30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Acapulco, Guerrero, 2016

Primer día

1. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes externamente en S tales que el radio de $\mathcal{C}_2$ es el triple del radio de $\mathcal{C}_1$. Sea l una recta que es tangente a $\mathcal{C}_1$ en P y tangente a $\mathcal{C}_2$ en Q, con P y Q distintos de S. Sea T el punto en $\mathcal{C}_2$ tal que TQ es diámetro de $\mathcal{C}_2$ y sea R la intersección de la bisectriz de $\angle SQT$ con el segmento ST. Demuestra que $QR = RT$.

2. Una pareja de enteros positivos m, n es *guerrera* si existen enteros positivos a, b, c, d con $m = ab$, $n = cd$ y $a + b = c + d$. Por ejemplo, la pareja 8, 9 es guerrera pues $8 = 4 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ y $4 + 2 = 3 + 3$. Se colorean los enteros positivos de la siguiente manera:

   - Empezamos coloreando el 3 y el 5.
   - Después, si algún entero positivo no está coloreado y este tiene una pareja guerrera que ya está coloreado, entonces lo coloreamos.

   Encuentra todos los enteros positivos que eventualmente se colorean.

3. Encuentra el menor número real x que cumpla todas las siguientes desigualdades:

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor < \lfloor x^3 \rfloor < \ldots < \lfloor x^n \rfloor < \lfloor x^{n+1} \rfloor < \ldots$$

   Nota: $\lfloor x \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual a x, es decir, es el único número entero que cumple que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Segundo día

4. Decimos que un número entero no-negativo n "*contiene*" a otro número entero no-negativo m, si los dígitos de su expansión (o desarrollo) decimal aparecen en forma consecutiva en la expansión (o desarrollo) decimal de n. Por ejemplo, 2016 contiene a 2,0,1,6, 20, 16, 201 y 2016. Determina el mayor número entero n que no contiene a ningún múltiplo de 7.

5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n, en el segundo los números de $n + 1$ a $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadraditos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los dos números que aparecen en esos cuadraditos. Por ejemplo, aquí abajo se muestran dos operaciones sucesivas permitidas en una cuadrícula de 4×4: primero restando 7 a los cuadraditos sombreados y luego sumando 5 a los sombreados.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	0	8
9	10	4	12
13	14	15	16

$\rightarrow$

1	7	8	4
5	6	0	8
9	10	4	12
13	14	15	16

Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadraditos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una cicunferencia, l_1 la recta paralela a BC que pasa por A y l_2 la recta paralela a AD que pasa por B. La recta DC corta a l_1 y l_2 en los puntos E y F, respectivamente. La recta perpendicular a l_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a l_2 por B corta a AD en Q. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos ADE y BFC, respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y sólo si DP es perpendicular a CQ.