

## Soluciones para el Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2011

1. **(e)** Entre cada 10 números hay 4 impares que no terminan en 3. Eliminando los que llevan 3 antes de la última cifra, es fácil ver que al cuarto le corresponde el número 47.

2. **(b)** En total, el paso tiene 8 franjas blancas y 7 franjas negras. La longitud de la calle es  $(8 + 7) \cdot 50 = 750$  cm.

3. **(c)** Es imposible tener un acomodo distinto con los mismos dígitos que comience antes de las 21 horas; de hecho, la primera vez que los dígitos se repiten es a las 21:01.

4. **(e)** El cuadrado pequeño abarca la mitad del área del cuadrado mediano, que resulta igual a  $12 \text{ cm}^2$ . De la misma forma, el cuadrado mediano abarca la mitad del área del cuadrado grande, así que el área del grande es  $24 \text{ cm}^2$  y la diferencia con el pequeño es de  $18 \text{ cm}^2$ .

5. **(c)** Tenemos que

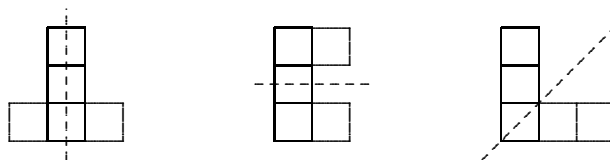
$$\frac{2001 \times 2.011}{201.1 \times 20.11} = \frac{2001 \times \frac{2011}{1000}}{\frac{2011}{10} \times \frac{2011}{100}} = 1.$$

6. **(e)** En la figura, cualquiera de los vértices libres que no están marcados con  $x$  están conectados a vértices con 1, 2 y 3, así que en ellos debe escribirse un 4. Dado que todos los vértices conectados con  $x$  tienen escrito un 4, en  $x$  se puede escribir cualquiera de 1, 2 o 3.

7. **(a)** Dado que el tercer día mi abuelo pescó menos que los otros dos ese día debió conseguir menos de la mitad de la docena de pescados, es decir que a lo mucho pescó 5. Dado que cada día pescó más que los anteriores el tercer día debió conseguir más de la tercera parte de la docena, es decir, 5 a lo menos.

8. **(b)** El más pequeño es 107 y el más grande es 800, así que la suma es 907.

9. **(c)** En la figura se muestran las tres únicas soluciones:



10. **(c)** La suma de los pesos de todas las perlas es 45 g, y el peso de las perlas usadas es  $17 + 13 + 7 + 5 = 42$ .

11. **(b)** Como la hormiga no puede cruzar dos veces la misma intersección, es claro que debe dejar

un grano de azúcar en el nivel horizontal inmediato al de la entrada. El grano de azúcar que se encuentra en el último nivel a la izquierda no se puede recoger en ningún recorrido, pues no hay espacio para entrar y salir por él sin repetir la intersección. También es necesario dejar un grano de azúcar más en alguno de los últimos dos niveles horizontales para respetar la condición. Es fácil ver que hay un recorrido donde sí se recogen 13 granos.

12. **(b)** Al momento de realizar el doblez el lado  $X$  queda sobrepuesto sobre el segmento marcado en la figura con longitud 13 y la base inferior del rectángulo, que mide  $11 + 13 = 24$ , así que su longitud es  $13 + 24 = 37$ .

13. **(a)** Cada vez que vamos a colorear otra región podemos elegir una que tiene frontera con exactamente tres regiones ya iluminadas y que, por tal razón, tienen una sola opción de color posible. Procediendo de esta manera llegamos a que la región marcada con  $X$  debe ser roja.

14. **(e)** El promedio de todos los números de la lista es 12, así que es necesario eliminar una pareja cuya suma sea 24.

15. **(d)** Al sumar los perímetros de todos los cuadrados obtendremos 10 veces la longitud del cuadrado original (pues por ejemplo, cada corte horizontal de un lado a otro cuenta dos veces el lado del cuadrado). De esta forma, cada lado del cuadrado mide 12 cm y el área del cuadrado es  $144 \text{ cm}^2$ .

16. **(b)** Es claro que Morelia recibió el gol en el partido que perdió, así que en ese no anotó ninguno. En el partido que empató no recibió ningún gol, así que tampoco anotó ninguno en éste. De esta forma el marcador del partido que ganó es  $3 : 0$ .

17. **(d)** El ángulo recto del triángulo puede estar en  $A$ , en  $B$  o en  $C$ , y el punto  $C$  debe estar en una paralela a distancia 1 de la recta  $AB$ . Para cada una de estas opciones hay dos elecciones posibles para el punto  $C$  (si pensamos que el segmento está dibujado de forma horizontal, hay una arriba y otra abajo del segmento).

18. **(b)** Usando que  $a < 1$  y  $b > 1$  tenemos que  $a - b < 0 < \frac{a}{b} < a < a \cdot b < b < a + b$ .

19. **(e)** Como el número es múltiplo de 4 y de 5, su última cifra debe ser 0. Como el número es múltiplo de 9 la suma de sus cifras debe ser un múltiplo de 9, usando que la suma de las 4 cifras que conocemos es  $2 + 4 + 8 + 0 = 14$ , el único dígito que podría completar el número es el 4.

20. **(a)** Si desdoblamos el cubo de forma que todas las caras que están rayadas queden en una misma fila, empezando en una de las caras donde la línea dibujada toca un vértice de la tapa inferior obtendremos un arreglo semejante al del primer dibujo. Para convencernos de que ésta es la

opción correcta basta con darnos cuenta de que la línea interseca aristas siempre en sus extremos o en sus puntos medios.

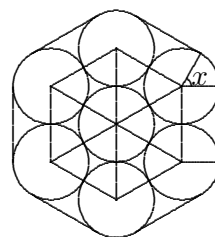
21. **(d)** Hay tres formas distintas para elegir las casillas de la primera fila (no es posible usar la segunda casilla, puesto que no deben quedar casillas negras en esa columna). Para cada uno de los casos donde se elige la casilla superior izquierda es fácil ver que hay dos formas distintas de terminar el acomodo; hasta aquí hemos contado cuatro posibilidades. En caso de no haber elegido la primera casilla de la primera fila, la posición de todas las casillas ya queda determinada; esto nos agrega una opción más.

22. **(e)** Sabemos que  $n$  debe ser un divisor de  $141 - 15 = 126$  que sea mayor a 15. Las posibilidades para  $n$  son 18, 21, 42, 63 y 126, así que la suma de todos es 270.

23. **(d)** Al sumar el área del cuadrado mediano con la del cuadrado pequeño obtenemos el área de ambos cuadrados sobrepuestos más el área de su intersección. Al restarle esa cantidad al área del cuadrado grande obtenemos justo la cantidad deseada, que es  $49 - 9 - 25 = 15$ .

24. **(a)** Cada partido elimina un equipo. Al final queda un solo equipo (el ganador), así que en total, al principio había 101 equipos.

25. **(c)** Cada sector de recta en el perímetro mide 2 cm (ver la figura) y el ángulo  $x$  mide  $360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$ . Entonces la liga mide  $6(2 + \frac{2\pi}{6}) = 12 + 2\pi$ .



26. **(d)** Llamemos  $a$  a la cantidad de tiros que acertaron a 8 puntos (o a 10) y  $b$  a los que acertaron a 5 puntos. Tenemos que  $(10 + 8)a + 5b = 18a + 5b = 99$ . Como 99 y 18 son múltiplos de 9, también lo debe ser  $b$ ; por otro lado, también observamos que  $b$  debe ser impar ya que  $5b$  sumado con un par ( $18a$ ) es impar (99). Es claro entonces que  $b$  debe ser 9 y entonces  $a = 3$ . Entonces el número total de tiros que acertaron en el blanco es  $3 + 3 + 9 = 15$ . Como esos 15 tiros fueron el 75% del total, tenemos que Aída hizo 20 disparos.

27. **(b)** Shaday no puede estar sentada entre sus dos amigos, ya que tanto Fabiola como Néstor afirman estar más cerca uno del otro que de ella y sabemos que ambos no pueden estar mintiendo. Si suponemos que Shaday dice la verdad entonces Néstor debe estar sentado entre sus dos amigas, pero más cerca de Shaday, con lo anterior tendríamos que Fabiola y Néstor estarían mintiendo, puesto que los dos afirman estar a más del doble de distancia de Shaday que uno del otro.

28. (a) Denotemos por  $A$  la edad de Andrea y por  $F$  la edad de Francisco. De las afirmaciones se puede deducir que tanto  $A + 1$  como  $F - 1$  son múltiplos de 7 y de 8 al mismo tiempo. Como el único múltiplo común de 7 y 8 que corresponde al rango de edad de un humano es 56, tenemos que Andrea tiene 55 años, Francisco tiene 57 y por tanto Francisco es dos años mayor que Andrea.

29. (e) Denotemos por  $(XYZ)$  el área de la figura  $XYZ$ . Tenemos

$$2 = (ABP) = \frac{BP \cdot AP}{2} \quad \text{y} \quad 5 = (BPC) = \frac{BP \cdot PC}{2},$$

así que  $PC = \frac{5}{2}AP$  y entonces  $(APD) = \frac{2}{5} \cdot 7 = \frac{14}{5} = 2.8$ . El área total es  $2 + 5 + 7 + 2.8 = 16.8$ .

30. (a) *Primera forma.* Los números deben terminar en 1 o en 9 para que su cuadrado termine en 1. Si  $x = 10b + 1$ , entonces  $x^2 = 100b^2 + 20b + 1$ , así que  $20b$  debe terminar en 80, o sea que  $2b$  debe terminar en 8; esto se logra con  $b = 4$  y con  $b = 9$ . Si  $x = 10b + 9$ , entonces  $x^2 = 100b^2 + 180b + 81$ , así que  $180b$  debe terminar en 00; o sea que  $8b$  debe terminar en 0; esto se logra con  $b = 0$  y con  $b = 5$ . Los números son 9, 41, 59 y 91, y su suma es 200.

*Segunda forma.* Tenemos que  $x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9)$  y queremos que esto sea múltiplo de  $100 = 4 \cdot 25$ ; observamos que  $x - 9$  y  $x + 9$  tienen la misma paridad, así que ambos deben ser pares; por otro lado, no es posible que ambos sean múltiplos de 5 puesto que su diferencia es 18; entonces ambos deben ser pares y uno debe ser múltiplo de 25 y, por lo tanto, de 50. Como  $x \leq 100$ , las únicas posibilidades son  $x - 9 = 0$  (es decir,  $x = 9$ ),  $x - 9 = 50$  (o sea,  $x = 59$ ),  $x + 9 = 50$  (esto es,  $x = 41$ ) y  $x + 9 = 100$  (de donde  $x = 91$ ).