

15^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Concurso Nacional

Oaxtepec, Morelos, 2001

Primer día

1. Encuentra todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 o 7.
2. Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.
3. En un cuadrilátero $ABCD$, inscrito en una circunferencia, llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD , y sea M el punto medio de CD . La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R , respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T . Pruebe que $AT = RC$.

Segundo día

4. Dados dos enteros positivos n y a se forma una lista de 2001 números como sigue: el primer número es a ; a partir del segundo, cada número es el residuo que se obtiene al dividir el cuadrado del anterior entre n . A los números de la lista se les ponen los signos $+$ y $-$, alternadamente, empezando con $+$. Los números con signo, así obtenidos, se suman y a esa suma se le llama *suma final para n y a* . ¿Para qué enteros $n \geq 5$ existe alguna a tal que $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$ y la suma final para n y a es positiva?
5. Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$ y el ángulo BAC es el doble del ángulo BCA . Sobre el lado AC se toma un punto D tal que $CD = AB$. Por el punto B se traza una recta l paralela a AC . La bisectriz exterior del ángulo en A intersecta a l en el punto M , y la paralela a AB por el punto C intersecta a l en el punto N . Pruebe que $MD = ND$.
6. Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, \dots, n$ (tiene muchas monedas de cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:
 - (a) En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.
 - (b) Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.
 - (c) Para cualesquiera dos cajas sucede que entre las dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.
 - (d) No existe una denominación tal que todas las cajas tengan una moneda de esa denominación.

¿Para qué valores de n el coleccionista puede hacer lo que se propone?