9^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Colima, Colima, 1995

Primer día

1. En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y solo a estos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?

2. Considere 6 puntos en el plano con la propiedad de que 8 de las distancias entre ellos son iguales a 1. Muestre que al menos tres de los puntos forman un triángulo equilátero de lado 1.

3. Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular, sean AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB. Sea N la intersección de AC y BD. Demuestre que los puntos L, M y N son colineales.

Segundo día

4. (a) Encuentre un subconjunto B del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$, de manera que B tenga 26 elementos y que ningún producto de dos elementos de B sea un cuadrado perfecto.

   (b) Demuestre que no se puede obtener un subconjunto de A de 27 elementos con la característica mencionada en (a).

5. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo de manera que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB son todos de igual área. Demuestre que $\frac{1}{4}$ área$(ABCDE) <$ área$(ABC) <$ $\frac{1}{3}$ área$(ABCDE)$.

6. Sobre los cuadrados de una cuadrícula de 4 por 4 se colocan símbolos 0 y 1; estos símbolos se cambian, uno por el otro, de acuerdo a las siguientes operaciones: la operación (a) cambia todos los símbolos de un renglón, la operación (b) cambia todos los símbolos de una columna, la operación (c) cambia todos los símbolos de una diagonal (líneas punteadas en la figura). Determine cuáles son los arreglos de los que se puede partir para que con un número finito de operaciones se pueda llegar a un arreglo de puros símbolos 0.