Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2012

1. **(a)** Tenemos que 3 barras cuestan \$60, así que cada barra cuesta \$20.

2. **(e)** Si trazamos una línea horizontal a la mitad de la M, obtendremos 5 pedazos. La 0 puede dividirse en a lo más 2 pedazos y las demás en 4 pedazos cada una.

3. **(a)** Cada corte aumenta en 4 el número de cabezas, así que al final el dragón tendrá $5+(6\times 4) = 29$ cabezas.

4. **(c)** La primera y la octava se pueden juntar para formar el rectángulo; la segunda se puede completar con una igual a ella y lo mismo ocurre con la sexta. La quinta y la séptima también son complementarias. Sólo la tercera y la cuarta necesitan de dos piezas cada una.

5. **(b)** Entre las dos se comieron 9 frutas, así que entregaron la canasta con $25 - 9 = 16$ frutas: 8 peras y 8 manzanas. Como se comieron 5 peras entre las dos, al inicio había $8 + 5 = 13$ peras.

6. **(c)** Es claro que lo mejor es que los dígitos de los millares sean los más chicos, que les sigan los de las centenas, luego los de las decenas y finalmente los de las unidades, por ejemplo, que los números sean 1357 y 2468. La suma que se obtiene es 3825.

7. **(c)** Mi recorrido empieza con A y nunca vuelve a pasar por allí porque estaría usando un camino más de una vez. De la misma manera, solamente puedo usar uno de los que llegan a B en mi recorrido. Puedo usar 7 de los caminos de la siguiente manera: voy a la izquierda, después hacia arriba a la derecha, después a la izquierda, luego abajo a la derecha, otra vez a la izquierda y después directo hasta B.

8. **(e)** Al segundo rectángulo rojo le sobra una pieza rectangular con respecto al que se usó en la primera bandera. Uno de los lados de ese pedazo extra mide 30 cm, como su área es de 1500 cm^2, el otro lado mide 50 cm, que coincide con la medida del cuadrado amarillo original. Así, el otro lado del rectángulo amarillo mide 50-30=20 cm y su área es $50 \times 20 = 1000$ cm^2.

9. **(b)** Entre el segundo y el tercer cuadro la suma es 90, así que el cuarto cuadro tiene el número 110; esto nos dice que los últimos dos cuadros suman 240 y lo que falta para 300 es 60.

10. **(d)** Para dejar un número de monedas múltiplo de 3 en el primer montón debe hacer la tercera operación 1, 4 o 7 veces. Para dejar un número par de monedas en el segundo montón debe hacer la tercera operación 0, 2, 4, 6, 8, 10 veces. Entonces lo mínimo es hacer la tercera operación 4 veces, una vez la primera operación y 3 veces la segunda operación.

11. **(b)** Los triángulos inferiores de la estrella tienen un vértice común y entonces el ángulo en ese vértice es igual. Llamemos α a ese ángulo. El otro ángulo en el triángulo izquierdo mide

$180^o - 100^o = 80^o$; el otro ángulo en el triángulo de la derecha mide $180^o - 93^o = 87^o$. Fijándonos en las sumas de los ángulos de los triángulos inferiores de la estrella, tenemos que $x + \alpha + 87^o = 58^o + 80^o + \alpha$, de donde $x = 51^o$.

12. **(c)** Detrás de la tarjeta "primo" debe estar escrito el 12 ya que es el único que no lo es, así que detrás de "impar" debe estar el 2 y entonces el 5 debe estar detrás de "múltiplo de 7".

13. **(d)** Sea l la longitud de los lados de cada triángulo pequeño. El perímetro del hexágono es $(6 - 2l) \cdot 3 + 3l = 18 - 3l$, mientras que la suma de los perímetros de los triángulos pequeños es $9l$. Así, $18 - 3l = 9l$, de donde $l = 1.5$ cm.

14. **(c)** Si hacemos una lista con las cantidades que robaron los ratones, tendríamos que, como nadie robó la mitad de lo que robó otro, sólo pueden aparecer dos números del conjunto $\{1, 2, 4, 8\}$ y uno del conjunto $\{3, 6\}$. Las tres opciones de números restantes pueden aparecer en la lista sin importar los que ya elegimos.

15. **(d)** Lo mejor es multiplicar por 2 primero y después reducir. Entonces al final, lo más largo que puede ser el lado es $8 \times 2 \times 2 - 2 - 2 = 28$. En ese caso el perímetro del espejo será $4 \times 28 = 112\,\text{cm}$.

16. **(e)** Sea h la altura del cubo más pequeño. Tenemos que $h + (h + 2) = h + 8$, de donde $h = 6$. La altura de la torre es $h + (h + 2) + (h + 4) + (h + 6) + (h + 8) = 5h + 20 = 50\,\text{cm}$.

17. **(b)** Sea h el número de hombres y sea n el total de personas en la fiesta. Tenemos que $\frac{3h}{4} = \frac{4(n-h)}{5}$, de donde $31h = 16n$; entonces n debe ser un múltiplo de 31 positivo y menor a 50, es decir $n = 31$. De la ecuación anterior tenemos que $h = 16$ y en total hay $\frac{3(16)}{4} = 12$ hombres bailando, así que hay 24 personas bailando en total.

18. **(b)** Llamemos s a la suma de las columnas. El número que falta en la tercer columna es $s - 4$ y la suma de cada renglón es igual a $2 + 4 + (s - 4) + 2 = s + 4$. El número que falta en la segunda columna es $s - 4 - 3 = s - 7$. Si x es el número que estamos buscando, la suma del último renglón es $6 + (s - 7) + 1 + x = x + s$; como las sumas de todos los renglones son iguales, $x + s = s + 4$, de donde $x = 4$.

Solución alternativa: La suma de todos los cuadros se puede obtener como la de las 4 columnas o la de los 3 renglones; de esta manera tenemos que la suma de las columnas es múltiplo de 3 y la de los renglones es múltiplo de 4. Entonces el único número que puede ir en el cuadro en blanco del primer renglón es el 8. Aquí ya tenemos que la suma de los números en cualquier columna es 12. De aquí ya es fácil completar la figura y queda como sigue:

2	4	8	2
4	3	3	6
6	5	1	4

19. **(d)** Los cuadrados de dos cifras son 16, 25, 36, 49, 64 y 81, así que los únicos números siameses son 164, 364, 649 y 816, cuya suma es 1993.

20. **(d)** Como la suma total es 28, la suma de cada conjunto debe ser 14. En uno de los conjuntos está el 7 y debe estar acompañado con 1 y 6, o con 2 y 5, o con 3 y 4, o con 1, 2 y 4.

21. **(e)** Lo que Andrea tiene es $633 = [.9 + (.3)(1 + (.2)(1.1))]x = [.9 + (.3)(1.22)]x = [.9 + .366]x = 1.266x$, de donde $x = \frac{633}{1.266} = 500$.

22. **(c)** Calculemos el área de los triángulos no sombreados. Sean P el punto medio de CB, Q el punto medio de AB y O la intersección de AC con MP. Sea A_1 el área del triángulo ABC que, por ser la mitad del cuadrado, es igual a $60\,\text{cm}^2$. Sea A_2 el área del triángulo CDM que, por ser la mitad del rectángulo $MPCD$, que a su vez es a mitad del cuadrado $ABCD$, es igual a $30\,\text{cm}^2$. Sea A_3 el área del triángulo ANM que, por ser la cuarta parte del cuadrado $AQOM$, que a su vez es la cuarta parte del cuadrado $ABCD$, es igual a $7.5\,\text{cm}^2$. Como $A_1 + A_2 + A_3 = 97.5\,\text{cm}^2$, el área sombreada es igual a lo que falta para completar $120\,\text{cm}^2$.

23. **(d)** Observemos que el 12 debe ir junto al 10 y al 9, el 11 debe ir junto al 9 y al 8, y entonces un pedazo del círculo debe ser 10 - 12 - 9 - 11 - 8 . Como 10 no puede ir junto al 8 (se cerraría el círculo antes de tiempo), entonces el 7 va junto al 10 y la mitad del círculo está determinada como 7 - 10 - 12 - 9 -11- 8. Haciendo un análisis muy similar se obtiene que la otra mitad del círculo es 6 - 3 - 1 - 4 - 2 - 5 y la única forma de pegarlos es haciendo que el 6 sea vecino del 8.

24. **(b)** Después de 5 pasos, las cartas quedan justo en orden inverso al inicial y en el sexto paso se toma la carta de la derecha y se pone en el centro, así que después de 10 pasos el orden es como al principio y esto se vuelve a repetir cada 10 pasos. Como $2012 = 201 \cdot 10 + 2$, El paso 2012 es como el segundo y la carta B queda enmedio.

25. **(e)** Si al principio del libro acomodamos todos los cuentos con extensión par, esos 15 cuentos cumplirían con la condición. Si enseguida acomodamos todos los cuentos con extensión impar, tendríamos 8 cuentos más que cumplen con la condición, dando un total de 23. Tratemos de encontrar un acomodo mejor. Observemos que si un cuento comienza en una página impar y su extensión es impar, entonces el siguiente cuento empieza con una página par (y no cumple). Así, si m es la cantidad de cuentos con extensión impar que cumplen, hay al menos $m - 1$ cuentos

que no cumplen con la condición (suponiendo que el último sea uno de los de extensión impar que sí cumplen). Para que el acomodo sea mejor al que dimos necesitamos que $m \geq 8$ (si no, $30-(m-1)>23$), pero entonces la cantidad máxima de cuentos que pueden cumplir es 15+8=23. Así, no podemos encontrar un acomodo con más de 23 cuentos que cumplan la condición.

26. **(c)** Sea a la longitud de los pedazos que tienen a los extremos originales de la cuerda y l la longitud de un octavo de la cuerda. Tenemos que la cuerda quedó dividida en segmentos de longitud a, $2a$ y $2(l-a)$. Las combinaciones posibles son $a=4$ y $2(l-a)=9$, $a=9$ y $2(l-a)=4$, $2a=4$ y $2(l-a)=9$, $2a=9$ y $2(l-a)=4$, de donde obtenemos las longitudes 68, 88, 52 y 52, respectivamente.

27. **(a)** Llamemos s a la suma que buscamos. Tenemos que la suma de los perímetros de las 7 figuras resultantes es igual al perímetro del triángulo grande más dos veces s, es decir, $25+20=19+2s$, de donde $s=13$.

28. **(a)** Sean a, b, c, d, e, f, g, h e i los números que se escribirán, según se muestra en la figura.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Tenemos que $(a \times b \times c) \times (d \times e \times f) = 1$ y $(a \times b \times d \times e) \times (b \times c \times e \times f) = 4$, de donde $b \times e = 4$. Haciendo un razonamiento parecido podemos concluir que $h \times e = 4$. Así, tenemos que $e = 1 \times e = (b \times e \times h) \times e = 16$.

29. **(a)** Como F es punto medio de BC y ED es paralela a BC, por semejanza, P es punto medio de DE. Ahora, también por semejanza, $\frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PF}$, esto es, $AE = EC \cdot \left(\frac{AP}{PF}\right) = 4\left(\frac{10}{5}\right) = 8$. Entonces el triángulo AEP debe ser rectángulo pues $10^2 = 6^2 + 8^2$ y entonces también lo es ACB. Una vez más, usando semejanza tenemos que $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, es decir, $BC = \frac{DE \cdot AC}{AE} = \frac{12 \cdot 12}{8} = 18$. Finalmente, usando el teorema de Pitágoras obtenemos $AB = \sqrt{18^2 + 12^2} = \sqrt{4(81+36)} = 2\sqrt{117}$.

30. **(d)** La única forma de matarlo es lograr que en algún momento tenga 2 cabezas. Si n es impar, entonces al sumarle 2 o al dividir entre 3, el número sigue siendo impar, así que no es posible. Si $n > 2$ es par, entonces alguno de n, $n+2$ o $n+4$ es múltiplo de 3 y al dividirlo entre 3 sigue siendo par pero más chico que n, así que en algún momento se llega a 2. El único problema es con 98 y con 100 con los que ya no se puede sumar 2 hasta llegar a un múltiplo de 3 pues se sobrepasa 100. La respuesta es todos los pares menores o iguales que 96.