14^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Morelia, Michoacán, 2000
Primer día

1. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ circunferencias tales que $\mathcal{A}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{B}$ en P, $\mathcal{B}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{C}$ en Q, $\mathcal{C}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{D}$ en R y $\mathcal{D}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{A}$ en S. Suponga que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ no se intersectan, ni tampoco $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

   (i) Pruebe que los puntos P, Q, R y S están todos sobre una circunferencia.

   (ii) Suponga además que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ tienen radio 2, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ tienen radio 3 y la distancia entre los centros de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es 6. Determine el área del cuadrilátero $PQRS$.

2. Se construye un triángulo como el de la figura, pero empezando con los números del 1 al 2000. Cada número del triángulo (excepto los del primer renglón) es la suma de los dos números arriba de él. ¿Cuál es el número que ocupa el vértice inferior del triángulo?

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
& & 8 & & 12 & & 16 & & \\
& & & 20 & & 28 & & & \\
& & & & 48 & & & &
\end{array}$$

3. Dado un conjunto de enteros positivos A, construimos el conjunto A' poniendo todos los elementos de A y todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: se escogen algunos elementos de A, sin repetir y a cada uno de esos números se le pone el signo $+$ o el signo $-$; luego se suman esos números con signo y el resultado, si es positivo, se pone en A'. Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, entonces algunos elementos de A' son 8 y 14 (pues 8 es elemento de A y $14 = 20 + 2 - 8$. A partir de A' construimos A'' de la misma manera que A' se construye a partir de A. Encuentre el mínimo número de elementos que necesita tener A si queremos que A'' contenga a todos los enteros del 1 al 40 (inclusive).

Segundo día

4. Para enteros positivos a y b, no múltiplos de 5, se construye una lista de números como sigue: el primer número es 5 y, a partir del segundo número, cada número se obtiene multiplicando el número que le precede (en la lista) por a y sumándole b. Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, entonces los primeros tres números en la lista serían 5, 14 y 32 (pues $14 = 5 \cdot 2 + 4$ y $32 = 14 \cdot 2 + 4$). ¿Cuál es la máxima cantidad de primos que se pueden obtener antes de obtener el primer número no primo?

5. Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadraditos de ese rectángulo (es decir, los cuadraditos del rectángulo que eran negros se convierten en blancos y los que eran blancos se convierten en negros). Encuentre para qué números n es posible lograr que todos los cuadraditos queden de un mismo color, después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario. (Nota: las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir cambiando.)

6. Sea ABC un triángulo en el que el ángulo B es obtuso y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$ y BH es perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F. Pruebe que los ángulos BCF y ACD son iguales.