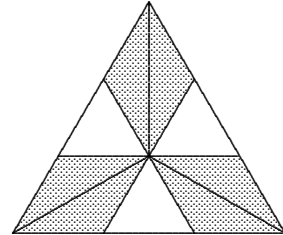


**Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la
Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2013**

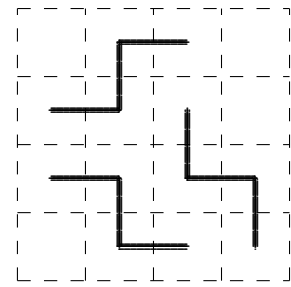
1. (a) Las únicas que tienen distinto perímetro son la H y la U.
2. (a) Estarán encendidas las que se prendieron entre 15 y 55 minutos, es decir, 4 velas.

3. (d) Llamemos O al punto de intersección de las líneas y unamos O con los vértices del triángulo. Así el triángulo queda partido en 9 triángulos de igual área (pues tienen misma altura desde O y base igual a la tercera parte de un lado del triángulo) y la parte sombreada está formada por 6 de estos triángulos, de modo que el área sombreada es $9 \cdot \frac{6}{9} = 6$.



4. (b) Sean l la edad de Leonardo, i la de Irving y e la de Eduardo. Como l es un divisor de 14 y de 35, tenemos que $l = 1$ o $l = 7$. Si suponemos $l = 1$ entonces $e = 35$, pero eso no puede ser pues $e < 14$. Así, $l = 7$ y, por tanto, $e = \frac{35}{7} = 5$ e $i = \frac{10}{5} = 2$. De esta forma, tenemos que $l + i + e = 7 + 2 + 5 = 14$.

5. (d) En total hay 16 cuadritos y cada pieza utiliza 4 cuadritos, así que no se pueden obtener más de 4 piezas. Notemos que no es posible que todos los cuadritos de la hoja sean parte de alguna pieza pues, si hay una pieza que tenga la esquina inferior izquierda de la cuadrícula, es fácil darse cuenta de que hay al menos un cuadrito que no formará parte de ninguna otra pieza. Así, no es posible recortar 4 piezas. En la figura se muestra una forma de por donde recortar tres.



6. (e) Un número jocoso debe tener al menos dos dígitos. Como el segundo puede ser a lo más 9, el primero debe ser mayor que 2. Si el primer dígito es 3, la única opción posible para el segundo dígito es 8. Así, el número jocoso más pequeño es 38 y la suma de sus dígitos es 11.

7. (a) Si se sacan 5 pelotas es posible que se haya tomado una de cada color, pero si se toman 6 forzosamente un color debe estar repetido.
8. (e) La suma total es 55 que no es par, así que no puede hacerlo.
9. (b) En cada vuelta que completa Jana, Abi está $\frac{1}{8}$ de vuelta más cerca de ella. Inicialmente

estaban separadas por media vuelta, así que Abi alcanzará a Jana exactamente cuando ésta complete la cuarta vuelta.

10. **(a)** De forma horizontal solamente es posible pintarlo en los dos renglones superiores, pegado al lado derecho. De forma vertical es posible pintarlo únicamente en la cuarta o quinta columna, contando de izquierda a derecha. En cada columna se puede pintar de 3 formas distintas. En total, hay $2 + 2 \cdot 3 = 8$ maneras de hacerlo.

11. **(c)** La mayor diferencia se alcanza cuando se cambia la cifra de los millares. Las parejas de números consecutivos en los que ocurre esto son (0321, 1023), (1320, 2013) y (2310, 3012). La primera y la tercera pareja tienen diferencia 702 y la segunda tiene diferencia 693 así que la mayor diferencia es 702.

12. **(c)** El 3 es el único que no puede doblarse para formar un cubo, puesto que la parte inferior no embona.

13. **(e)** Basta elegir el mayor número de cada columna del mapa para saber cuál torre determina la altura que se ve desde el frente.

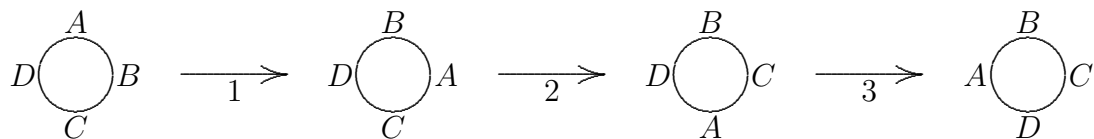
14. **(e)** Tomando dos pares de diagonales perpendiculares tenemos que el círculo está inscrito en un cuadrado de 10×10 de lado, así que el diámetro del círculo es 10 y el radio es 5.

15. **(b)** Si hay dos números, el porcentaje es 50%. Como $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ basta con escribir 5 números en la lista y comenzar con un impar para obtener el 60%. Como $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ basta con escribir 5 números en la lista y comenzar con un par para obtener el 40%. Como $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$ basta con escribir 25 números en la lista y comenzar con un par para obtener el 48%. Como $\frac{9}{20}$ es la simplificación de $\frac{45}{100}$, para que la lista tenga 45% de impares debe tener un múltiplo de 20 elementos y, por tanto, la longitud de la lista debe ser par así que contiene exactamente 50% de números impares y no 45% como queríamos.

16. **(e)** Valentina es la única que no nació en el mismo mes que alguien más, así que nació el 20 de febrero de 2001. Paco nació en un día con el mismo número que Valentina, así que nació el 20 de marzo de 2001 y es el más joven del grupo.

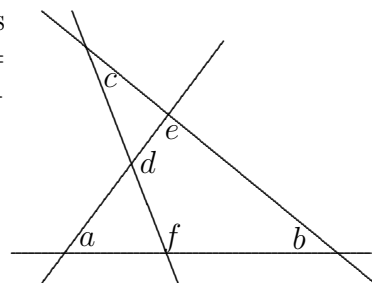
17. **(a)** Entre el primer lugar y el último tuvieron 16 votos, así que los otros 3 tuvieron un total de 20 votos. Sabemos que el segundo lugar tuvo menos votos que el primero; si hubiera tenido 10 u 11 votos, los otros dos candidatos habrían sumado 9 o 10 votos, pero sabemos que uno de esos números debería ser al menos 5, así que no es posible. Como $8 + 7 + 5 = 20 = 9 + 6 + 5$, entonces es posible que haya tenido cualquiera de 8 o 9 votos.

18. (d) Veamos los primeros tres movimientos de los sombreros:



Observamos que quedan girados una posición a la izquierda y que otra vez se empieza con el intercambio de Adrián con Bruno. Esto nos dice que cada tres movimientos los sombreros quedan girados una posición. Para que queden igual deben girar todos 4 posiciones.

19. (b) En la figura se han marcado los ángulos e y f . Tenemos $e = 180^\circ - a - b = 180^\circ - 55^\circ - 40^\circ = 85^\circ$ y $f = 180^\circ - c - b = 180^\circ - 35^\circ - 40^\circ = 105^\circ$. Así, $d = 360^\circ - e - f - b = 360^\circ - 85^\circ - 105^\circ - 40^\circ = 130^\circ$.



20. (a) Cortando por las líneas horizontales que tienen a D y a B y las líneas verticales que tienen a D y a C obtenemos un rectángulo de $5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$. Si recortamos el cuadrado totalmente blanco que contiene a A y el cuadrilátero, nos quedan cuatro triángulos con áreas de 1.5 cm^2 , 2 cm^2 , 3.5 cm^2 y 6 cm^2 . Así, el área del cuadrilátero en cm^2 es $35 - 1 - 1.5 - 2 - 3.5 - 6 = 21$.

21. (d) La suma de ambos números es impar, así que los últimos dígitos de ambos no pueden ser iguales. De esta forma, el dígito que se borró en el segundo número fue el último. Llamemos a , b , c , d y e , en orden, a los dígitos del primer número. En la suma el acarreo nunca es mayor a 1, así que $a = 5$ o $a = 4$. Si $a = 5$ entonces no hubo acarreo en el paso anterior, pero eso es imposible pues 5 es mayor que 2. Así, $a = 4$ y forzosamente $b + 4 = 12$, de donde $b = 8$ o $b = 7$. Si $b = 8$ entonces no hubo acarreo en el paso anterior, pero eso es imposible pues 8 es mayor que 7. Así, $b = 7$ y forzosamente $c + 7 = 17$, de donde $c = 9$. Como 9 es mayor que 1, $d + 9 = 11$, de donde $d = 2$. Finalmente, $e + 2 = 3$, así que $e = 1$. De esta forma, $a + b + c + d + e = 23$.

22. (a) Llamemos h a la altura del triángulo grande. Entonces

$$10 = \frac{1}{2}PQ \cdot h$$

$$5 = \frac{1}{2}PQ \cdot (6 - h).$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda obtenemos $\frac{h}{6-h} = 2$, de donde $h = 12 - 2h$ así que $h = 4$ y entonces, de la primera ecuación, tenemos $PQ = \frac{20}{4} = 5$.

23. **(c)** Cada vez que se plante un manzano en la posición i , en la posición $i + 4$ no debe haber manzano; esto nos dice que hay un pino por cada manzano, salvo cuando $i + 4 > 20$. Entonces el máximo número de manzanos se alcanza cuando se plantan en las posiciones siguientes:

1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20.

24. **(b)** Tenemos que $\angle CNM + \angle CMN = 180^\circ - 43^\circ$. Así, $\angle ACB = \angle ACN + \angle BCM - 43^\circ = \angle CNM + \angle CMN - 43^\circ = 137^\circ - 43^\circ = 94^\circ$.

25. **(b)** Llegaron 20 corredores antes que David, así que llegaron 30 corredores después de Rodrigo. Llamemos x a la cantidad de corredores que llegaron antes que Rodrigo. Tenemos que $2x + 20 = 30 + x$, de donde $x = 10$. En total hubo $10 + 1 + 30 = 41$ corredores.

26. **(a)** Numeremos los carros y las salidas de manera que cada carro tenga el número de la calle por la que entró. Entonces el problema equivale a ver de cuántas maneras podemos revolver los números del 1 al 4 de manera que ninguno quede en su lugar. Éstas son las siguientes 9: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 y 4321.

27. **(d)** Los siguientes cuatro números en la lista son -1, 1, -1 y -1. Es claro que la lista se puede separar en bloques iguales de tres números, comenzando con los primeros tres. La suma de cada bloque es -1 y en total hay $\frac{2013}{3} = 671$ de esos bloques.

28. **(e)** En la cuarta opción la niña entra a la cocina cuando está caliente el cuarto pan. Es imposible que después el segundo pan haya estado más caliente que el primero (y se lo haya comido antes). Es fácil comprobar que las demás opciones son posibles, considerando que cuando hay dos números consecutivos en orden creciente es porque la niña llegó a la cocina cuando el segundo de esos panes era el último que había salido del tostador.

29. **(a)** Notemos que los números 1 y 2 deben corresponder a dos de las bolitas. Si el 1 está en A entonces B es 8. Como D o C deben tener la etiqueta del 2, el 10 debió usarse para etiquetar el palito que une al 2 con el 8 (lo cual sabemos que no sucedió). Si 1 se usó en B la situación sería muy parecida a la del caso anterior. Luego, el 1 debió ponerse en C o en D . Si 2 se usa para etiquetar D entonces 3 sería la etiqueta de DC . Como las etiquetas de A y B deben sumar 9 las únicas opciones posibles serían 4 en un extremo y 5 en el otro. Si 4 es la etiqueta de A entonces 5 es la etiqueta de B , así que AD y BC tendrían que etiquetarse con 6, lo cual no es posible (pues cada etiqueta se usó exactamente una vez). Si 4 es la etiqueta de B , la situación sería muy parecida a la del caso anterior. De esta forma, 2 y 7

son las etiquetas de A y B en algún orden. Supongamos que 7 es la etiqueta de A . Notemos que 11 debe ser etiqueta de un palito, que además no puede estar pegada a una bolita con 1 o 2. El único lugar posible para colocarla es AD , así que en D hay que escribir un 4 y en DC un 5. Es fácil terminar de etiquetar el resto del tetraedro con los números sobrantes. Si 7 es la etiqueta de B la situación es la misma que la anterior y también se obtiene que en DC es forzoso escribir un 5.

30. (c) Si n no es par, entonces sus divisores más grandes son, a lo más, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{5}$ y $\frac{n}{7}$, cuya suma es menor o igual a $\frac{71n}{105}$. Así, si n es maléfico, debe ser par. Si n no es múltiplo de 3, sus divisores más grandes son, a lo más, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$ y $\frac{n}{5}$, cuya suma es menor o igual a $\frac{19n}{20}$. Así, si n es maléfico, debe ser múltiplo de 3. De esta forma, (c) es verdadera. Por otra parte, 30 es maléfico y no cumple (a) ni (d). Además 12 es maléfico y no cumple (b).