Soluciones del Examen Canguro Matemático 2004
Nivel Estudiante

Solución 1. La base de la pirámide debe ser un polígono de 16 lados. Entonces el número de aristas es $2 \times 16 = 32$. La respuesta es (d).

Solución 2. La gráfica nos indica que al principio la altura aumenta rápidamente, después aumenta lentamente y al final, de repente, crece en forma lineal. La respuesta es (a).

Solución 3. En el momento en que la computadora proporcione un múltiplo de 4 o dos números pares, el producto total será múltiplo de 4. Como hay 50 números impares, el peor caso es cuando dé al principio éstos y dos pares (no múltiplos de 4). La respuesta es (b).

Solución 4. El eje de simetría del polígono que separa al 1 del 38 deja la mitad de los vértices de cada lado, así que el 20 queda opuesto al 1. Entonces el 8 queda opuesto al $19 + 8 = 27$. La respuesta es (c).

Solución 5. Sabemos que la ecuación $|x|^2 + |y|^2 = 4$ representa un círculo de radio 2; sin embargo, para que $xy \leq 0$, x y y deben tener distinto signo, o sea que los puntos de la gráfica deben estar en los cuadrantes II o IV. La respuesta es (c).

Solución 6. Tenemos que $\angle BAC = 180 - 75 - 30 = 75$, así que $AC = BC = AD$, es decir, el triángulo ACD es equilátero y entonces $\angle ACD = \angle ADC$. Por lo anterior, $\angle ADC = \frac{180-50}{2} = 65$. La respuesta es (d).

Solución 7. Como el autobús viaja a 30 Km/h, el recorrido lo hace en $\frac{1}{10}$ h, es decir, en 6 minutos. Entonces, en el peor de los casos, si Juan no caminara, llegaría a su casa en 46 minutos. Para llegar caminando en 45 minutos ($= \frac{3}{4}$ h), su velocidad debe ser de 4 Km/h. La respuesta es (b).

Solución 8. Si los números son A, B, C y D, los promedios son $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A+C}{2}$, $\frac{A+D}{2}$, $\frac{B+C}{2}$, $\frac{B+D}{2}$ y $\frac{C+D}{2}$, así que si sumamos todos estos promedios, obtenemos $\frac{3(A+B+C+D)}{2} = 2+4+5+8+9+11 = 39$, de donde $A + B + C + D = 26$. La respuesta es (c).

Solución 9. Llamemos c al número de respuestas correctas e i al de incorrectas. Tenemos que c e i son enteros no negativos, que $c+i \leq 20$ y que $7c-2i = 87$ de donde $7c = 87+2i$. Al buscar múltiplos de 7 sustituyendo $i = 0, 1, 2, \ldots, 20$ (vemos que éstos ocurren con $i = 2, 2 + 7 = 9, 2 + 14 = 16$ y en éstos, $c = 13, 15, 17$, respectivamente. Tomando en cuenta que $c + i \leq 20$, deducimos que la única posibilidad es $i = 2$ y $c = 13$ y, entonces, el número de preguntas sin contestar es $20 - 2 - 13 = 5$. La respuesta es (d).

Solución 10. Como la diferencia entre $n - 1$ y $n + 1$ es 2, estos números no pueden tener un factor en común mayor a 2. Entonces una posibilidad es que $n - 1$ sea 1 y, en los otros casos, $n - 1$ es par, en cuyo caso también lo es $n + 1$ y, así, $n - 1$ es divisor de 32. Las posibilidades son $n - 1 = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. La respuesta es (d).

Solución 11. Primera forma: Observemos primero que $3^n > 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1$ para todo entero $n \geq 1$. Entonces, por ejemplo, cuando el coeficiente de 3^4 es 1, los demás coeficientes tienen posibles todos los valores -1, 0 o 1 (para que el número obtenido con la suma sea positivo), es decir, $3^4 = 81$ posibilidades; además el coeficiente de 3^4 no puede ser -1. Si $a_4 = 0$, entonces, por la misma

razón que arriba, a_3 debe ser 1 o 0; en el primer caso, igual que antes, hay 3^3 posibilidades. Así sucesivamente, obtenemos $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 1 = 121$ posibilidades.
Segunda forma: El número de posibilidades de elegir las a_i dentro del conjunto $\{-1, 0, 1\}$ es $3^5 = 243$ pues cada a_i tiene 3 posibilidades. Una de las posibilidades es que todas las a_i sean 0; de las demás, la mitad dan números negativos y la otra mitad, positivos (pues si un valor es negativo, al cambiar las a_i de signo se obtiene un valor positivo y viceversa). Sólo falta ver que todos los números obtenidos son distintos, pero esto se deduce fácilmente de que una igualdad entre dos de estas expresiones conduce a dos formas distintas de expresar un número en base 3, lo cual es imposible (por ejemplo, si fuera cierto que $-3^4 + 3^2 + 3 + 1 = 3^4 + 3 - 1$ entonces también sería cierto que $2 \cdots 3^2 + 2 = 2 \cdot 3^4 + 2$).
La respuesta es (d).

Solución 12. Digamos que el cuadrado más grande tiene lado n y que el cuadrado menor del cual no sabemos la medida tiene lado a. Entonces, como al menos una orilla del cuadrado está formada por cuadrados de lado 1, tenemos que n es entero. De la misma manera vemos que $n - a$ es entero y así también lo es a. Por otro lado, $n^2 - a^2 = 17$, de donde $(n-a)(n+a) = 17$, pero 17 es primo así que la única posibilidad es $n - a = 1$ y $n + a = 17$, de donde $n = 9$. La respuesta es (c).

Solución 13. Consideremos la expansión en base 10 de los números. Por ejemplo, los dos números que se van a sumar y que empiezan con a son $a10^2 + b10 + c$ y $a10^2 + c10 + b$. Al hacer toda la suma y factorizar, tenemos que ésta es $2(a+b+c)10^2 + 2(a+b+c)10 + 2(a+b+c) = 2(a+b+c)(10^2+10+1) = 1554$, de donde $a + b + c = \frac{1554}{222} = 7$. como a, b y c son distintos entre 1 y 9, entonces deben ser 1, 2 y 4. La respuesta es (a).

Solución 14. Primera forma: Es claro que la última cifra es 1 así que la segunda cifra de derecha izquierda es la última cifra de $\frac{11^{2004}-1}{10} = \frac{11^{2004}-1}{11-1} = 1 + 11 + 11^2 + \cdots + 11^{2003}$. Aquí hay 2004 números, todos terminados en 1, así que la última cifra es la última cifra de 2004×1, o sea, 4.
Segunda forma: $11^{2004} = (10+1)^{2004}$. Al desarrollar esto todos los términos son múltiplos de 100 (así que al sumarlos no se alteran las últimas dos cifras) salvo dos, que son: $2004 \cdot 10^1 \cdot 1^{2003}$ y 1^{2004}. La suma de éstos es 20040.
La respuesta es (e).

Solución 15. El área de cada triángulo puede calcularse considerando como base un lado del paraleogramo y como altura la distancia del vértice común a todos los triángulos a esa base. De esta manera la suma del área de dos triángulos opuestos es la mitad del tamaño de la base por la distancia a la base opuesta, lo cual es la mitad del área del paralelogramo. Entonces la suma de dos de los números debe ser igual a la suma de los otros dos. Es fácil darse cuenta que sólo la opción (a) cumple esta condición. La respuesta es (a).