

30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Concurso Nacional

Acapulco, Guerrero, 2016

Primer día

1. Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos circunferencias tangentes externamente en S tales que el radio de \mathcal{C}_2 es el triple del radio de \mathcal{C}_1 . Sea l una recta que es tangente a \mathcal{C}_1 en P y tangente a \mathcal{C}_2 en Q , con P y Q distintos de S . Sea T el punto en \mathcal{C}_2 tal que TQ es diámetro de \mathcal{C}_2 y sea R la intersección de la bisectriz de $\angle SQT$ con el segmento ST . Demuestra que $QR = RT$.
2. Una pareja de enteros positivos m, n es *guerrera* si existen enteros positivos a, b, c, d con $m = ab$, $n = cd$ y $a + b = c + d$. Por ejemplo, la pareja 8, 9 es guerrera pues $8 = 4 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ y $4 + 2 = 3 + 3$. Se colorean los enteros positivos de la siguiente manera:
 - Empezamos coloreando el 3 y el 5.
 - Después, si algún entero positivo no está coloreado y este tiene una pareja guerrera que ya está coloreado, entonces lo coloreamos.

Encuentra todos los enteros positivos que eventualmente se colorean.

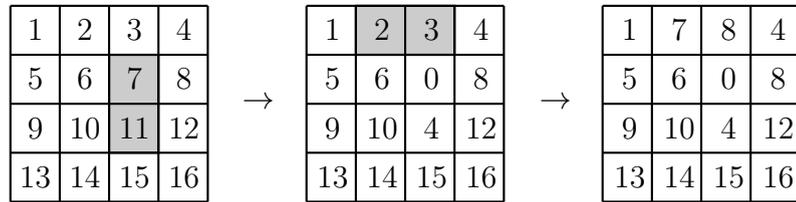
3. Encuentra el menor número real x que cumpla todas las siguientes desigualdades:

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor < \lfloor x^3 \rfloor < \dots < \lfloor x^n \rfloor < \lfloor x^{n+1} \rfloor < \dots$$

Nota: $\lfloor x \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual a x , es decir, es el único número entero que cumple que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Segundo día

4. Decimos que un número entero no-negativo n “*contiene*” a otro número entero no-negativo m , si los dígitos de su expansión (o desarrollo) decimal aparecen en forma consecutiva en la expansión (o desarrollo) decimal de n . Por ejemplo, 2016 contiene a 2, 0, 1, 6, 20, 16, 201 y 2016. Determina el mayor número entero n que no contiene a ningún múltiplo de 7.
5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n , en el segundo los números de $n + 1$ a $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadraditos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los dos números que aparecen en esos cuadraditos. Por ejemplo, aquí abajo se muestran dos operaciones sucesivas permitidas en una cuadrícula de 4×4 : primero restando 7 a los cuadraditos sombreados y luego sumando 5 a los sombreados.



Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadraditos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, l_1 la recta paralela a BC que pasa por A y l_2 la recta paralela a AD que pasa por B . La recta DC corta a l_1 y l_2 en los puntos E y F , respectivamente. La recta perpendicular a l_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a l_2 por B corta a AD en Q . Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos ADE y BFC , respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y sólo si DP es perpendicular a CQ .