Soluciones para el Examen Canguro Matemático Mexicano 2010, nivel Estudiante

1. **(e)** Sea S el área sombreada. El semicírculo menor puede moverse a completar, con el de 4 cm, un medio círculo de 4 cm. Entonces $S = \frac{\pi 4^2}{2} = 8\pi$. Análogamente la parte sombreada puede moverse para completar, con el de 8 cm, un medio círculo de 8 cm. Así la fracción del dibujo que está sombreada es $\frac{8\pi}{8^2\pi/2} = \frac{1}{4}$.

2. **(b)** El cuadrado de cualquier número siempre es no negativo, así que $(x-3)^2 = 0 = (y-2)^2$, de donde la única solución es cuando $x = 3$ y $y = 2$.

3. **(e)** La primera hoja contiene las páginas 1, 2, 60 y 59; la segunda, las páginas 3, 4, 58 y 57; la tercera, las páginas 5, 6, 56 y 55.

4. **(b)** EL-CAN-GU-RO-E-RES-TÚ consta de 7 sílabas. Numeremos a los niños según como se les cuenta al principio. En la primera vuelta sale el niño 2 (pues son 5 niños y $7 = 5 + 2$); quedan 4 niños y se empieza a contar desde el 3, así que, como $7 = 4 + 3$, sale el 3er niño después del 3, o sea, el 5. Ahora se empieza con el 1 y quedan 3 niños y, como $7 = 2 \cdot 3 + 1$, sale el niño que tiene el 1. Luego se empieza con el 3 y sale él mismo, de manera que al final queda el 4. Nos dicen que es Elsa la que quedó al final y entonces sabemos que se empezó con el niño que está 4 lugares antes que Elsa: Bruno.

5. **(a)** De la primera condición se deduce que todas, salvo tal vez dos, son rojas. Como hay al menos una de cada color, entonces debe haber una azul (y una verde).

6. **(a)** El ángulo en D mide $180^{\circ} - 50^{\circ} - 65^{\circ} = 65^{\circ}$, así que el triángulo ACD es isósceles con $AC = AD$. Pero entonces también es isósceles el triángulo ABC, de donde el ángulo en B mide $\frac{180^{\circ}-70^{\circ}}{2} = 55^{\circ}$.

7. **(d)** Quiere decir que no todos los empleados tienen 25 o más años, así que alguno tiene 24 o menos.

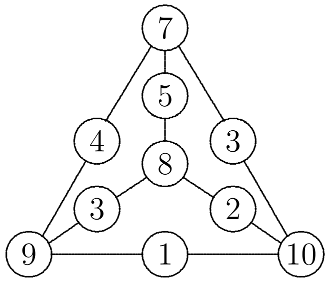
8. **(b)** La suma correcta es $1+2+3+\cdots+12 = 78$, pero sabemos que la suma de las respuestas que dieron es 36. La menor cantidad de respuestas falsas se logra cambiando los números más grandes por lo más chico posible: 12 por 1, 11 por 1, etc. Como la diferencia entre 36 y 78 es 42, habrá que cambiar por lo menos 4. Supongamos que 12, 11, 10 y 9 se cambian todos por 1; entonces 78 se reduce a $78 - (11 + 10 + 9 + 8) = 78 - 38 = 40$. Entonces basta con cambiar uno más (7 por 3).

9. **(d)** Como en el tercer dado salió la suma de los otros dos, ésta tiene que ser un número entre 2 y 6. Hay 15 posibilidades: $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(2,1,3)$, $(1,3,4)$, $(3,1,4)$, $(1,4,5)$, $(4,1,5)$, $(1,5,6)$, $(5,1,6)$, $(2,2,4)$, $(2,3,5)$, $(3,2,5)$, $(2,4,6)$, $(4,2,6)$, y $(3,3,6)$. De ellos 8 tienen al menos un 2.

10. **(c)** Si la primera afirmación fuera cierta, entonces la maga que habla sería hada pero dijo que es bruja. Entonces la primera afirmación es falsa, de donde concluimos que hay más de 3 magas y que hay por lo menos un hada. Como la segunda maga dijo que no todas eran brujas y ya sabemos que esto es cierto, entonces ella dijo la verdad y hay 3 o 4 magas, pero ya sabemos que no hay 3 y entonces son 4 magas. De aquí también vemos que la tercera afirmación es falsa (pues dijo que eran 5 magas) y entonces también

es falso que entre ellas hay 3 brujas. Por otro lado, ya vimos que dos de las afirmaciones son falsas así que por lo menos hay dos brujas.

11. **(d)** Llamemos x al número de abajo a la iquierda. Entonces la suma de los números alineados es $11+x$, de donde abajo a la derecha el número es $x+1$. Por la línea inferior tenemos $11+x=2x+2$, lo que nos dice que $x=9$ y las sumas son 20. Con esto ya es fácil completar el esquema y queda como se muestra abajo. La suma buscada es $9+3+5+2+10=29$.



12. **(c)** Si los números son $a<b<c<d<e$, basta pedir que $a+b+c>d+e$. Como queremos la menor suma posible, $e=d+1$. Además $d\geq 4$. También observamos que lo máximo que pueden ser a, b y c es $d-3$, $d-2$ y $d-1$. Entonces $a+b+c\leq 3d-6$ y $d+e\leq 2d+1$. Para que $3d-6>2d+1$ se necesita que $d>7$. Vemos que con los números 5, 6, 7, 8 y 9 la condición buscada funciona $(5+6+7=18>17=8+9)$.

13. **(e)** $\sqrt{7}=7^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$. Entonces tenemos que

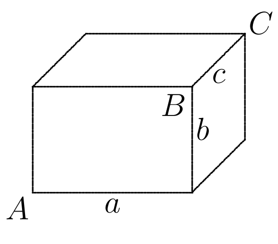
$$r=\frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}=\frac{7^{\frac{1}{6}}}{7^{\frac{1}{3}}}=7^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$$

pues $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)$. Entonces el siguiente término es $\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7}}=1$.

14. **(a)** Llamemos a, b y c a las longitudes de las aristas. Tenemos que $4(a+b+c)=140$ y buscamos el valor de $2(ab+bc+ca)$. En el dibujo, la máxima distancia entre dos vértices es la distancia de A a C. Por el teorema de Pitágoras la distancia de A a B es $\sqrt{a^2+b^2}$. Otra vez, por el teorema de Pitágoras, la distancia de A a C es $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Entonces

$$21^2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=35^2-2(ab+bc+ca),$$

de donde $2(ab+bc+ca)=35^2-21^2=784$.



15. **(c)** Llamemos R al radio del círculo mayor y r al del círculo menor. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $R^2=64+r^2$, de donde $R^2-r^2=64$. El área sombreada es $\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=64\pi$.