31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Santiago, Nuevo León, 2017
Primer día

1. En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultnea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a travs de varias tiradas, a que todos los caballos estn en la columna k, uno en cada casilla.

   Nota. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectngulo de 3×2 o de 2×3.

2. Un conjunto de n números enteros positivos distintos es *equilibrado*, si el promedio de cualesquiera k números del conjunto es un número entero, para toda $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuyo ortocentro es el punto H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersectar a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y (distintos de A) que están sobre las recta AP y AQ, respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B están sobre un círculo y los puntos Y, A, H y C están sobre un círculo. Muestra que las rectas XY y BC son paralelas.

Segundo día

4. Un subconjunto B de $\{1, 2, ..., 2017\}$, tiene la propiedad T si:

   Cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva).

   Determina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad T.

5. Sobre una circunferencia Γ se encuentran los puntos A, B, N, C, D y M colocados en el sentido de las manecillas del reloj de manera que M y N son los puntos medios de los arcos DA y BC (recorridos en el sentido de las manecillas del reloj). Sea P la intersección de los segmentos AC y BD; y sea Q un punto sobre MB de manera que las rectas PQ y MN son perpendiculares. Sobre el segmento MC se considera un punto R de manera que $QB = RC$. Muestra que AC pasa por el punto medio del segmento QR.

6. Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de esa. A gana si logra que haya una urna con n votos despus de algn turno de B. Determina para cada n el mnimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.