

Canguro Matemático Mexicano 2006
Nivel Estudiante
Soluciones

1. **(d)** La mayor área que podemos obtener es la del cuadrado más pequeño que contiene a la figura original (observemos que el perímetro es el mismo). Para completar ese cuadrado hace falta sombrear 16 cuadritos.
2. **(c)** Deben voltearse 2 tarjetas: la que muestra E (para ver si es cierto que del otro lado hay un número par) y la que muestra 7 (pues del otro lado no debería haber vocal).
3. **(b)** Hagamos la operación de dos en dos:

$$\begin{aligned}1111111111 - 1111111111 &= 1000000000 \\11111111 - 11111111 &= 10000000 \\111111 - 111111 &= 100000 \\1111 - 111 &= 1000 \\11 - 1 &= 10\end{aligned}$$

Al sumar obtenemos 1010101010.

4. **(b)** Observemos que la superficie de la cara superior del cubo pequeño equivale a lo mismo que este cubo tapa del grande. Cada cara del cubo grande mide $3 \times 3 = 9\text{cm}^2$ y cada cara del cubo chico mide $1 \times 1 = 1\text{cm}^2$. Entonces el área total es $6 \times 9 + 4 \times 1 = 58\text{cm}^2$.
5. **(d)** Sobre cada columna y renglón hay al menos un cuadro con el color incorrecto así que, por lo menos, se necesitan 4 cambios. Veamos que 4 son suficientes: En el primer renglón se pueden cambiar en un paso los cuadritos que tienen color incorrecto, y lo mismo en el segundo. En el tercer renglón cambiamos el de color incorrecto junto con el que está en la última columna; entonces este último quedará mal, pero lo podemos volver a cambiar usando la cuarta columna y en ella cambiando el que desde el principio estaba mal.
6. **(c)** Los números C y D dividen en tres partes iguales el segmento de b a e , el cual mide $10 - 5.5 = 4.5$, así que la distancia de a a b es $\frac{1}{3} \cdot 4.5 = 1.5$, y entonces $a = 5.5 - 1.5 = 4$.

7. **(d)** Si la abuela tiene x nietos, notemos que $2x + 3 = 3x - 2$, de donde $x = 5$.

8. **(c)** En cada giro, P traza cuartos de círculo; el primero tiene radio $PQ = 10$; el segundo círculo tiene radio $PR = 10\sqrt{2}$ y el tercero tiene radio $PS = 10$. Entonces la longitud de la curva trazada por P es

$$\frac{2\pi}{4}(10 + 10\sqrt{2} + 10) = 10\pi + 5\pi\sqrt{2}.$$

9. **(a)** Tenemos que $\frac{e}{a} = \frac{bcde}{abcd} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}$.

10. **(e)** Como

$$4^{xy} = (4^x)^y = 9^y = 256 = 4^4,$$

tenemos que $xy = 4$.

11. **(e)** Sabemos que $a + (b + c) = 78$ y $a - (b + c) = 40$. Sumando estas dos ecuaciones obtenemos $2a = 118$, de donde $a = 59$. Como la suma $a + (b + c)$ es par y a es impar, $b + c$ también debe ser impar, así que alguno de b o c es par, digamos b . El único primo par es 2, así que $b = 2$. Entonces $b = 78 - 59 - 2 = 17$. El producto es 2006.

12. **(b)** Observemos que cada pico de la estrella es un triángulo equilátero. Entonces tres lados consecutivos del hexágono miden lo mismo que un lado de los triángulos equiláteros originales y entonces el perímetro del hexágono es $\frac{2}{3}$ el perímetro de uno de los triángulos, es decir, 12cm.

13. **(a)** Observemos que $1001 - 5 = 996 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 83$. El número de una cifra debe ser mayor que 5 y algunos de sus factores son 2, 2 o 3; la única posibilidad es $2 \cdot 3 = 6$. Al dividir 2006 entre 6 vemos que el residuo es 2.

14. **(a)** Llamemos R al radio del sector. Como el radio del circulito es $\frac{R}{3}$, al trazar el círculo completo con radio R , dentro de éste caben tres circulitos con diámetros el doble del diámetro del sector. Eso quiere decir que dentro del círculo grande pueden dibujarse 7 círculos pequeños tangentes entre sí. Entonces el ángulo del sector es de 60° y su área es $\frac{1}{6}$ del área del círculo grande, o sea $\frac{1}{6}\pi R^2$. El área del circulito es $\pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{9}$. Entonces la razón entre sus áreas es $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{9}} = \frac{3}{2}$.

15. (e) Llamemos $2r$ y $2s$ a las soluciones. Entonces $x^2 - bx + 80 = (x - 2r)(x - 2s)$, de donde $b = 2r + 2s = 2(r + s)$ y $4rs = 80$; así $rs = 20$. Las posibilidades para $\{r, s\}$ son $\{1, 20\}$, $\{2, 10\}$ y $\{4, 5\}$. Los valores respectivos para b son 42, 24 y 18.