 + CE)^2 &= 17^2 + DE^2 \\ &= 17^2 + 6^2 + CE^2, \end{aligned}$$

de lo cual se sigue que

$$CE = \frac{17^2 + 6^2 - 9^2 - 8^2}{16} = \frac{45}{4}$$

Así pues,

$$AE = \sqrt{9^2 + (8 + CE)^2} = \sqrt{9^2 + \left(8 + \frac{45}{4}\right)^2} = \frac{85}{4},$$

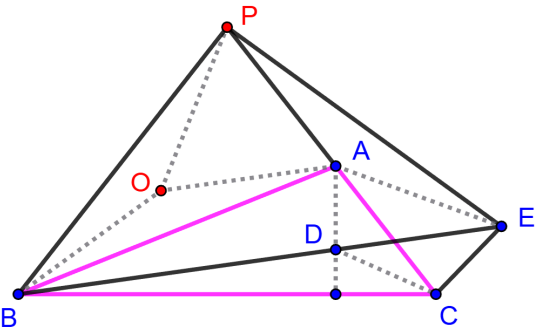
lo cual indica que el radio en cuestión es de $\frac{85}{8}$.

□

Problema 6.3.24. Llamemos A' al pie de la altura por A de un triángulo ABC. Sea D un punto en el interior de $\triangle ABC$ y sobre la altura $\overleftrightarrow{AA'}$. Supóngase además que $\measuredangle CBD = \alpha$, $\measuredangle ABD = 30^\circ - 2\alpha$ y que $\measuredangle ACB = 60^\circ - \alpha$. Demuestre que $\measuredangle BCD = 3\alpha$.

Solución. Sea P el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ con la mediatriz del lado BC de $\triangle ABC$; se cumple que $\measuredangle ABP = 30^\circ$ y que $\measuredangle APB = 60^\circ + 2\alpha$. Denotemos con E al (segundo) punto de intersección de $\overleftrightarrow{BD}$ con la circunferencia de centro P y radio PC.

Es claro que P es el circuncentro de $\triangle BCE$; luego, del teorema del ángulo inscrito se desprende que $\measuredangle CPE = 2\alpha$ y, en consecuencia, $\measuredangle BEC = 30^\circ + \alpha = \measuredangle CAD$. De lo anterior se colige que $ADCE$ es un cuadrilátero cíclico. Ahora bien, denotemos con O al circuncentro de $\triangle APB$: resulta que $\triangle APO$ es un triángulo equilátero. Así pues, $\measuredangle BPO = 2\alpha = \measuredangle EPA$; puesto que $BP = EP$ y $PO = PA$, invocando el criterio LAL de congruencia llegamos a que $\triangle OPB \cong \triangle APE$.



Como $\triangle OPB$ es un triángulo isósceles y $\measuredangle BPO = 2\alpha$ tenemos que $\measuredangle OBA = 30 - 2\alpha = \measuredangle OAB$. Al cumplirse que $\measuredangle OBA = \measuredangle ABD = \measuredangle OAB$, se sigue que AB es la bisectriz de $\measuredangle OBE$ y que $OA \| EB$: de esto y de la congruencia de $\triangle OPB$ y $\triangle APE$ deducimos que $\measuredangle OBE = 60^\circ - 4\alpha = \measuredangle AEB$ y que

$$\begin{aligned} \measuredangle BCD &= \measuredangle PCB - \measuredangle ACD \\ &= \measuredangle PCB - \measuredangle AED \\ &= \measuredangle PCB - \measuredangle AEB \\ &= (60^\circ - \alpha) - (60^\circ - 4\alpha) \\ &= 3\alpha. \end{aligned}$$

□

Problema 7.3.24. Denominamos *boomerang* a un cuadrilátero que no es convexo y cuyos lados no se cruzan entre sí. Demuestre que no es posible embaldosar un polígono convexo dado mediante una cantidad finita de boomerangs (no necesariamente congruentes entre sí).

Solución. Supongamos que $\mathcal{P}$ es un polígono convexo de n lados que ha sido embaldosado con un total de k *boomerangs*. Por un lado sabemos que la suma de los ángulos interiores de $\mathcal{P}$ es $(n-2)\pi$. Por otra parte tenemos que cada *boomerang* que aparece en el embaldosado tiene exactamente un ángulo interior que mide más de π radianes.

□

Problema 8.3.24. Demuestre que entre cualesquiera 39 números naturales consecutivos siempre hay uno cuya suma de dígitos es divisible por 11.

Solución. En lo que sigue denotaremos con $s(n)$ a la suma de los dígitos del número natural n; además, diremos que n es un número *adecuado* si $11 \mid s(n)$.

Supongamos que tenemos una lista de 39 números naturales consecutivos en la que ninguno de los números es *adecuado*; pensemos que los números en la lista están ordenados del menor al mayor. Observemos en primer lugar que uno de los primeros diez términos es múltiplo de 10 y que, por lo tanto, termina en 0; llamémosle n a tal número. Como ninguno de los números $n, n+1, \ldots, n+9$ es *adecuado*, afirmamos que $s(n) \equiv 1 \pmod{11}$: en caso contrario, $s(n), s(n+1), \ldots, s(n+9)$ sería una progresión aritmética de diferencia común 1 y si $s(n) \equiv j \pmod{11}$ para algún $j \in \{2, 3, \ldots, 9, 10\}$ entonces $s(n + (11 - j)) \equiv 0 \pmod{11}$, lo cual entra en conflicto con el supuesto de que no hay números *adecuados* entre los 39 números naturales consecutivos que se están considerando. Podemos establecer de modo análogo que $s(n + 10) \equiv 1 \pmod{11}$ y que $s(n + 20) \equiv 1 \pmod{11}$. Al tenerse que n termina en 0 y que $s(n) \equiv 1 \pmod{11}$, se sigue que $s(n + 9) \equiv 10 \pmod{11}$. Si $n + 9$ termina en k nueves, entonces $s(n + 10) - s(n + 9) = 1 - 9k$ y, en consecuencia, $1 - 9k \equiv 1 - 10 \pmod{11}$. Esta congruencia es equivalente a la congruencia $9k \equiv 10 \pmod{11}$ cuya menor solución positiva es $k = 6$. De todo lo anterior se desprende que $n+9$ y $n+19$ son números que terminan en al menos 6 nueves; luego $(n + 20) - (n + 10)$ debe terminar en al menos 6 ceros, lo cual es absurdo.

□

Problema 9.3.24. Ana y Beto juegan a especificar los cinco coeficientes intermedios de un polinomio de grado seis del siguiente tipo:

$$x^6 + \square\, x^5 + \square\, x^4 + \square\, x^3 + \square\, x^2 + \square\, x + 1.$$

Todos los coeficientes que Ana y Beto anotan son números reales y Ana es la que escribe primero, luego Beto, después Ana y así sucesivamente. Ana gana si las seis raíces del polinomio que se obtiene después de que los cinco recuadros se han llenado son complejas y Beto gana si alguna de las raíces del polinomio así obtenido es real. ¿Hay alguna estrategia ganadora para Beto?

Solución. Describimos a continuación una estrategia ganadora para Beto. Si en su primer turno Ana escribe el coeficiente de un término de grado par, entonces Beto anotará el coeficiente de un término de grado impar; si Ana escribe el coeficiente de un término de grado impar, entonces Beto anotará el coeficiente de un término de grado par. Después del segundo turno de Ana, al menos uno de los dos términos sin coeficiente será de grado impar. Ergo, en ese estadio del juego se tiene un polinomio de la forma

$$f(x) = P(x) + \alpha x^k + \beta x^\ell$$

donde α y β son los coeficientes que no se han especificado aún y $\ell \in \{1, 3, 5\}$. Es el turno de Beto:

- Si k es un número par, entonces

$$f(1) + f(-1) = P(1) + \alpha + \beta + P(-1) + \alpha - \beta = P(1) + P(-1) + 2\alpha.$$

De esto se sigue que, si Beto hace $\alpha = \frac{P(1)+P(-1)}{2}$, él puede garantizar la igualdad

$$f(1) + f(-1) = 0 \tag{5}$$

independientemente del número por el cual Ana reemplace a β. Afirmamos que de la igualdad en (5) se desprende que el polinomio $f(x)$ tiene raíces reales. Si $f(1) = f(-1) = 0$, entonces f tiene al menos dos raíces reales; en caso contrario, $f(1) \cdot f(-1) < 0$ y el teorema del valor intermedio permite afirmar la existencia de $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$. En cualquier caso, con la elección indicada para α, Beto tiene asegurada la victoria.

- Si k es un número impar, entonces

$$\begin{aligned} f(2) + 2^\ell f(-1) &= P(2) + 2^k\alpha + 2^\ell\beta + 2^\ell\left(P(-1) - \alpha - \beta\right) \\ &= P(2) + 2^\ell P(-1) + (2^k - 2^\ell)\alpha. \end{aligned}$$

Se tiene así que, si Beto hace $\alpha = -\frac{P(2)+2^\ell P(-1)}{2^k-2^\ell}$, entonces él puede garantizar la igualdad

$$f(2) + 2^\ell f(-1) = 0. \tag{6}$$

Nuevamente, si ambos sumandos en la izquierda son iguales a cero, entonces el polinomio $f(x)$ tiene al menos dos raíces reales. En caso contrario, $f(2) \cdot f(-1) < 0$ y el teorema del valor intermedio permite concluir la existencia de una raíz del polinomio $f(x)$ en el intervalo $(-1, 2)$. Así pues, en este caso Beto también puede garantizar su victoria.

□

Problema 10.3.24. Determine cuáles son todos los polinomios f, de grado positivo, tales que $f(\mathfrak{p})$ es un número primo para cada número primo $\mathfrak{p}$.

Solución de Adán Medrano Martín del Campo.

Si f es constante, solo $f(x) \equiv p$ funciona, para cada primo p. Asumamos entonces que el grado del polinomio es positivo.

Si $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces tomando primos $p_1, \ldots, p_{n+1}$ con $f(p_i) = q_i$, tenemos el producto matricial $VA = B$ descrito a continuacion:

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & \cdots & p_1^n \\ 1 & p_2 & \cdots & p_2^n \\ & & \vdots & \\ 1 & p_{n+1} & \cdots & p_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n+1} \end{pmatrix}$$

Por tanto $\det V = \prod_{j>1}(p_j - p_i) \neq 0$ y $A = V^{-1}B$, por lo que los coeficientes de f son racionales.

Escribimos $f(x) = \frac{1}{D}(b_n x^n + \cdots b_0)$ con D y cada b_i entero, además $D > 0$ y $\text{mcd}(D, b_0, b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Dado que f no es constante, cada valor primo de f aparece finitas veces, por lo que f toma infinitos valores primos, al ser evaluado en los primos. En particular, tenemos dos casos.

Si $b_0 \neq 0$ existe un primo q tal que $f(n) = q$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, $q \nmid b_0$, $q \nmid D$.

Lo anterior implica que $q \nmid n$ y la progresión aritmética $\{qk+n\}_{k\in\mathbb{Z}}$, por el teorema de Dirichlet, contiene infinitos primos. Esto quiere decir que q divide al numerador de $f(qk+n)$ y en los primos de esta sucesión tenemos $f(qk+n) = q$, contradiciendo que f toma el valor q una cantidad finita de veces.

Cuando $b_0 = 0$, tenemos que, para todo primo p, $p \mid Df(p)$. Tomando solo primos que dividen a D, vemos que $f(p) = pk/D$, $f(p) = p$ o $f(p) = -p$. Entonces alguno de los polinomios $f(x) - x$ o $f(x) + x$ tiene infinitas raíces, y por tanto debe ser idénticamente cero. Así, $f(x) = x$ o $f(x) = -x$. □

– NOTAS FINALES –

Desde el primer número de 2025 de la revista empezamos a manejar dos *novedades* en esta sección de Tzaloa. La primera tiene que ver con la numeración de los problemas. A cada problema de entrenamiento se le ha estado asociando un código el cual indica su número progresivo dentro de la lista de problemas en la cual aparece y el número del respectivo año en el que el problema puede hallarse. Por ejemplo, el problema **10.1.24** es el décimo problema en la lista de entrenamiento publicada en el primer número de 2024 de la revista. **Invitamos** a nuestros lectores a tomar en cuenta esta información al nombrar los archivos en los que concentren las soluciones que planeen hacernos llegar en lo sucesivo. La segunda novedad tiene que ver con las fuentes de los problemas. Aunque no sea del todo fácil determinar el origen de un problema dado, cuando contemos con alguna nota o referencia bibliográfica puntual sobre un problema publicado en esta sección, la compartiremos con los lectores en el número de la revista en el cual aparezca la solución del problema. A continuación listamos los comentarios que tenemos sobre los problemas planteados en el tercer número de 2024.

★ **Problema 1.3.24.** Este problema fue contribuido por Daniel Alfonso Santiesteban (estudiante del Doctorado en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero).

★ **Problema 2.3.24.** Este problema lo retomamos del libro "Las nueve cifras, el cambiante cero y otros divertimentos matemáticos"del Profesor Bernardo Recamán Santos: puesto que hay varias ediciones de esta obra, consideramos pertinente añadir que fue la edición de RBA Coleccionables (de 2007) la que teníamos a la mano al momento de conformar la lista de entrenamiento en la cual apareció este problema.

★ **Problema 3.3.24.** Este es el problema 4.6 del libro "Problemas avanzados"de Anne Alberro Semerena, Radmila Bulajich Manfrino y Carlos Jacob Rubio Barrios (Serie: Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, IMATE UNAM, 2010).

★ **Problema 4.3.24.** Vimos este problema por vez primera en el "Tratado de geometría" de Gabriel Velasco Sotomayor (Ed. Limusa, 1983). Revisando las referencias aludidas por Velasco Sotomayor en la pág. 235 del mencionado libro pudimos notar que este problema fue la pregunta 35 de la *Annual High School Mathematics Examination (AHSME)* de 1962; para más detalles sobre el origen de la AHSME, el lector interesado puede consultar el prefacio de "The Contest Problem Book" de Charles T. Salkind (New Mathematical Library, Random House, 1961).

★ **Problema 5.3.24.** Aunque no contamos con información precisa sobre el origen de este problema, consideramos valioso comentar que Nicolás Campanelli–conocido como Profe Campi en YouTube–elaboró un vídeo en el cual expone otras dos maneras de resolverlo. He aquí el *link* al vídeo que el Profe Campi dedicó a este problema de entrenamiento de la revista Tzaloa:

https://youtu.be/mpKazNln-Sk?si=FqhFlHz7i4O0d-tT

★ **Problema 6.3.24.** Este problema y su solución lo retomamos de "Rose thorns: geometry jewels"de Stan Fulger. La ingeniosa solución de este problema es de la autoría del propio Fulger. "Rose thorns: geometry jewels"fue publicado en 2019 por la casa editorial GIL (Zalău, Rumania).

★ **Problema 7.3.24.** Este problema lo conocimos en la columna de entretenimientos matemáticos que el Profesor David Gale contribuía para la revista The Mathematical Intelligencer. Los detalles sobre cómo Gale supo de este problema se pueden encontrar en las págs. 69-70 del segundo número de 1992 del Intelligencer.

★ **Problema 8.3.24.** Supimos de este problema a través de Jonathan Toledo Toledo, pero tiempo después caímos en la cuenta de que éste aparece también en el texto de "Problemas avanzados"de Anne Alberro Semerena, Radmila Bulajich Manfrino y Carlos Jacob Rubio Barrios (*op. cit.*, pp. 27, 150).

★ **Problema 9.3.24.** Este problema lo vimos por vez primera en la columna de problemas que el gran Murray S. Klamkin estuvo editando para The Mathematical Intelligencer entre 1983 y 1986; en la entrega de junio de 1985 de su columna de problemas, el Profesor Klamkin atribuyó tanto el problema como su solución a un lector de *Crux Mathematicorum* de nombre D. Bernshtein.

★ **Problema 10.3.24.** Es posible que hayamos aprendido este problema en alguna discusión de **math***overflow*. Para una solución del problema en la que interviene la noción de *divisor primo de un polinomio*, el lector puede revisar esta bonita entrada de Apuntes Misceláneos:

https://elr3to.blogspot.com/2017/04/a-play-on-interplay-twixt-primes-and.html

¡HASTA LA PRÓXIMA, ESTIMADOS LECTORES!

9.º Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

Información general

Del 18 al 21 de septiembre de 2025 se llevó a cabo de manera presencial en la ciudad de Oaxtepec, Morelos, el Concurso Nacional de la 9a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron un total de 252 estudiantes, 87 de nivel I, 87 de nivel II y 78 de nivel III, representando a 30 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:
a) Nivel I: Estudiantes de quinto y sexto año de primaria.
b) Nivel II: Estudiantes de primer y segundo año de secundaria.
c) Nivel III: Estudiantes de tercer año de secundaria.
Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta numérica que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.
En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual donde podrán escribir sus soluciones. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro y plata en las pruebas individual y por equipos, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2025.

Ganadores de las pruebas individuales

Los alumnos ganadores de **medalla de oro** en la prueba individual del Nivel I son los siguientes, ordenados en orden alfabético:

- Bruno Mateo Reyes Sánchez (Oaxaca)
- León Rodarte Vazquez (Zacatecas)
- Miguel Ángel Hernández Delgado (Coahuila)
- Wolf Rafael Teller Yuen (Querétaro)
- Xavier Ekaitz Córdoba Hirugame (Ciudad de México)

Los alumnos ganadores de **medalla de oro** en la prueba individual del Nivel II son los siguientes, ordenados en orden alfabético:

- Carlos Santiago López Figueroa (Chiapas)
- David Reyes De la Rosa (San Luis Potosí)
- Diego Pérez Fernández (Sinaloa)
- Ignacio Ostos Aponte (Nuevo León)
- Nayeli Valentina Ortiz Cordero (Ciudad de México)
- Nicolás Valdez Lomelí (Jalisco)

El equipo ganador de **medalla de oro** en la prueba individual de nivel III son, en orden alfabético:

- Ángel Ricardo Campa Juárez (Coahuila)
- Héctor Rene Bojorquez Contreras (Baja California)
- José Antonio Vega Sánchez (Guanajuato)
- Leonardo Edín González Díaz (Chiapas)
- Oscar Omar Bustamante Sanchez (Morelos)
- Santiago Garza Silva (Nuevo León)
- Sebastián Guzmán Morán (Jalisco)

Ganadores de las pruebas por equipos

El equipo ganador de **medalla de oro** en la prueba por equipos de nivel I fue el equipo del estado de **Coahuila** conformado por:

- Alexis Robledo González
- Diego Sebastián Pinal López
- Miguel Ángel Hernández Delgado

El equipo ganador de **medalla de oro** en la prueba por equipos de nivel II fue el equipo del estado de **Jalisco** conformado por:

- Pablo Salamanca Olivarez
- Nicolás Valdez Lomelí
- David Romero Mendoza

El equipo ganador de **medalla de oro** en la prueba por equipos de nivel III fue el equipo del estado de **Chiapas** conformado por:

- Romero Arenas Cano
- Itzel Anahí Narváez González
- Leonardo Edín González Díaz

Aunque la prueba se divida en dos partes, adicionalmente se entrega el premio de Campeón de Campeones, que se otorga al equipo cuya suma de los puntajes individuales de sus concursantes además del puntaje en la prueba por equipos sea la más alta. En esta ocasión los equipos nombrados como **Campeón de Campeones** en los tres niveles respecitvos, fueron loes estados de **Coahuila**, **Jalisco** y **Coahuila**, siendo este último nivel conformado por

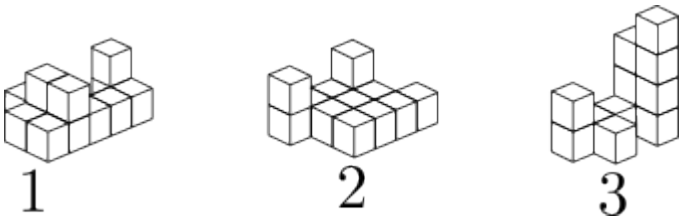
- Niza Daniela Sierra Jasso
- Ulises González López
- Ángel Ricardo Campa Juárez

En este número presentaremos los problemas y las soluciones de la prueba individual y por equipos de Nivel I.

Prueba individual, Nivel I

Problema 1. Julián tiene tres bloques de cuatro cubos unidos que se muestran en la figura.

Julián analiza las siguientes figuras numeradas 1, 2 y 3, y escribe el menor número entero que se puede formar con los dígitos de las que sí se pueden construir (si ninguna de las tres es posible, entonces Julián escribe 0). ¿Qué número escribió Julián?



Problema 2. El semáforo en la calle Camarón Dormido dura en verde 70 segundos, luego 5 segundos en amarillo y después 85 segundos en rojo. De rojo pasa a verde y se repite el ciclo. Justo a las 8:00 de la mañana el semáforo se puso en verde. Si a las 4:05 de la tarde Crisanto está en la calle Camarón Dormido y el semáforo está en rojo, ¿cuántos segundos tiene que esperar para que pase a verde?

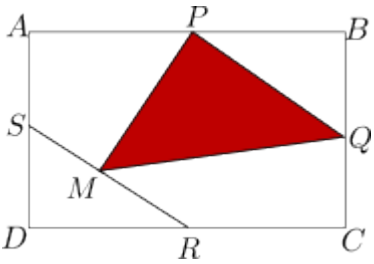
Problema 3. Sandra, Alejandro y Gonzalo tienen algunas canicas cada uno. Hay 3 tarjetas numeradas 1, 2 y 3 que tienen las siguientes afirmaciones.

- La tarjeta 1 dice que entre los tres hermanos tienen 16 canicas.
- La tarjeta 2 dice que si Alejandro le da una canica a Gonzalo, entonces los tres tienen la misma cantidad de canicas.
- La tarjeta 3 dice que si Alejandro y Gonzalo juntan sus canicas, entonces tienen el doble de canicas que Sandra.

Se sabe que la afirmación de exactamente una de las tarjetas es mentira. ¿Qué número tiene esa tarjeta?

Problema 4. La mamá de Juan, Ramiro y Pedro le pide a sus tres hijos que adivinen cuántos dulces tiene su frasco de vidrio. Juan dice que tiene 500, Ramiro dice que 487 y Pedro dice que son 507. La mamá les dice que las diferencias de los números que dijeron con la cantidad correcta son 13, 7 y 6, pero no necesariamente en ese orden. ¿Cuántos dulces hay en el frasco?

Problema 5. En el rectángulo $ABCD$, P, Q, R y S son puntos medios de los lados. Si AB mide 18 cm, BC mide 12 cm y M es el punto medio de RS, ¿cuántos centímetros cuadrados mide el área del triángulo MPQ?



Problema 6. Isaac escribe en una tabla de 9×9 las tablas de multiplicar, por ejemplo en el renglón 3, columna 5, va el 15. ¿Cuánto es la suma de los 81 números de la tabla?

Problema 7. Considera un número de 4 dígitos. El primer dígito, el de las unidades de millar, indica la cantidad de 0's que se han escrito en dicho número. El segundo dígito, el de las centenas, indica la cantidad de 1's que se usan en la escritura del número. El tercer dígito, el de las decenas, representa las veces que el 2 se escribe en ese número. El cuarto dígito, el de las unidades, representa las veces que el 3 se escribe en ese número. ¿Cuál es el mayor número que cumple la propiedad?

Problema 8. José Luis observa una lista de nueve números: $1, 5, \ldots, 161$. En esta lista, cada número, a partir del cuarto, es el resultado de la suma de los tres anteriores. ¿Cuál fue el tercer número de la lista?.

Problema 9. Pach anotó los primeros 2025 múltiplos de 2025, es decir:

$$2025 \times 1, \quad 2025 \times 2, \quad 2025 \times 3, \quad \ldots, \quad 2025 \times 2025.$$

¿Cuántos de ellos son cubos perfectos?

Problema 10. Marilú, Sebas, Dafne y Lupita fueron a la tienda. Marilú pagó 21 pesos por una pera, una manzana y un durazno; Sebas pagó 11 pesos por una pera y una manzana; a Dafne le cobraron 14 pesos por una manzana y un durazno. ¿Cuánto pagó Lupita por una pera y un durazno?

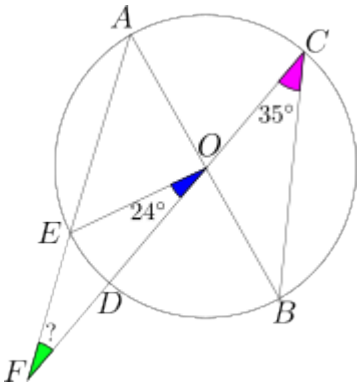
Problema 11. Sebas olvidó la clave de su celular pero recuerda que:

- Es de la forma $\overline{8a6b7c}$, donde a, b y c son dígitos.
- Es múltiplo de 44.
- Todos sus dígitos son distintos.
- $8 + a = 6 + b$.

¿Cuál es la clave de su celular?

Problema 12. ¿Cuántos números menores o iguales a 100 se pueden obtener como la suma de 3 potencias de 2 distintas?

Problema 13. La circunferencia que se muestra tiene centro O y diámetros AB y CD de manera que $\measuredangle DCB = 35°$. El punto E está sobre la circunferencia y se cumple que $\measuredangle EOD = 24°$. El punto F es la intersección de las rectas CD y AE. ¿Cuántos grados mide $\measuredangle AFC$?



.

Problema 14. Pau elige al azar dos fracciones distintas de la lista siguiente:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{40}{3}.$$

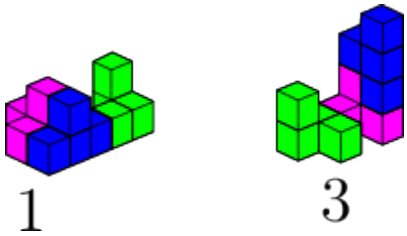
¿En cuántos casos la suma de las dos fracciones elegidas es un entero?

Problema 15. Un número entero de tres cifras cumple que:

- La suma de sus dígitos es 18.
- Si el número se lee al revés, el nuevo número es 198 menos que el original.
- El dígito del medio es igual al promedio de los otros dos. ¿Cuál es el número?

Soluciones de la prueba individual, nivel I

Solución 1. La figura 2 no se puede construir puesto que está formada por trece cubitos, pero las tres figuras en conjunto tienen doce cubos. En el siguiente esquema se muestra cómo unir las piezas para formar 1 y también para formar 3.



Solución 2. Primero notamos que el ciclo de verde a verde dura $70 + 5 + 85 = 160$ segundos. De las 8:00 AM a las 4:00 PM transcurren 8 horas que equivale a

$$8 \times 60 \times 60 = 28\,800 \text{ segundos.}$$

Como 28,800 es divisible entre 160, el ciclo vuelve a iniciar en verde justo a las 4:00 PM. Ahora, 5 minutos son:

$$5 \times 60 = 300 \text{ segundos.}$$

De las 4:00 PM a las 4:05 PM, el semáforo completa 1 ciclo de 160 segundos, quedando 140 segundos dentro del segundo ciclo. En este punto, faltan:

$$160 - 140 = 20 \text{ segundos.}$$

Solución 3. Si cualquiera de las tarjetas 2 o 3 dicen la verdad, entonces la cantidad de canicas es múltiplo de 3, así que no puede ser verdad también lo que dice la tarjeta 1. Entonces la tarjeta 1 es la equivocada.

Un ejemplo en que las otras dos tarjetas dicen verdad es si Sandra tiene 4 canicas, Alejandro tiene 5 y Gonzalo tiene 3.

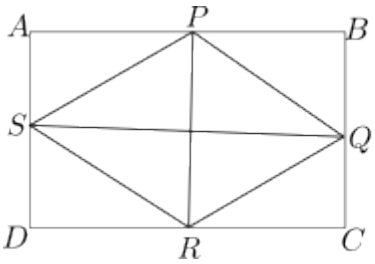
Solución 4. Primero observamos que los números 6, 7 y 13 son menores que la diferencia entre el menor, 487, y el mayor, 507, de las aproximaciones, así que la cantidad está entre 487 y 507. Ahora analicemos las posibilidades para la cantidad de dulces:

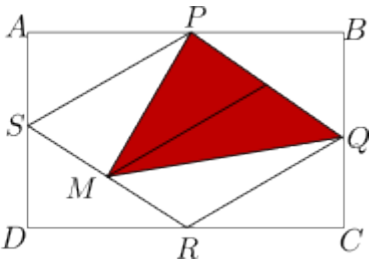
- $487 + 6 = 493$,
- $487 + 7 = 494$,
- $487 + 13 = 500$,
- $507 - 6 = 501$,
- $507 - 7 = 500$,
- $507 - 13 = 494$.

Notamos que 494 y 500 son los dos números que aparecen repetidos, pero como 500 es una de las aproximaciones y ninguna se aproximaba en 0, entonces la respuesta es 494 y verificamos que, efectivamente $494 = 500 - 6$.

Solución 5. Solución Denotemos el área de cualquier figura X por (X). Trazando líneas paralelas como las que se ven en las figuras notamos que se forman triángulos semejantes, de manera que

$$(PQRS) = \frac{(ABCD)}{2} \text{ y } (PMQ) = \frac{(PQRS)}{2}$$





Entonces $(MPQ) = \dfrac{(ABCD)}{4} = \dfrac{18 \times 12}{4} = 54\,\text{cm}^2$.

Solución 6. En el primer renglón aparecen los números del 1 al 9; en el segundo renglón aparecen esos números multiplicados por 2, etc. Entonces la respuesta es

$$\begin{aligned} & (1+2+\cdots+9) + 2\,(1+2+\cdots+9) + \cdots + 9\,(1+2+\cdots+9) \\ = \;& (1+2+\cdots+9)(1+2+\cdots+9) \\ = \;& 45 \times 45 = 2025. \end{aligned}$$

Solución 7. Sea $N = \overline{abcd}$ el número. Es claro que todos los dígitos son menores a 4. Procederemos por casos de acuerdo al valor de a.

- Si $a = 3$, entonces $N = 3000$, pero entonces el dígito de las unidades, d, es 0, así que debería haber 0 3′s pero hay un 3, entonces no es posible.
- Si $a = 2$, los posibles números serían: $\overline{200d}$, $\overline{20c0}$ y $\overline{2b00}$. Analicemos cada uno de ellos. Los números $\overline{200d}$ y $\overline{2b00}$ tienen 0 en las decenas pero ya hay un 2, así que ninguno de estos es posible. El número $\overline{20c0}$, sustituyendo c por 2, cumple las condiciones establecidas, resultando el número 2020, así que ése es el número buscado porque cualquier otro sería más pequeño.

Solución 8. Sea x el valor del tercer número, entonces la lista es:

$$1, 5, x, x+6, 2x+11, 4x+17, 7x+34, 13x+62, 24x+113.$$

Como $24x + 113 = 161$, tenemos que $24x = 48$, de donde $x = 2$.

Solución 9. Los múltiplos de 2025 son de la forma $2025k$, con k un entero. Observamos que $2025 = 45^2$, así que $2025k = 45^2k$, de donde $k = 45m^3$ para algún entero m. También tenemos que $2025k \leq 2025^2$, de donde $k \leq 2025$ y entonces $m^3 \leq 45$. Basta entonces encontrar los cubos perfectos menores o iguales que 45 y éstos son los siguientes tres: 1, $2^3 = 8$ y $3^3 = 27$, porque $4^3 = 4 > 45$.

Solución 10. Entre los 4 compraron 3 peras, 3 manzanas y 3 duraznos, que es el triple de lo que compró Marilú, así que entre todos pagaron $3 \times 21 = 63$ pesos. Como Marilú, Sebas y Dafne pagaron $21 + 11 + 14 = 46$ pesos, entonces lo que pagó Lupita fue $63 - 46 = 17$ pesos.

Solución 11. el número es múltiplo de 4 y de 11. Si $c = 2$, por el criterio de división entre 11 tenemos que $c + b + a - (7 + 6 + 8) = c + b + a - 21$ debe ser múltiplo de 11, por lo que $a + b + c = 10$ o $a + b + c = 21$. También sabemos que $8 + a = 6 + b$, de donde $2 = b - a$, y que, por ser el número múltiplo de 4, las posibilidades para c son $c = 2$ y $c = 6$, pero c no puede ser 6 porque los dígitos del número son todos distintos.

Si $c = 2$ y $a + b + c = 21$, entonces $a + b = 19$, lo cual no es posible porque a y b son dígitos.

Si $c = 2$ y $a + b + c = 10$, entonces $a + b = 8$ y, como $b - a = 2$ tenemos que $a = 3$ y $b = 5$. Así, el número es 836572.

Solución 12. Hay 7 potencias de 2 menores a 100 (desde $2^0 = 1$ hasta $2^6 = 64$.

La mayor suma que podemos hacer sin usar el 64 es $32+16+8 = 56$, que es menor a 100. Por lo tanto, cualquier combinación de 3 números de los 6 primeros nos dará algún número que cumple las condiciones del problema. Hay $\binom{6}{3} = 20$ maneras de elegir 3 números de esos 6 primeros, por lo que tenemos 20 números que no usan el 64.

Ahora, si usamos el 64, notamos que $64 + 32 = 96$, así que con 64 y 32, el tercer número puede ser 4, 2 o 1, por lo que tenemos 3 números que cumplen. Si no usamos el 32, es fácil ver que cualquier combinación cumple. Por lo tanto, nos quedan 5 números para elegir (quitando 32) y queremos elegir 2 (porque el 64 ya lo elegimos), y esto lo podemos hacer de $\binom{5}{2} = 10$ maneras.

El total es $20 + 3 + 10 = 33$.

Solución 13. Usaremos varias veces que la suma de los ángulos en un triángulo es $180°$.

Como OA, OE, OC y OB son radios de la circunferencia,, tenemos que los triángulos AOE y COB son isósceles. Entonces $\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = 35°$, por lo que $\measuredangle COB = 180° - 2 \cdot 35° = 110°$. Ahora, $\measuredangle EOD = 24°$ y, por ser opuestos por el vértice, $\measuredangle AOD = \measuredangle COB = 110°$, de donde $\measuredangle AOE = 110° - 24° = 86°$ pero, como el triángulo AOE es isósceles, entonces

$$\measuredangle FAO = \frac{180° - 86°}{2} = \frac{94°}{2} = 47°.$$

Ahora, en el triángulo AFO tenemos

$$\measuredangle AFO = 180^\circ - (\measuredangle AOF + \measuredangle OAF) = 180^\circ - (110^\circ + 47^\circ) = 180^\circ - 157^\circ = 23^\circ.$$

Solución 14. Para que $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{3}$, se debe tener que $a+b$ es múltiplo de 3.

Trabajamos con residuos en la división entre 3. Notamos que hay 13 números con residuo 0, 14 números con residuo 1 y 13 números con residuo 2. Las posibilidades para los residuos de a y b de manera que $a+b$ sea múltiplo de 3 son las siguientes:

- $\{0,0\}$. Hay $\binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$. posibilidades.
- $\{1,2\}$. Hay $14 \times 13 = 182$ posibilidades.

En total son $78 + 182 = 260$.

Solución 15. Como el número de en medio es el promedio de los otros y la suma es 18, el de en medio es 6. Al invertirlos la diferencia es aproximadamente 200, así que el dígito de las centenas es 2 más que el de las unidades. Verificamos que 765 cumple: $765 - 567 = 198$.

Competencia Internacional de Matemáticas 2025

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2025, se llevó a cabo del 14 al 18 de agosto de 2025 en Da Nang, Vietnam.
La IMC se conforma por dos concursos que se desarrollan de manera paralela: la Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition (IWYMIC), orientada a estudiantes de nivel secundaria y la Elementary Mathematics International Contest (EIMC), para nivel primaria. Desde 2010, México participa en la IWYMIC y desde 2017 en la EMIC. Este año, nuestro país propuso 5 de los 50 problemas que se usaron para la competencia.
México participó con un equipo de primaria y un equipo de secundaria, de cuatro integrantes cada uno. El equipo de Primaria que ganó medalla de plata por grupos estuvo integrado por:

- Miroslav Rybin Nikiforchina (Chiapas)
- Nicolás Valdez Lomelí (Jalisco)
- Briana Melchor Valdez (Guerrero
- Jesús Gadiel Pintor Sánchez (Querétaro)

El equipo de Secundaria ganó medalla de bronce por equipos, tuvo por integrantes:

- Carlos Daniel Maya Rojas (Hidalgo)
- Sebastián Guzmán Morán (Jalisco)
- Gonzalo Díaz Mercado (Morelos)
- Derek Elías Ortiz (Zacatecas)

Los resultados en la prueba individual consisten en 2 medallas de bronce para los alumnos de primaria Jesús Gadiel Pintor Sánchez (originario de Querétaro), Miroslav

Rybin Nikiforchina (Chiapas), 2 menciones honoríficas para Briana Melchor Valdez (Guerrero) y Nicolás Valdez Lomelí (Jalisco). En la categoría de secundaria Carlos Daniel Maya Rojas (Hidalgo), ganó medalla de bronce y Gonzalo Díaz Mercado (Morelos), mención honorífica.

Este año participaron 234 competidores en nivel primaria y 267 en nivel secundaria, provenientes de 31 países. La mayor parte de los países son del sudeste asiático, los cuales tiene un nivel muy alto de competencia y son líderes en la Olimpiada Internacional de Matemáticas para preuniversitarios, por lo que la participación de los pequeños en este certamen constituye una gran experiencia para su carrera olímpica. Los únicos países de América que participaron en 2025 fueron México, Estados Unidos, Perú y Canadá. Además, la delegación obtuvo un trofeo especial por la delegación más amistosa en la noche cultural.

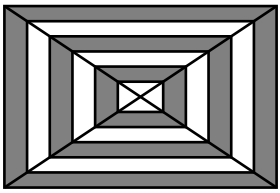
Los líderes y colíderes de los equipos fueron:

- Líder: Dr. Hugo Villanueva Méndez (Puebla)
- Líder: M en C. César Guadarrama Uribe (Yucatán)
- Colíder: Maestra Kenya Verónica Espinosa Hurtado (Ciudad de México)
- Colíder: Dr. Sergio Guzmán Sánchez (Chiapas)

Figura 1: Delegación mexicana en la IMC 2025

Prueba Individual, Nivel Primaria (Keystage 2)

Problema 1. En el diagrama mostrado, ambas diagonales del rectángulo $ABCD$ se dividen en 12 segmentos iguales. Si el área total de todas las regiones blancas dentro del rectángulo ABCD es 10 cm², ¿cuál es el área total, en cm², de las regiones sombreadas ?



Problema 2. Diez amigos estaban sentados en una mesa redonda. Siguiendo la dirección de las manecillas del reloj, a cada uno de ellos se le preguntó: "¿Cuál es la suma de las edades de tus dos vecinos?" Las respuestas (dadas en el mismo orden) fueron: 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36 y 38. ¿Qué edad tiene la persona que contestó 26?

Problema 3. Alvin y Bob, por turnos, toman canicas de una bolsa. Alvin comienza tomando una canica, luego Bob t oma dos canicas, luego Alvin toma tres canicas, luego Bob toma cuatro canicas, y así sucesivamente. Si, durante su turno, alguno de ellos no encuentra canicas suficientes en la bolsa, entonces toma todas las canicas que quedan. Al final, Alvin tiene 101 canicas. ¿Cuántas canicas había en la bolsa al principio?

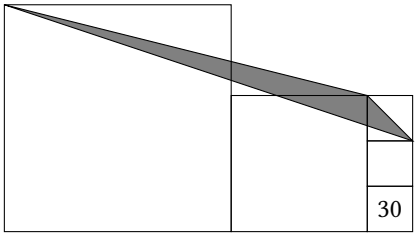
Problema 4. Cuatro líneas rectas se dibujan en un plano. ¿Cuál es el máximo número de ángulos de 60° que se pueden formar usando estas cuatro líneas?

Problema 5. En una clase de Matemáticas, las calificaciones de los estudiantes se obtienen sólo a base de exámenes, todos ellos con el mismo peso. Cuando Eva obtiene 98 en cierto examen, el promedio de sus exámenes hasta ese momento se incrementa en 1 punto. Pero cuando ella obtiene 70 en el siguiente examen, su promedio baja 2 puntos. Incluyendo esos dos exámenes, ¿cuántos exámenes ha presentado Eva?

Problema 6. ¿Cuál es la suma de los mayores tres números de cuatro dígitos de la forma VIMC tales que V, I, M y C son todos distintos, V es par, y VI, IM y MC son todos números primos de dos dígitos?

Problema 7. Para cada uno de los primeros 2025 enteros positivos, Tom calculó el product o de sus dígitos. ¿Cuál es la suma de todos los productos que Tom calculó?

Problema 8. Cinco cuadrados se dibujan uno junto a otro, como se muestra en el diagrama. Si el área de cada uno de los cuadrados más pequeños es 30 cm², ¿cuál es el área, en cm², del triángulo sombreado?



Problema 9. La siguiente tabla (incompleta) registra el número de estudiantes con una cantidad de canicas dada:

canicas	0	1	2	3	⋯	13	14	15
estudiantes	9	5	7	23	⋯	5	2	1

Adicionalmente, sabemos lo siguiente:

- El máximo número de canicas que un estudiante tiene es 15.
- Los estudiantes con 3 o más canicas tienen un promedio de 6 canicas, cada uno.
- Los estudiantes con 12 o menos canicas tienen un promedio de 5 canicas, cada uno.

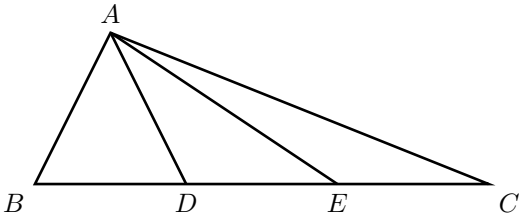
¿Cuál es el número total de canicas que, en conjunto, tienen todos los estudiantes?

Problema 10. La señora Dao debe colocar cada uno de los dígitos 1, 3, 4, 6, 7, 8 y 9 en una de las casillas siguientes, usando cada dígito exactamente una vez, de forma que la igualdad sea correcta.

$$\square + \square - \square - \square + \square + \square - \square = 2$$

¿De cuántas maneras diferentes puede hacer esto? (Nota: Dos soluciones se consideran diferentes si los números colocados difieren en al menos una casilla).

Problema 11. En el diagrama siguiente, ABC es un triángulo con $\angle A = 90^\circ$ $AB = 15$ cm y $AC = 36$ cm. Sean D y E puntos sobre BC tales que $BD = DE = EC$. ¿Cuál es el valor, en cm², de $AD^2 + AE^2$?

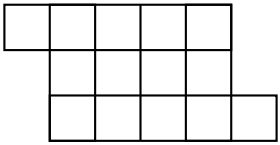


Problema 12. Cinco niños : Alicia, Beto, César, David y Emilia, y tres adultos, Franco, Gabo y Hugo, se van a sentar en una fila con ocho asientos, de tal forma que:

- No haya dos adultos sentados en asientos adyacentes;
- Beto se sienta a la izquierda de Alicia y a la derecha de César;
- David se sienta a la derecha de Emilia.

¿De cuántas formas diferentes pueden estas ocho personas sentarse?

Problema 13. ¿De cuántas maneras diferentes puede la figura siguiente dividirse, cortando sobre las líneas de la cuadrícula, en dos partes idénticas (cada una con siete cuadrados unitarios conectados por sus lados)? Nota: Dos partes son idénticas si se pueden obtener una a partir de la otra mediante un número finito de reflexiones y/o rotaciones.



Problema 14. Un número de 7 dígitos $\overline{abcdefg}$ se dice que tiene forma de V si cumple las siguientes propiedades:

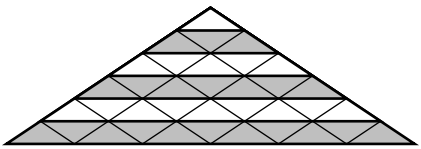
- Entre los dígitos a, b, c, d, e, f y g no hay dos con el mismo valor ;
- $a > b > c > d$;
- $d < e < f < g$.

¿Cuántos números de 7 dígitos con forma de V existen ?

Problema 15. Si p, qyr son números primos menores que 20 que satisfacen $p^2 + q^2 = r^3$, ¿cuál es el máximo valor posible de $p + q + r$?

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel Primaria

Solución 1. Consideremos la siguiente región triangular del diagrama, la cual ha sido dividida en triángulos semejantes.



Observemos quehay 15 triángulos blancos y 21 triángulos sombreados, por lo que la proporción "área sombreada" entre "área blanca" es $15/21$ y como en el rectángulo completo el área blanca es 10 cm², al calcular la proporción obtenemos que el área sombreada será de 14 cm².

Solución 2. Si representamos las 10 edades por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$, las condiciones del problema nos dicen que:

$$\begin{aligned} a_{10} + a_2 &= 20 \\ a_1 + a_3 &= 22 \\ a_2 + a_4 &= 24 \\ &\vdots \\ a_9 + a_1 &= 38. \end{aligned}$$

Si sumamos las respuestas de los que están en posiciones impares, obtendremos

$$(a_{10} + a_2) + (a_2 + a_4) + (a_4 + a_6) + (a_6 + a_8) + (a_8 + a_{10})$$

que deberá ser igual a $20 + 24 + 28 + 32 + 36 = 140$, por lo que la suma de las edades pares es la mitad, es decir, 70:

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 70.$$

Por otro lado, la respuesta 26 la dio la cuarta persona, con edad a_4, por lo que

$$a_4 = 70 - (a_2 + a_6 + a_8 + a_{10}).$$

Pero $a_2 + a_{10} = a_1 = 20$ y $a_6 + a_8 = 32$, de donde concluimos que $a_4 = 18$.

Solución 3. Alvin recoge los números impares, por lo que tiene $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n–1) = n^2$ canicas. Sin embargo 101 no es un cuadrado perfecto, eso solo puede pasar si Alvin tuvo el último turno y recogió todas las que había pero eran menos de las que debería tocarle.

En otras palabras, Alvin toma la cantidad completa en 10 turnos, sumando 100 canicas, y luego en su undécimo turno queda una canica en la mesa y la toma.

Lo anterior quiere decir que la suma de Bob fue $2 + 4 + 6 + \cdots + 20 = 110$ y, por tanto, en la bolsa había al inicio $101 + 110 = 211$ canicas.

Solución 4. Cuando dos líneas distintas se encuentran,forman cuatro ángulos, de los cuales a lo más dos pueden ser agudos y de $60°$.

Si una tercerca línea pasa por la intersección de las dos anteriores, se pueden formar a lo más 6 ángulos de $60°$ (cuando divide a los dos ángulos obtusos de $120°$ que son opuestos por el vértice). Por otra parte, si la tercera línea corta a las dos primeras en

puntos distintos, en cada intersección a lo mas se pueden obtener dos ángulos agudos de $60°$. En cualquiera de los dos casos anteriores, con tres líneas se puede obtener como máximo seis ángulos de $60°$.

Cuando se dibuje una cuarta línea, de manera que añada nuevos ángulos de $60°$, quedará paralela a alguna de las anteriores, y por tanto solo podrá cortar a dos de ellas. Como en cada corte añade dos ángulos de $60°$, concluimos que el máximo posible es de diez ángulos de $60°$.

Solución 5. Si m es el número de exámenes que tomó antes de los dos nuevos, y si P es el promedio antes del examen en donde sacó 98, tenemos que los dos promedios posteriores son $P+1$ y $P-2$.

Antes de los dos exámenes finales, la suma de todas sus calificaciones era mP. Al presentar el examen siguiente, la suma total es $mP+98$, pero como hay $m+1$ exámenes, el nuevo promedio se calcula como:

$$\frac{mP+98}{m+1} = P+1.$$

Al simplificar tenemos $mP+98 = (m+1)(P+1)$ y luego $m+P = 97$.

Pero luego del examen final, habrá presentado $m+2$ exámenes con una suma total de $mP+168$ puntos, de modo que

$$\frac{mP+168}{m+2} = P-1.$$

Al hacer una simplificación análoga llegamos a $2P-m = 170$.

Si resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $m+P = 97$, $2P-m = 170$, encontramos que $m = 8$ y por tanto Eva tomó 10 exámenes en total.

Solución 6. Como VI es un primo de dos dígitos, y V es par, solo tenemos que considerar las posibilidades $23, 29, 41, 43, 47, 61, 67, 83$ y 89.

Dado que queremos encontraar el número $VIMC$ más grande posible, nuestra búsqueda debe iniciar con los valores de VI más grandes posibles.

Cuando VI es 89, M no puede ser 1 o 3 porque IM sería múltiplo de 3. Así $M = 7$, por lo que las posibilidades para $VIMC$ serían 8971 u 8973. Ya tenemos así los dos valores más grandes posibles.

Para encontrar el tercero, tomamos $VI = 83$, por lo que M no puede ser 9 y las posiblidades son 1 o 7, y nos conviene tomar 7. En esta situación el mayor posible valor para $VIMC$ es 8379.

Concluimos que la respuesta es $8973+8971+8379 = 26323$.

Solución 7. La suma de los productos de cifras desde 1 hasta 9 es 45.

La suma de productos de cifras desde 11 hasta 99 la podemos calcular observando que

$$\begin{aligned}(1\cdot 1)+(1\cdot 2)+\cdots(1\cdot 9)&=1(1+2+\cdot 9)=1\cdot 45\\(2\cdot 1)+(2\cdot 2)+\cdots(2\cdot 9)&=2(1+2+\cdot 9)=2\cdot 45\\&\vdots\\(9\cdot 1)+(9\cdot 2)+\cdots(9\cdot 9)&=9(1+2+\cdot 9)=9\cdot 45\end{aligned}$$

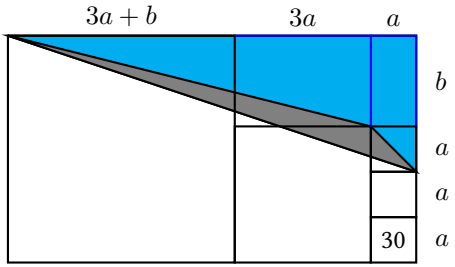
de modo que la suma total es $1\cdot 45+2\cdot 45+\cdots+9\cdots 45=45^2$.

Un argumento similar muestra que la suma de cifras desde 101 hasta 999 es 45^3 y de 1001 hasta 1999 también es 45^3 (la cifra de millares siempre es 1).

Todos los números desde 2000 hasta 2025 incluyen un cero y por tanto el producto de sus cifras se anula.

Por tanto, la respuesta es $45+45^2+2\cdot 45^3=184320$.

Solución 8. Denotemos por a la medida del lado de los cuadrados más pequeños y por b la diferencia de las medidas de los lados del cuadrado mayor con el intermedio. Completemos el rectángulo completo, y podemos observar que la zona sombreada de gris se encuentra completamente contenida dentro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $7a+b$ y $a+b$.



Podemos calcular el área sombreada de gris restando al área del triángulo rectángulo, la zona sombreada de azul. Tenemos entonces:

$$\frac{(a+b)(7a+b)}{2}-\frac{(6a+b)b}{2}-ab-\frac{a^2}{2}$$

que tras simplificar se reduce a $3a^2$ y por tanto tendrá un valor de $3\cdot 30=90$ cm².

Solución 9. Sea x el número de estudiantes con una cantidad de canidas que va desde $c=4$ hasta $c=12$ (las que no aparecen en la tabla).

Del dato de que los estudiantes con 3 o más canicas tienen un promedio de 6 canicas, deducimos que ellos tienen $(23+x+5+2+1)\cdot 6=186+6x$, y añadiendo las cantidades de los que tienen menos, obtenemos que el total de canicas es $205+6x$.

De manera similar, los alumnos que tienen 12 o menos canicas tienen en promedio 5, por lo que entre ellos tienen $(9+5+7+23+x)\cdot 5 = 220+5x$ canicas, y añadiendo las cantidades de los que tienen más, obtenemos que el total de canicas es $328+5x$.

Igualando ambas expresiones nos permite hallar que $x = 123$ y por tanto el total de canicas será 943.

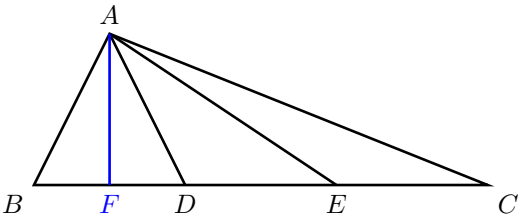
Solución 10. Observemos para comenzar, que cuator de los números tienen un signo positivo y tres tienen un signo negativo.

Si todos hubieran sido positivos, el resultado sería $1+3+4+6+7+8+9 = 38$. Pero cuando cambiamos un signo, en realidad estamos restando dos veces ese número (uno para cancelarlo, y otro para tener el negativo). Si el problema indica que el resultado de la operación es 2, quiere decir que de 38 restamos 36, por lo que la suma de los números que cambian signo en realidad es 18.

Hay cuatro formas de lograr una suma igual a 18 al sumar tres números de la lista: $(1,8,9)$, $(3,6,9)$, $(3,7,8)$ y $(4,6,8)$.

Por tanto el total de formas de llenar las casillas la podemos obtener al multiplicar el número de formas de elegir cuál de esas ternas se usan con el número de formas de revolver sus elementos, y luego multiplicando por el número de formas de revolver las posiciones que quedaron positivas. Lo anterior se puede hacer de $4\cdot 3!\cdot 4! = 576$ maneras.

Solución 11. Tracemos la altura AF del triángulo ABC.



Por el teorema de Pitágoras, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 36^2 = 39^2$, por tanto $BC = 39$ y entonces $BD = DE = EC = \frac{BC}{3} = 13$ cm.

Dado que $\angle ABF = \angle CBA$ y $\angle AFB = 90°$, los triángulos ABF y CBA son semejantes y por ello $\frac{BF}{BA} = \frac{BA}{BC}$. Lo anterior nos dice que $BF = \frac{BA^2}{BC} = \frac{15^2}{39} = \frac{75}{13}$ cm, y por tanto $FD = BD - BF = 13 - \frac{75}{13} = \frac{94}{13}$ cm.

De la semejanza entre los triángulos ABF y CBA, tenemos también que $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$. Por tanto $AF = \frac{12}{5}\cdot BF = \frac{12}{5}\cdot\frac{75}{13} = \frac{180}{13}$ cm.

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} AD^2 + AE^2 &= (AF^2 + FD^2) + (AF^2 + FE^2) \\ &= AF^2 + FD^2 + AF^2 + (FD + DE)^2 \\ &= \left(\frac{180}{13}\right)^2 + \left(\frac{94}{13}\right)^2 + \left(\frac{180}{13}\right)^2 + \left(\frac{94}{13} + 13\right)^2 \\ &= \frac{142805}{169} = 845. \end{aligned}$$

Solución 12. Primero colocamos a los 5 niños en fila y luego haremos espacio para los adultos (que no deben sentarse en posiciones adyacentes).

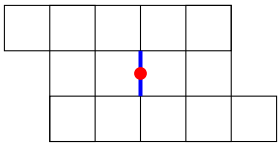
Hay seis espacios posibles para los adultos (cuatro *entre* los niños y dos en los extremos). El número de formas de acomodar tres adultos en seis espacios es $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Ahora, acomodemos a los niños. De los cinco lugares posibles, vamos a escoger tres, en los cuales deberán ir, de izquierda a derecha, César, Beto y Alicia. Lo anterior lo podemos hacer de $\binom{5}{3} = 10$ formas. Los dos lugares disponibles quedan fijos, pues el que está a la derecha debe ser de David y el de la izquierda de Emilia.

Por el principio de la multiplicación, el número total de ordenamientos posibles es $120 \cdot 10 \cdot 1 = 1200$.

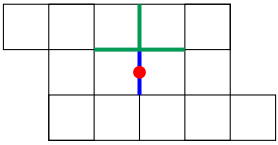
Solución 13. La observación inicial es que la figura posee simetría central y que al ser dividida en dos regiones idénticas, necesariamente serán simétricas respecto a este centro (las posiciones relativas deben ser las mismas para poder cubrir las casillas más lejanas del centro).

Procedemos entonces con un análisis por casos.

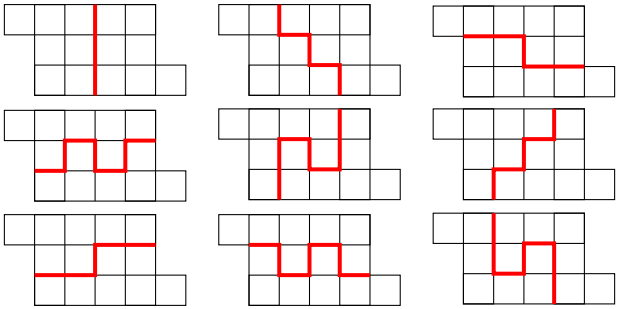


Si el segmento marcado en azul no es parte de la zona de recorte, entonces una de las regiones, que denotaremos por A, no contendrá el punto rojo central. La región simétrica B de A (respecto del centro) queda contenida también en la figura, y tampoco contendrá al centro, por lo que la suma de sus áreas será menor al área total, lo que contradice que cubren toda la figura. Tenemos, entonces, que cualquier recorte debe pasar necesariamente por el centro.

Procedemos con una división en casos, dependiendo de cuál de las tres líneas verdes en la siguiente figura es parte del corte.



Las nueve posibilidades son las siguientes.



Solución 14. Hay $\binom{10}{7} = 120$ formas de elegir los siete dígitos que se van a usar. El más pequeño tiene que ir en la posición d. Luego, elegimos tres de ellos para llenar las posiciones $c < b < a$, lo cual lo podemos hacer de $\binom{6}{3} = 20$ formas, y los tres restantes quedan determinados como $e < f < g$.

Por tanto, el número de formas de hacer el proceso completo es $120 \cdot 20 = 2400$.

Solución 15. Dado que $r^3 = p^2 + q^2 \geq 2^2 + 2^2 = 2^3$, tenemos que $p = q = r = 2$ con suma $p+q+r = 6$ es una solución y que $r > 2$ en cualquier otra posible solución.

Suponiendo $r > 2$, por paridad, uno de los números p, q debe ser igual a dos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $q = 2$, y por tanto $p^2 + 4 = r^3$.

Como $p^2+4 \leq 19^2+4 = 365 < 8^3$, basta con revisar las posibilidades $r = 3, 5, 7$, y decidir en cuál de ellas $r^3 - 4$ es un cuadrado, lo cual sucede únicamente cuando $r = 5$, y entonces los valores son $p = 11, q = 2, r = 5$, con suma $p + q + r = 18$ y por tanto 18 es el máximo valor posible de la suma.

Olimpiada Internacional de Matemáticas 2025

La 66ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, 2025, se realizó en Sunshine Coast, Australia del 10 al 21 de julio, en la que compitieron 630 participantes de 110 países.

México logró el lugar 31 del ranking internacional, siendo el segundo mejor país de Iberoamérica. Todos los integrantes de la delegación mexicana obtuvieron medalla, y estuvo conformada por los estudiantes:

- Takumi Higashida Martínez (CDMX), medalla de plata
- Emmanuel Buenrostro Briseño (Jalisco), medalla de plata
- Héctor Juan Villareal Corona (CDMX), medalla de bronce
- Javier Caram Quirós (CDMX), medalla de bronce
- Mateo Iván Latapí Acosta (CDMX), medalla de bronce
- Iker Torres Terrazas (Chihuahua), medalla de bronce

Examen Día 1

Problema 1. Una recta del plano se llama soleada si no es paralela ni al eje x, ni al eje y, ni a la recta $x + y = 0$. Sea $n \geq 3$ un entero dado. Determine todos los enteros no negativos k para los que existen n rectas distintas del plano que satisfacen las dos condiciones siguientes:

- Para cualesquiera enteros positivos a y b con $a + b \leq n + 1$, el punto (a, b) está en al menos una de estas rectas; y
- Exactamente k de estas n rectas son soleadas.

Problema 2. Sean Ω y Γ circunferencias de centros M y N , respectivamente, tales que el radio de Ω es menor que el radio de Γ. Supongamos que las circunferencias Ω y Γ se

Figura 2: Delegación mexicana en la 66ª IMO

cortan en dos puntos distintos A y B. La recta MN corta a Ω en C y a Γ en D, de forma que los puntos C, M, N y D están sobre esa recta en ese orden. Sea P el circuncentro del triángulo ACD. La recta AP corta de nuevo a Ω en $E \neq A$. La recta AP corta de nuevo a Γ en $F \neq A$. Sea H el ortocentro del triángulo PMN.

Demuestre que la recta paralela a AP que pasa por H es tangente al circuncírculo del triángulo BEF. (El *ortocentro* de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas).

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se llama *genial* si

$$f(a) \text{ divide a } b^a - f(b)^{f(a)}$$

para todos los enteros positivos a y b.

Determine la menor constante real c tal que $f(n) \leq cn$ para todas las funciones geniales f y todos los enteros positivos n.

Examen Día 2

Problema 4. Un *divisor propio* de un entero positivo N es un divisor positivo de N que es distinto a N.

La sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ consiste de enteros positivos, cada uno de los cuales tiene al menos tres divisores propios. Para cada $n \geq 1$, el entero a_{n+1} es la suma de los tres mayores divisores propios de a_n.

Determina todos los valores posibles de a_1.

Problema 5. Alicia y Beto están jugando al juego del koala, un juego para dos jugadores cuyas reglas dependen de un número real positivo λ, que ambos jugadores conocen. En el n-ésimoturno del juego (comenzando con $n = 1$) ocurre lo siguiente:

- Si n es impar, Alicia escoge un número real no negativo x_n tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \lambda n.$$

- Si n es par, Beto elige un número real no negativo x_n tal que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n.$$

Si uno de los jugadores ya no puede elegir un número x_n, el juego termina y el otro jugador gana. Si el juego continúa indefinidamente, ninguno de los dos jugadores gana. Ambos jugadores siempre conocen los números elegidos.

Determina todos los valores de λ para los cuales Alicia tiene una estrategia ganadora y todos los valroes de λ para lso cuales Beto tiene una estrategia ganadora.

Problema 6. Se considera una cuadrícula de 2025×2025 cuadrados unitarios. Matilde desea colocar algunas fichas rectangulares sobre la cuadrícula, que pueden ser de tamaños distintos, de modo que cada lado de cada ficha se encuentre sobre una línea de la cuadrícula y cada cuadrado unitario está cubierto por a lo más una ficha.

Determina el número mínimo de fichas que Matilde necesita colocar de modo que cada fila y cada columna, pero cuadrícula tiene exactamente un cuadro unitario que no está cubierto por ninguna ficha.

Soluciones Día 1

Solución 1 (Solución de Javier Caram Quirós)**.** Observemos que los puntos (a, b) que cumplen $a + b \leq n + 1$ forman una *escalera*. Abajo ilustramos el caso $n = 3$, mostrando también las configuraciones posibles para $k = 0, 1, 3$ (es decir, configuraciones de $n = 3$ líneas que cubran todos los puntos de las cuales hay $k = 0, 1, 3$ que no sean verticales, horizontales o paralelas a $x + y = 0$, indicadas por el color azul). No es muy complicado verificar que no hay configuraciones donde haya 2 líneas soleadas.

Las tres configuraciones descritas, sirven para demostrar que $k = 0, 1, 3$ son admisibles también para cualquier $n > 3$. Dado que siempre se obtiene un arreglo escalonado de puntos, basta usar el caso $n = 3$ para cubrir los tres renglones superiores de la escalera y los demás los cubrimos con líneas horizontales que no son soleadas y por tanto no modifican los valores de k.

Ahora, procedemos por inducción para demostrar que si $n \geq 3$, las únicas posiblidades son $k = 0, 1, 3$. El caso base es el que se analizó con anterioridad. Supongamos entonces que se ha demostrado que para todos los valores hasta $n = m$ los únicos valores de k posibles son $0, 1, 3$ (para los cuales ya vimos que siempre hay contrucción).

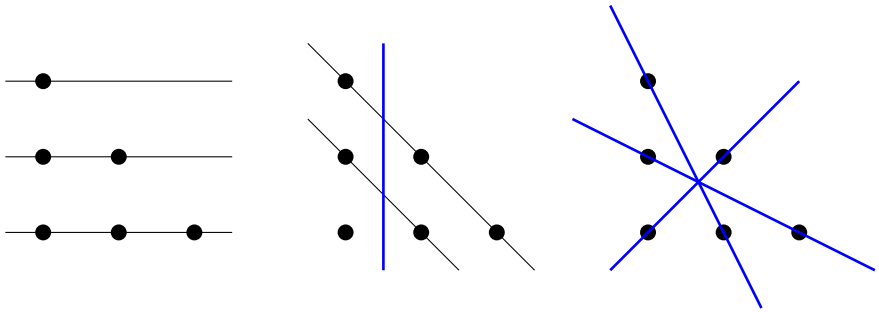


Figura 3: Las tres configuraciones posibles para $n = 3$, correspondientes a $k = 0, 1, 3$.

Consideremos ahora $n = m + 1$. Si todos los puntos de la forma $(1, y)$ o todos los puntos de la forma $(x, 1)$ están cubiertos por una sola línea, el resto de puntos equivale a un arreglo para $n = m$ y por hipótesis de inducción, al cubrirlos, solo podemos lograr $k = 0, 1$ o 3 líneas soleadas.

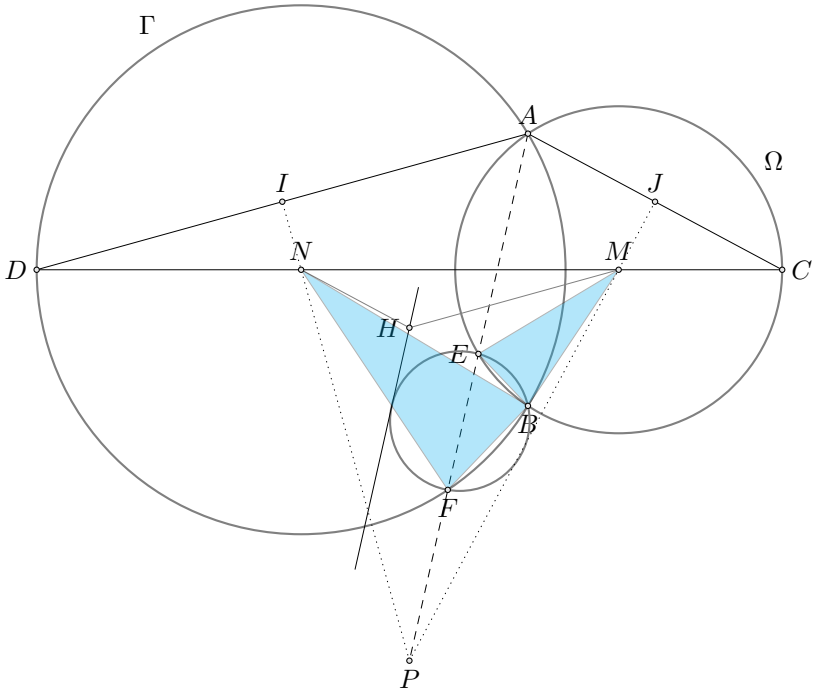
Por lo anterior, supongamos que no todos los puntos de la forma $(1, y)$ ni todos los de la forma $(x, 1)$ están cubiertos por una línea. Al ser $2m + 1$ puntos, necesariamente se usarán al menos $n = m + 1$ líneas para cubrirlos, pues hay al menos $n = m + 1$ puntos en la base de la escalera y ninguna recta puede cubrir más de uno.

Afirmamos que necesariamente los puntos $(1, m+1)$ y $(m+1, 1)$ están cubiertos por una sola línea, por que en caso contrario, los puntos $(1, 1)$, $(m + 1, 1)$, $(1, m + 1)$ están cubiertos por tres rectas diferentes. Las rectas que pasan por los dos últimos puntos, podrían haber cubierto otro punto de los bordes vertical y horizontal, así que faltan por cubrir $2m - 4$ puntos, que no se pueden cubrir con menos de $m - 2$ rectas (ya que cada recta cubre a lo más dos) y por tanto ya usamos $m-2+3 = m+1 = n$ rectas distintas. Sin embargo, para $n > 3$ hay al menos dos puntos en el borde diagonal del arreglo, uno de los cuales podría estar cubierto por la recta que pasa por $(1, 1)$, pero siempre quedaría al menos un punto sin cubrir si solo usamos $n = m + 1$ rectas. Por tanto, necesariamente debe haber en esta situación, una recta que una los puntos $(1, m + 1)$ y $(m + 1, 1)$.

Finalmente, notemos que al haber una recta que una los puntos $(1, m + 1)$ y $(m + 1, 1)$, esa no será soleada, y si la dibujamos de primero, el resto de los puntos forma una escalera de tamaño $n = m$, la cual solo puede tener $k = 0, 1, 3$ rectas soleadas por hipótesis de inducción.

Concluimos entonces que, para cualquier $n \geq 3$, los valores de k admisibles son precisamente $k = 0, 1, 3$.

Solución 2 (Solución de Héctor Villareal Corona)**.** Denotemos $\alpha = \angle ACD = \angle BCD$ y $\beta = \angle ADC = \angle BDC$. Sean I, J los puntos medios de AD y AC. Por ser mediatrices, los puntos I, M, P son colineales, al igual que los puntos J, N, P.



Observemos que $NH \parallel AJ$ por ser ambas perpendicualres a PM, y de forma análoga $MH \parallel AI$. Lo anterior quiere decir que $\angle HNM = \alpha$ y $\angle HMN = \beta$. Por la circunferencia Ω, $\angle EBF = \angle ACB = 2\alpha$ y por Γ obtenemos $\angle ADB = \angle AFB = 2\beta$.

El circuncentro del $\triangle EBF$ es el punto de intersección de las mediatrices de BE y BF. Adicionalmente $ME = MB$, $NB = NF$, y también $\angle FNB = \angle EMB = 2\angle FAB$ por las relaciones de ángulo central e inscrito en Γ y Ω.

Tenemos una semejanza en espiral que transforma el triángulo BME en el BNF y otra que manda el triángulo BMN en el BEF. Sea X el circuncentro de MHN y entonces $\angle NXM = 2\alpha + 2\beta$. Sea X' el punto tal que está sobre la tangente al círculo BEF y paralela a EF del mismo lado que H, entonces bajo la semejanza en espiral, X se transforma en X'.

Siendo $BFFH'$ cíclico, la tangente en X' paralela a EF, dado que $FX'E$ es isósceles con $X'F = XE$:

$$\angle FX'E = 180^\circ - \angle EBF = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta = \angle NXM.$$

Siendo P circuncentro, $\angle APC = 2\beta$. Además $\angle EBX = 90^\circ - \alpha + \beta - (90^\circ - \alpha - \beta) = 2\beta$ y así XB es tangente a la circunferencia BEF, X' está en la circunferencia BEF, XX' es tangente a la misma, y por tanto basta demostrar que XHX' son colineales.

La línea tangente por X' es paralela a EF, entonces basta probar $XH \parallel EF$. Pero si K es la intersección de HA con NM, dado que $KA \parallel KH, KN \parallel KC, NH \parallel AC$, los triángulos $\triangle AKC$ y $\triangle HKN$ son semejantes y existe una semejanza espiral centrada en K que manda $\triangle AKC$ en $\triangle HKN$. Por $AD \parallel HM$, $DK \parallel KC$ manda D a M y manda el $\triangle ADC$ al $\triangle HMN$, y entonces manda D a X y $DA \parallel XH$, lo cual completa la demostración.

Solución 3. La menor constante es $c = 4$. Primero mostraremos que es una cota válida. Observamos que $f(n) = n$ es una solución a la ecuación funcional que satisface trivialmente $f(n) \leq 4n$ para toda n. Supondremos en adelante que existe un entero m tal que $f(m) \neq m$.

Sustituyendo $b = a$ en la condición del problema nos permite obtener $f(a) \mid a^a$ para toda a y, en particular, cuando a es un primo p, $f(p)$ es una potencia de p.

Se afirma que si p es primo y $f(n) \neq n$, entonces $f(p) = 1$ o $p \mid n - f(n)$. El argumento se obtiene si sustituimos $b = n$ y $a = p$, pues si $f(p) \neq 1$ entonces, siendo potencia de$p$, tendremos $p \mid f(p)$ y por tanto

$$p \mid n^p - f(n)^{f(p)}.$$

Aplicando el teorema de Fermat, $n^p \equiv n \pmod{p}$. Como $f(p)$ es potencia de$p$, tendremos $f(n)^{f(p)} \equiv f(n) \pmod{p}$. Por tanto $p \mid n - f(n)$.

Ahora, si q es un primo tal que $q > |m - f(m)|$, aplicando la afirmación con $p = q$ y $n = m$, dado que $q \not| m - f(m)$, tendremos $f(q) = 1$. En otras palabras, para primos q suficientemente grandes, $f(q) = 1$.

Afirmamos ahora que para cualquier primo impar p, se tiene $f(p) = 1$. Por el párrafo anterior, cualquier primo suficientemente grande q lo satisface. Para tal q tendremos $f(q) \neq q$, de modo que aplicando al afirmación con $n = q$ obtendremos $f(p) = 1$ o $f(q) \equiv q \equiv 1 \pmod{p}$. Si adicionalmente tenemos $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, podemos concluir $f(p) = 1$. Sin embargo, existen infinitos primos a tales que $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, consecuencia directa del teorema de Dirichlet para primos en progresiones aritméticas. Tomando uno de esos primos q (es decir, con $q > |m - f(m)|$ y $q \not\equiv 1 \pmod{p}$), concluimos $f(p) = 1$.

Para cualquier entero positivo n tenemos $f(n) \mod n^n$, por lo que cada divisor primo de $f(n)$ también divide a n. Sin embargo, si q es un divisor primo de n, sustituyendo $a = n, b = q$ y $f(q) = 1$ en el problema nos arroja $f(n) \mid q^n - 1$ por lo que q no es un divisor de $f(n)$. Por tanto el único divisor primo de $f(n)$ es 2. Así, para todo n positivo, $f(n)$ es una potencia de2. Además, si n es impar, $f(n) = 1$.

Sea $a = 2^x y$ con $x \geq 0$ y y impar. Entonces $f(a) = 2^z$ para algún $z \geq 0$, y afirmamos que $z \leq x + 2$, lo cual implica que $f(a) \leq 4a$ como se desea. Para cualquier impar b, tendremos $f(b) = 1$ y la condición del problema indica que $2^z \mod b^{2^x y} - 1 \pmod{2^z} - 1$, es decir, $b^{2^x y} \equiv 1 \pmod{2^z}$.

Ahora, $\phi(2^z)$ es una potencia de 2 y y es impar, por lo que existe un entero positivo c tal que $yc \equiv 1 \pmod{\phi(2^z)}$. Tomando $b?5^c$ obtenemos, por el teorema de Euler-Fermat,

que

$$1 \equiv b^{2^x y} \equiv (5^{yc})^{2^x} \equiv 5^{2^x} \pmod{2^z}.$$

Sin embargo, $5^{2^x} - 1 = \left(5^{2^{x-1}} + 1\right)\left(5^{2^{x-1}} - 1\right)$ y factorizando repetidamente tendremos

$$5^{2^x} - 1 = \left(5^{2^{x-1}} + 1\right) 5^{2^x} - 1 = \left(5^{2^{x-2}} + 1\right) \cdots (5^2 + 1)(5 + 1)(5 - 1).$$

Dado que cada factor de la forma $5^{2^k} + 1$ es congruente a $2 \pmod 4$, tendremos que la máxima potencia de 2 que lo divide es $2^1 = 2$, y por tanto la máxima potencia de 2 que divide a $5^{2^x} - 1$ es $x + 2$. como $2^z \mid 5^{2^x} - 1$, obtenemos $z \leq x + 2$. Por tanto, para todo entero positivo n se cumplirá $f(n) \leq 4n$.

Nos falta demostrar que no hay una mejor constante que $c = 4$. Definamos $f(n)$ como

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par y } n \neq 4 \\ 16 & \text{n=4.} \end{cases}$$

Verificamos la condición en f directamente para todos los valores de a.

- Si a es impar, entonces $f(a) = 1$ y la condición del problema es inmediata.
- Si a es par y distinto de 4, la condición se convierte en $2 \mid b^a - f(b)^2$. Por construcción de f, b y $f(b)$ tienen la misma paridad por lo que la condición se cumple.
- Si $a = 4$, entonces $f(a) = 16$ y la condición se convierte en $16 \mid b^4 - f(b)^{16}$. Si b es par, entonces $f(b)$ es también par, por lo que b^4 y $f(b)^{16}$ son ambos divisibles por 16. Si b es impar, entonces

  $$b^4 - f(b)^{16} = b^4 - 1 = (b - 1)(b + 1)(b^2 + 1).$$

  Los tres factores son pares, y como los primeros dos tienen diferencia 2, uno de ellos es múltiplo de 4, por lo que $b^4 - 1$ es múltuplo de 16, como se requiere.

  Por tanto, esta función satisface la condición y como $f(4) = 16$, el valor $c = 4$ es óptimo.

Solución 4. Si a_n es impar, entonces a_{n+1} es la suma de tres impares, por lo que también es impar. Además se cumplen

$$a_{n+1} \leq a_n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \leq a_n.$$

Tenemos entonces una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos, lo cual es una contradicción. Por tanto, todos los a_n son pares. Observemos que $4 \nmid a_n$. Entonces

$$a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{pq + 2p + 2q}{2pq}$$

será impar, lo cual contradice el párrafo anterior.

Definamos una función $f(n)$ de los enteros positivos en sí mismos dada por $f(13) = 11$„ $f(p) = p$ para los demás primos, y $f(ab) = f(a)f(b)$ para valores coprimos de a, b. Entonces $f(n) = (11/13)^{\nu_{13}(n)}n$. Suponiendo $a_n \neq a_{n+1}$, probaremos que $f(a_{n+1}) < f(a_n)$.

Si $a_{n+1} > a_n$, entonces $a_{n+1} = a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13a_n}{12}$, puesto que $a_{n+1} \neq a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$ se ha descartado. Entonces

$$f(a_{n+1}0) = \frac{11f(a_n)}{12} < f(a_n).$$

Si $a_{n+1} < a_n$ y $\nu_{13}(a_{n+1}) \geq \nu_{13}(a_n)$ entonces

$$\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = \left(\frac{11}{13}\right)^{\nu_{13}(a_{n+1})-\nu_{13}(a_n)}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1.$$

En caso contrario $a_{n+1} < a_n$ y $\nu_{13}(a_{n+1}) < \nu_{13}(a_n)$. Pero esto solo puede suceder cuando

$$a_{n+1} = a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13}\right) = \frac{43a_n}{52}$$

o cuando

$$a_{n+1} = a_n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26}\right) = \frac{8a_n}{13}.$$

Y en ambos casos se tiene $f(a_{n+1}) < f(a_n)$.

De esta manera, o $a_n = a_{n+1}$ (y la sucesión será constante a partir de este momento), o $f(a_n)$ es una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos, lo cual es una contradicción. Por tanto, a_n se vuelve constante a partir de cierto momento.

Observemos que si $a_n = a_{n+1}$ entonces $a_n = 6N$ para algún N primo relativo con 10. Vamos a encontrar todos los valores positivos de a_{n-1} suponiendo únicamente que a_n es múltiplo de 6. Sean $1a < d_1 < d_2 < d_3$ los menores divisores de a_{n-1}.

- Si a_{n-1} es impar, entonces a_n también, lo cual es falso.
- Si $d_1 = 2$ y d_2, d_3 son primos impares, y entonces a_n también es impar, como se probó arriba, lo cual es falso.
- Si $d_1 = 2$, $d_2 = p$ y $d_3 = 2p$, para algún $p > 3$, entonces $a_n = \frac{p+3}{2p}a_{n-1}$ no es múltiplo de 3.
- Si $d_1 = 2$, $d_2 = 4$ y $d_3 = p$, entonces $a_n = \frac{3p+4}{4p}a_{n-1}$ no es múltiplo de 3.

Se tiene entonces que $a_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13a_{n-1}}{12}$ o $a_n = a_{n-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = a_{n-1}$. En ambos casos a_{n-1} es también un múltiplo de 6 y podemos repetir el proceso para encontrar a_1, verificando $a_1 = 12^M6N$.

Solución 5. Respuesta:

1. Si $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces Beto tiene una estrategia ganadora.
2. Si $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces Alicia tiene estrategia ganadora.
3. Cuando $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ninguno tiene estrategia ganadora.

Consideraremos los casos por separado.

Si $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la estrategia ganadora de Beto es tomar el mayor número posible en cada turno. Específicamente, elegirá

$$x_{2k} = \sqrt{2 - x_{2k-1}^2}$$

en cada turno del juego.

En el primer turno, Alicia escoge un número no negativo $x_1 \leq \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, de modo que $2 - x_1^2 \geq 0$, y Beto puede tomar $x_2 = \sqrt{2 - x_1^2}$ para asegurar $x_1^2 + x_2^2 = 2$. En el tercer turno, Alicia debe tomar un número x_3 tal que $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\lambda$. Puede ser que no pueda hacerlo, en cuyo caso Beto gana, o en caso contrario, el mayor número que puede elegir satisface

$$x_3 \leq 3\lambda - x_1 - \sqrt{2 - x_1^2} \leq 3\lambda - \sqrt{2} < \lambda.$$

Aquí hemos usado que $x + \sqrt{2 - x^2} \geq \sqrt{2}$ para todo $x \in [0, \sqrt{2}]$, que podemos verificar elevando ambos lados al cuadrado. Ahora, como $x_3 < \lambda$, se tiene $2 - x_3^2 \geq 0$ y por tnato Beto puede elegir $x_4 = \sqrt{2 - x_3^2}$, dando $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$. Repitiendo el mismo argumento permite probar que, siempre y cuando Beto siga eligiendo $x_{2k} = \sqrt{2 - x_{2k-1}^2}$, Alicia perderá. Por otra parte, la estrategia de Beto también implica quedaría

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} = \sum_{i=1}^{k} \left(x_{2i-1} + \sqrt{2 - x_{2i-1}^2} \right) \geq k\sqrt{2},$$

en donde usamos que $x + \sqrt{2 - x^2} \geq \sqrt{2}$ de nuevo. Por tanto, tan pronto como k sea suficientemente grante tal que $k\sqrt{2} > \lambda(2k+1)$ (que necesariamente existe puesto que $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$), entonces Alicia no tiene una jugada legal en el turno $2k + 1$ y Beto gana.

Ahora, consideremos el caso cuando $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$. La estrategia ganadora de Alicia consiste en tomar $x_n = 0$ en varios turnos iniciales, y luego tomar un x_n *grande* en cierto momento. Vamos a revisar los detalles.

Primero mostramos que puede tomar $x_n = 0$ por tantos turnos iniciales ocmo desee. En el primer turno esto es obvio. Luego de $2k$ turnos, si escoge $x_n = 0$ para $n = 1, 3, \ldots, 2k - 1$ se cumplirá

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2k} \leq \sqrt{k(x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{2k}^2)},$$

por la desigualdad entre media aritmética. Suponiendo que Beto aún no ha perdido, se cumplirá $x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{2k}^2 \leq 2k$, lo cual implica

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} \leq k\sqrt{2} < \lambda(2k+1)$$

dado que $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Esto quiere decir que Alicia puede escoger $x_{2k+1} = 0$ en el siguiente turno, sin importar lo que haya hecho Beto hasta ese momento. Más precisamente, puede elegir cualquier número no negativo que satisfaga

$$x_{2k+1} \leq \lambda(2k+1) - k\sqrt{2} = k(2\lambda - \sqrt{2}) + \lambda.$$

Observemos que la cota dada crece aribitrariamente cuando k crece, puesto que $2\lambda - \sqrt{2} > 0$.

Ahora ya podemos describir la estrategia ganadora de Alicia. Sea ℓ un número entero suficientemente grande tal que

$$\frac{\ell\sqrt{2} + \sqrt{2\ell+2}}{2\ell+1} < \lambda,$$

lo cual se puede dado que $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Entonces Alicia elige $x_n = 0$ en los turnos $1, 3, \ldots, 2\ell - 1$ y luego toma

$$x_{2\ell+1} = \lambda(2\ell+1) - \ell\sqrt{2}$$

en el turno $2\ell+1$. Hemos probado que esas elecciones son siempre válidas sin importar lo que eto haga. Ahora observemos que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2\ell+1}^2 \geq x_{2\ell+1}^2 = (\lambda(2\ell+1) - \ell\sqrt{2})^2 > 2\ell + 2,$$

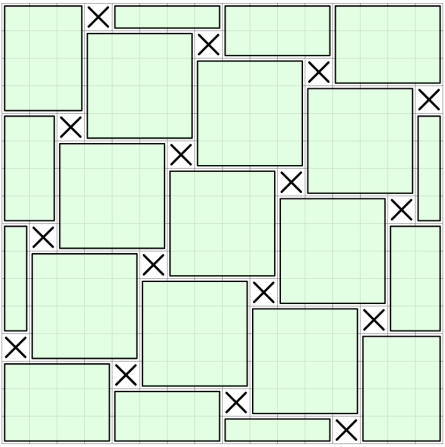
por la forma en que se definió $x_{2\ell+1}$ y ℓ, lo cual implica que Beto no tiene jugada válida en el siguiente paso y por tanto pierde.

Finalmente, cuando $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, el argumento de la primera parte muestra que Beto siempre puede hacer una jugada válida tomando $x_{2k} = \sqrt{2 - x_{2k-1}^2}$ en el turno $2k$, asegurándose de no perder, pero Alicia siempre puede responder tomando $x_{2k+1} = 0$ y por tanto tampoco pierde.

Solución 6. Matilde debe colocar al menos $2025 + 2 \cdot 45 - 3 = 2112$ fichas.

Consideremos el caso general de una cuadrícula de $n \times n$ donde $n = k^2$ y probemos que la respuesta es $x^2 + 2k - 3$. Para la construcción consideremos el siguiente patrón, ilustrado en el caso $k = 4$. Tiene $(k-1)^2$ fichas en el centro y $k-1$ alrededor de los lados.

Para la cota inferior, tomamos cualquier configuración de fichas y etiquetamos cada casilla descubierta con una X. Alrededor de la cuadrícula original ponemos cuatro fichas de $n \times 1$.



Una *ruta de subida* es una ruta que viaja por los lados de las casillas moviéndose siempre hacia arriba o a la derecha. notemos que permitimos rutas de subida de longitud cero. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_m$ la sucesión de X más larga posible con ls siguientes propiedades.

- Hay una ruta de subida que conexta la esquina inferior izquierda de la cuadrícula con la esquina inferior izquierda de la primera X.
- Para cada $i = 1, 2, \ldots, m-1$ existe una rita de subida que conecta la esquina superior derecha de x_i con la esquina inferior izquierda de x_{i+1}.
- Hay una ruta de subida desde la esquina superior derecha de x_m con la esquina superior derecha de la cuadrícula.

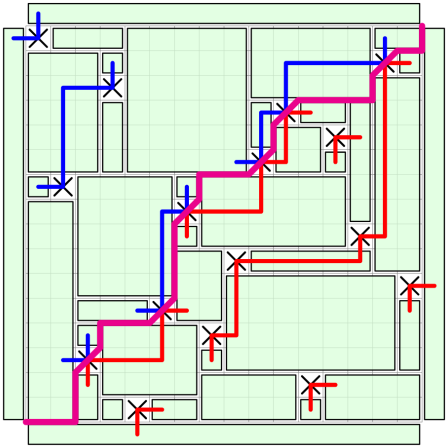
Estas rutas de subida junto con $x_1, x_2, \ldots, x_m$ forman una *gran barrera de coral* que divide el tablero en dos regiones. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de Xs en la región superior y sea $\mathcal{L}$ el conjunto en la región inferior. Denotemos por $\mathcal{X}$ al conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ que son las X dentro de la gran barrera de coral.

Para cada X en $\mathcal{X} \cup \mathcal{L}$, conectamos a dos fichas, la que está a su izquierda y a la que está debajo de ella. Esto crea varias *cadenas inferiores* disjuntas.

Como cada X se conecta a dos fichas, y cada ficha se conecta con a lo más dos Xs, cada cadena debe alternar entre fichas y Xs. Los ciclos no son posibles porque las X forman una sucesión creciente. Así, cada cadena debe comenzar y terminar con una ficha, porque no pueden cruzar la gran barrera de coral.

De manera similar, para cada X en $\mathcal{X} \cup \mathcal{L}$, la conectamos a dos casillas, la quetiene a su izquierda y a la que tiene arriba, lo cual crea una serie de *cadenas superiores* disjuntas, donde las fichas están en la región superior.

Estas cadenas cumplen propiedades análogas a las inferiores. Las cadenas superiores e inferiores deben ser disjuntas, salvo en las X de la gran barrera de coral. En el segundo diagrama se ilustra la situación con las cadenas azules y rojas, y la barrera en el centro de rosa.



Cada cadena tiene a lo más m casillas marcadas con X. Para verlo, supongamos que existe una cadena que contiene las casillas marcadas $y_1, y_2, \ldots y_l$ con $l > m$. Mostraremos que pueden usarse en una gran barrera de coral, lo cual contradice la maximalidad de m.

Por la construcción de la cadena, existe claramente una ruta de subida entre y_i y y_{i+1} para $i = 1, 2, \ldots, l-1$ mediante las fichas de la cadena. Para hallar la ruta que conecta la esquina inferior izquierda del tablero y la esquina inferior izquierda de y_1, notamos que en una teselación rectangular, siempre es posible moverse hacia abajo o a la izquierda desde cualquier vértice. De modo que, comenzando desde la esquina inferior izquierda de y_1, con esos movimientos es posible llegar a la esquina inferior izquierda del tablero. Una situacion análoga se tiene para las esquinas superiores derechas de la última X y la del tablero, lo cual nos arroja una gran barrera de coral más larga que la de las x_i, lo cual es una contradicción.

Regresamos ahora con las cadenas. Cada X en $\mathcal{U} \cup \mathcal{L}$ está exactamente en uan cadena, mientras que las X en $\mathcal{X}$ están en exactamente dos cadenas. Contando doblemente las X en $\mathcal{X}$, tenemos un total de $m+k^2$ casillas marcadas. Por nuestra afirmación anterior, cada cadena contiene a lo más m casillas marcadas, por lo que debe haber al menos $\frac{m+k^2}{m} = 1 + \frac{k^2}{m}$ cadenas. Como cada cadena tiene una ficha más que la cantidad de X, y diferentes cadenas tienen diferentes, la cantidad de fichas debe ser al menos

$$(m+k^2) + \left(1 + \frac{k^2}{m}\right) = k^2 + \left(m + \frac{k^2}{m}\right) + 1 \geq k^2 + 2k + 1.$$

Quitando las cuatro fichas añadidas alrededor en el inicio, nos dan al menos $k^2 + 2k - 3$ fichas, como se pide.

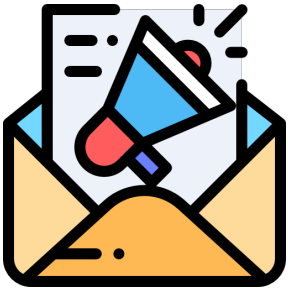
Voces de la comunidad olímpica

Bienvenidos y bienvenidas a esta nueva sección de la revista, donde en cada número publicaremos un mensaje de algunos miembros de la comunidad olímpica. El objetivo es poder dar a conocer las diferentes experiencias y perspectivas que nacen a partir de la participación en las olimpiadas y cómo es que este concurso se compone de muchas más cosas que un examen. Si quisieras compartir tu experiencia, ya sea que actualmente sigas participando, ya seas olímpico (a), seas entrenador (a), padre de familia, parte de un comité, envía tu escrito al correo:

`revistaomm@gmail.com`

y con gusto te leeremos para considerar publicarte en un siguiente número.

Esperamos disfruten de leer esta nueva sección tanto como nosotros disfrutamos crearla.



Itzel Cano Rivas

Ex-olímpica del estado de Guanajuato

¡Holaaa!

Mi nombre es Itzel Cano Rivas, y soy exolímpica del estado de Guanajuato.
Mi inicio en la olimpiada de matemáticas fue muy curioso, porque la primera vez que participé no sabía que el examen era de una olimpiada, es más, ni siquiera sabía en ese momento que existían concursos de ese estilo.

Desde pequeña, siempre he sido niña de ciencias, ya que todas las materias teóricas (en especial, español e historia) siempre se me dificultaron. En cambio, las ciencias exactas me han parecido muy interesantes; es por ello que, cuando estaba en quinto de primaria, mi maestra de ese entonces me invitó a realizar un examen de matemáticas, pero al ver el tipo de problemas, que no solo eran de operaciones, sino que implicaban pensar más allá de lo aprendido en la escuela, para ver cómo podía "atacar" el ejercicio, quedé cautivada. Desafortunadamente, ese año me eliminaron en la fase regional del proceso de selección de mi estado.

En 2017, volví a inscribirme, pero ahora sí que tenía más conocimiento sobre la olimpiada, y al menos ya sabía más o menos que no eran problemas de aplicación directa, lo cual me divierte mucho. Recuerdo muy bien que, una de mis principales motivaciones para echarle ganas, es que cuando quedas en la selección de tu estado te regalan playeritas con tu nombre y diseños bonitos, y yo estaba aferrada a que quería tener al menos una playera así con mi nombre. Me prometí a mí misma que no descansaría hasta conseguirlo, aun cuando me llevara años.

Poco a poco empecé a entender cómo era la olimpiada, los ejercicios, y realmente, siendo completamente sincera, no sé cómo paso, pero logré quedar en la selección que representaría a Guanajuato en la ONMAPS de 2018, la cual se llevó a cabo en Gómez Palacio, Durango.

Meses antes del concurso nacional, como muchos estados lo hacen, el comité encar-

gado de la olimpiada en Guanajuato nos entrenaba cada fin de semana en CIMAT, lo que involucraba que cada sábado muy temprano mi mamá y yo viajábamos a Guanajuato Capital y dependiendo de la duración del entrenamiento, ella me esperaba o iba por mí al día siguiente por la tarde. Tengo un agradecimiento especial a mi mamá que siempre me apoyó y me acompañó a cada competencia y que, entre el público de las ceremonias, tenía la certeza de que ella iba estar, siempre echándome porras.

Mi primera olimpiada nacional la recuerdo con mucho cariño; fue una experiencia muy distinta a lo que había vivido y de las cosas más curiosas es que Arge y yo (mi amiga/compañera de selección que competíamos en el mismo nivel) terminamos sacando exactamente el mismo puntaje. No solo subimos a recibir nuestra medalla juntas, sino que también ahí inició una gran amistad que se mantiene hasta el momento.

A partir de ahí, tuve la fortuna de representar a Guanajuato cada año en distintas olimpiadas (ONMAPS, OMMEB); luego, en 2020, cuando estaba en tercero de secundaria, participé en mi primera OMM. Recuerdo mucho que para nosotros los "chiquitos", la OMM era la "olimpiada de grandes", ya que ahí ya no competías por nivel de acuerdo a tu grado escolar, sino que era un todos contra todos, sin importar que la mayoría eran estudiantes de preparatoria, algunos estados llevan hasta niños de primaria, lo cual siempre me ha parecido impresionante.

Por otro lado, el poder entrenar con compañeros que tenían un mayor nivel y mucha más experiencia me ayudó muchísimo, aprendí de cada uno. Al pasar al pizarrón (que, de las cosas más bonitas de CIMAT, es que siguen usando pizarrones de gis) y explicar sus soluciones, siempre quedaba impresionada, porque no solo eran compañeros de selección, sino también ellos eran modelos a seguir para mí.

Mi primera OMM fue en época de pandemia, pero a la selección nos reunieron en un hotel en Guanajuato Capital y presentamos los exámenes en CIMAT… Fue muy divertido y me fue lo suficientemente bien para quedar preseleccionada para la Olimpiada de Centroamérica y el Caribe, lo que significaba que iba poder tomar entrenamientos nacionales y que probablemente iba a poder participar en una olimpiada internacional, el sueño de cualquier olímpico.

Personalmente, creo que ese año fue en el que participé en más competencias y en el que más aprendí, porque también me metía a todos los concursos abiertos de matemáticas que encontraba en internet. La mayoría eran nacionales, pero también participé en algunos de Perú, Bolivia y Honduras. Me divertí mucho, pero también fue cuando todo se empezó a volver un poco estresante, porque se me juntaban los entrenamientos, el proceso de selección estatal, los concursos en línea y mis actividades extracurriculares, porque me encanta aprender de todo, entonces en cualquier curso que te puedas imaginar, probablemente yo he estado inscrita (menos en actividades físicas, porque los balones y yo no nos llevamos muy bien).

Como cualquier experiencia, también hubo partes complicadas. Aun cuando no me arrepiento de haber participado todos esos años, porque literalmente crecí en la olimpiada, hubo momentos muy estresantes, en los que sentía que no era lo suficientemente buena, o también, en ocasiones, no gestionaba bien cuando no me salían las cosas cuan-

do competía, porque uno como olímpico, claramente siempre sueña con una medalla de oro, con sacar el máximo puntaje posible y, malamente, llegó un momento en donde me enfoqué tanto en el resultado que dejé de disfrutar absolutamente todo lo demás, esto incluye los meses previos de entrenamientos, el convivir con más compañeros, las 4 horas y media de cada examen, todo. Eso se reflejó en mis resultados, y en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2022 obtuve un desempeño muy por debajo de lo que esperaba.

En 2023, decidí no participar en el proceso de selección de Guanajuato para la OMM, aun cuando era mi último año en el que podía participar, ya que estaba ingresando a mi último año de prepa, porque no quería volver a participar sin recuperar el "amor" al proceso, ya que genuinamente no quería que lo único que me importara de la olimpiada era la medalla que sacara porque, para mí, siempre ha significado mucho más que eso.

Ese año fue muy nostálgico porque a veces me arrepentía de mi decisión, pero también estaba consciente que era lo más sano. En enero del 2024 vi anunciada la convocatoria para la Olimpiada Nacional Femenil y, al saber que era mi última oportunidad de participar en una olimpiada nacional, me inscribí, pero con una mentalidad completamente distinta. Mi único propósito era divertirme, aprender y darle el mejor cierre posible.

Mi última nacional fue la OFM de 2024, la cual se llevó a cabo en Ciudad de México, y afortunadamente la selección de Guanajuato estuvo conformada por un grupo de niñas

y entrenadores increíbles que, sin duda, fueron parte fundamental para que cerrará mi "vida" como olímpica de la mejor manera.

Recuerdo que disfruté muchísimo de cada momento: la habitación del hotel era increíble, pude ver a amigas de otros estados que tenía mucho tiempo sin ver, así que, al final, la medalla de plata que obtuve la valoré mucho más porque toda esa semana me la pasé genial. Con esto mi "ciclo" como olímpica había finalizado. Sin duda, de los mejores 7 años de mi vida, a pesar de todo.

La olimpiada en sí es una experiencia maravillosa, pero lo que la hace realmente inigualable es la cantidad de personas extraordinarias que conoces. Puede que gracias a ella ahora entienda muy bien el teorema de Tales (que al principio me costó), sepa contar de muchas formas (aunque combinatoria nunca se me dió del todo), que cada vez que veo una circunferencia con segmentos transversales sienta la necesidad de aplicar potencia de un punto, o que conozca un poco de Fermat y otros grandes matemáticos. Pero lo que más agradezco es que me dio amistades increíbles y me permitió conocer a gente maravillosa como Itzel B, Arge, Dani, Said, Cynthia, Alelí, Eva, Kyara; que me brindó la oportunidad de aprender de entrenadores y seres humanos excelentes como Cecy, German, Moy, Isaías, Nuria, Kapioma, Myriam, con los cuales siempre estaré tremendamente agradecida.

Muchas personas hicieron que mi experiencia olímpica fuera de los mejores momentos que voy a tener en toda mi vida: estoy segura de ello. Y contar con el apoyo incondicional de mi familia hizo que, aun cuando estaba cansada, siempre le echara un poquito más de ganas.

Gracias OMM, por darme a la mayoría de mis mejores amigos, por permitirme aprender tanto, por orientarme a encontrar qué era lo que realmente me gustaba, por dejarme conocer lugares lindos, pero, sobre todo, gracias por enseñarme que las matemáticas sí que son bonitas.

Si tienes la oportunidad de participar o involucrarte en la olimpiada, por favor, no la desaproveches.

Apéndice

Definicion 1 (Divisibilidad). *Si a y b son números enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = a \cdot q$ para algún número entero q; lo anterior se denota por $a \mid b$.*

Definicion 2 (Congruencias). *Dados dos números enteros a, b y un número entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 2 (Propiedades de las congruencias). *Sean a, b, c, d, m números enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + b \equiv c + d \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{p}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
4. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo número entero positivo n.*
5. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{\text{mcd}(b,m)}}$ donde $\text{mcd}(b, m)$ denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 3 (Pequeño teorema de Fermat). *Si p es un número primo y a es un número entero coprimo conp (*i.e., $\text{mcd}(a, p) = 1$*), entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 4 (Inducción). *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo número entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un número entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ donde $k \geq k_0$ es un número entero fijo (pero arbitrario).*
3. *Paso de inducción: Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo número entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Principio de las casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 6 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 7 (Binomio de Newton)**.** *Para a y b números reales cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}.$$

Teorema 8 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no negativos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definicion 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Teorema 11 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Teorema 12 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Si tenemos dos triángulos con un lado igual y los respectivos ángulos adyacentes iguales, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definicion 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales (es decir, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$ y $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$) y sus lados homólogos son proporcionales (esto es, si $AB/A'B' = BC/B'C' = CA/C'A'$).*

Teorema 13 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 14 (Tales). *Si ABC es un triángulo y D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 15 (Teorema de la bisectriz). *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 16 (Ceva). *Dado ABC un triángulo y L, M y N puntos sobre los lados (o extensiones de éstos) BC, CA y AB, respectivamente, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 17 (Menelao). *Dado un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definicion 5 (Ángulos en la circunferencia).

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común sobre la circunferencia.*
2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente a la circunferencia en el punto de tangencia.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito). *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 19 (Medida del ángulo seminscrito). *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Potencia de un punto).

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersecan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definicion 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 21 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de cualquiera de sus pares de ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es,*

$$\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades, 5ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2014.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría - Ejercicios y problemas, 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado; 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas, 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2014.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada, 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2017.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers.* John Wiley & Sons, Inc., 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria, 3ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2005.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2019.

[14] M. L. Pérez Seguí (con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez). *Matemáticas preolímpicas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números, 2ª ed.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2016.

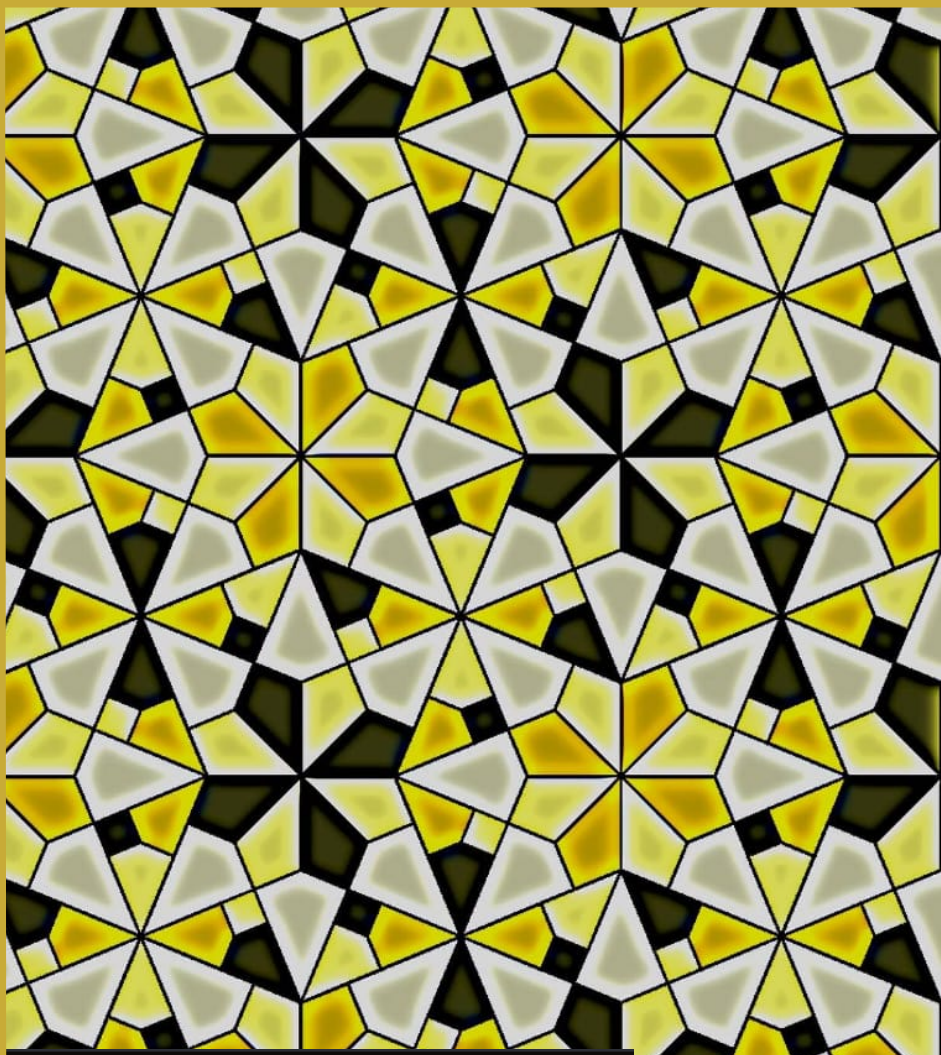
[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la geometría moderna.* Compañía Editorial Continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Guadalupe Russell Noriega
(Presidente)

César Guadarrama Uribe
Claudia Marcela Aguilar Hernández
David Guadalupe Torres Flores
Enrique Treviño López
Héctor Raymundo Flores Cantú
Hugo Villanueva Méndez
Ignacio Barradas Bribiesca
José Eduardo Cázares Tapia
José Omar Guzmán Vega
Kenya Verónica Espinosa Hurtado
Kevin William Beuchot Castellanos
Luis Eduardo García Hernández
Luis Mauricio Montes de Oca Mena
María Eugenia Guzmán Flores
María Luisa Pérez Seguí
Mónica Mateos Vega
Myriam Hernández Ketchul
Rosa Victoria Rodríguez Olivé
Sergio Guzmán Sánchez



SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864