Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2014

1. **(d)** Dos litros de agua equivalen a $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de la cubeta, así que la capacidad total de la cubeta es de 8 litros.

2. **(d)** El cuadrado debe tener 12 cm de lado, así que el rectángulo tiene medidas $6\,\text{cm} \times 24\,\text{cm}$ y su perímetro es $2(6+24) = 60$ centímetros.

3. **(a)** En total son necesarios $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubos, así que hacen falta $27 - 7 = 20$ cubos.

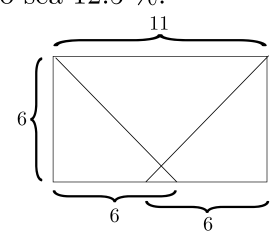
4. **(e)** Los hermanos mayores se quedaron con el $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ de la bolsa, así que el hermano menor se quedo con la mitad.

5. **(b)** Tenemos que 11×111 es un factor común de todas las multiplicaciones, así que es suficiente con comparar $4 \times 7 = 28$, $5 \times 6 = 30$, $7 \times 4 = 28$, $8 \times 3 = 24$ y $9 \times 2 = 18$.

6. **(b)** El área total de los 5 círculos es de $5\,\text{cm}^2$, pero se han traslapado 4 veces, así que la superficie de la mesa que está cubierta es de $5 - 4(\frac{1}{8}) = \frac{9}{2}\,\text{cm}^2$.

7. **(b)** A partir de la segunda calificación, cada calificación que se agrega contribuye en la mitad del resultado parcial. Entonces, si sólo fueran 3 calificaciones, la tercera contribuiría en $\frac{1}{2}$, si fueran cuatro, contribuiría en $\frac{1}{4}$ (pues la cuarta contribuiría en la mitad y la contribución de la tercera sería la mitad de su contribución anterior); como son 5, contribuye en $\frac{1}{8}$, o sea 12.5 %.

8. **(a)** Se forman dos triángulos isósceles de lado 6 que se traslapan como se muestra en la figura. Como el lado mide 11, el traslape mide 1.

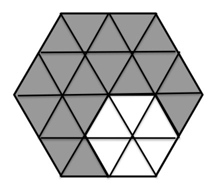


9. **(c)** Tenemos que

$$\underbrace{111\cdots11}_{2014}\times 101 = \underbrace{111\cdots11}_{2014}\times 100 + \underbrace{111\cdots11}_{2014} = \underbrace{111\cdots11}_{2014}00 + \underbrace{111\cdots11}_{2014} = 11\underbrace{222\cdots22}_{2012}11.$$

Entonces la suma de los dígitos es $2012 \times 2 + 4 = 4028$.

10. **(c)** Podemos dividir el hexágono en 24 triángulos iguales, como se muestra en la figura. Como el hexágono menor quedó cubierto por 6 de estos triángulos, el área del hexágono es igual a $4 \times 4 = 16\,\text{cm}^2$.



11. **(e)** Cada dos semanas Diego tiene 3 clases más que Ana.

12. **(e)** Numeremos las casillas en el sentido de las manecillas del reloj de manera que la casills donde está la flecha tenga el 1. Como vemos en la siguiente tabla que representa la posiciones sucesivas de la flecha y el corazón, a partir del octavo movimiento todo se repite.

movimiento	1	2	3	4	5	6	7	8
$\leftarrow$	1	4	7	3	6	2	5	1
$\heartsuit$	4	7	3	6	2	5	1	4

13. **(a)** Denotemos por H al número de hombres, por M al número de mujeres y por N al número de niños. Tenemos que $H = 2M/3 = (2/3) \times 8N = 16N/3$, de donde $H + M = (16N/3) + 8N = (16+24)N/3 = 40N/3$.

14. **(c)** Las edades de Raquel, su hija y su nieta deben ser potencias de 2, así que debemos

encontrar tres números del conjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ que sumen 100. La única posibilidad es $64 + 32 + 4$.

15. **(c)** Llamemos O a la intersección de AD y BH y β al ángulo HOA. Tenemos que $\beta = 180 - 4\alpha$. Además, fijándonos en el triángulo AOH tenemos que $\beta = 90 - \alpha$. Así, resulta que $180 - 4\alpha = 90 - \alpha$, de donde $\alpha = 30$.

16. **(b)** En total tardaron 90 minutos en bañarse, así que el baño que estuvo ocupado por más tiempo debió ser utilizado por 45 minutos o más. La menor suma mayor o igual a 45 que se puede conseguir con 8, 10, 12, 17, 21 y 22 es 46, por lo que esa es la menor cantidad de tiempo en la que pudieron terminar todos de bañarse.

17. **(d)** Como quitar 50 monedas del total sería lo mismo que quitarle 5 monedas a cada pirata, tenemos que hay $\frac{50}{5} = 10$ piratas. Sabemos que 4 piratas recibieron $6 \times 10 = 60$ monedas (es lo que se repartiría entre el grupo si esos 4 piratas no estuvieran en él), así que cada pirata recibió $\frac{60}{4} = 15$ monedas. En total hay $10 \times 15 = 150$ monedas.

18. **(a)** Llamemos l al lado menor de un rectangulito y L a su lado mayor. Fijándonos en sentido horizontal, tenemos que $L + L - l + l + L = 24$, de donde $L = 8$. Fijándonos en sentido vertical, tenemos que $l + 8 + 8 + l = 24$, de donde $l = 4$. El área que buscamos es $l \times L = 4 \times 8 = 32\,\text{cm}^2$.

19. **(c)** La lista debe contener 13 múltiplos de 13, pero a lo más dos de ellos pueden ser pares, así que al menos 11 de ellos deben ser impares. La lista más pequeña es: 13×1, 13×2, 13×3, 13×4, 13×5, 13×7, 13×9, 13×11, 13×13, 13×15, 13×17, 13×19, $13 \times 21 = 273$.

20. **(e)** Si el 9 estuviera en la casilla central, la suma de sus vecinos sería $8 + 7 + 6 + 5 = 26$ y no cumpliría que la suma de sus vecinos es igual a 15. Por lo anterior, el 9 tiene que estar en alguno de los extremos y tener dos vecinos en las esquinas del cuadrado. La mayor suma que se puede obtener con números de las esquinas es $3 + 4 = 7$; como los vecinos de 9 suman 15, la única posibilidad es que esto suceda es que el 9 sea vecino de 3, 4 y 8. Luego, el 8 debe estar en la casilla central y sus vecinos son 5, 6, 7 y 9, que suman 27.

21. **(d)** Como $18 = 2 \times 3 \times 3$, en el caso de que en la lista hubiera dos múltiplos de 3 o un múltiplo de 9, Octavio tendría que evitar todos los pares (y su lista quedaría con menos de 50 números). En el caso de que en la lista haya a lo más un múltiplo de 3 (que no sea un múltiplo de 9), lo máximo que podemos conseguir es una lista de $100 - 32 = 68$ números (dejando al 3 y a todos los números del 1 al 100 que no son múltiplos de 3, por ejemplo).

22. **(d)** Llamaremos O a la intersección entre TQ y RP. Como los triángulos OQR y RPQ son rectángulos, tenemos que $\angle TQR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle RPQ = 90^\circ$, de donde $\angle TQR = \angle RPQ$. Por lo anterior, como TQR y PRQ son triángulos rectángulos, resultan ser triángulos semejantes, así que $\frac{QR}{PQ} = \frac{TR}{QR} = \frac{PQ}{2QR}$, lo que implica que $\left(\frac{QR}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

23. **(b)** Llamémosle k a la cantidad de problemas que ambas resolvieron. Por cada problema que ambas resuelven se suman 5 puntos a la cuenta total, así es que el total de puntos resulta de calcular $5k + 4(60 - k) + 4(60 - k) = 480 - 3k$. Luego, como $480 - 3k = 312$, tenemos $k = 56$.

24. **(e)** Sean m el dinero que aportó Mariana y r el que aportó Ricardo. como buscamos porcentajes, podemos suponer que $r = 100$ y tenemos que $\frac{m+100}{2} = 70$, de donde $m = 40$. La proporción que le tocó a Mariana es $\frac{70}{40} = 1.75$.

25. **(b)** Sea O el punto de intersección de AC y DB. Llamemos h y k a las respectivas alturas

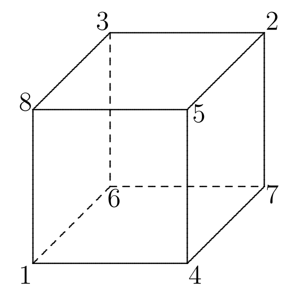
en O de AOB y de DOC. Tenemos que

$$\frac{AB \cdot h}{2} = 5 = \frac{15}{3} = \frac{AB \cdot (h+k)}{6},$$

de donde $h + k = 3h$ y así $k = 2h$. Por otro lado, los triángulos ABO y CDO son semejantes, de donde $DC = 2AB$ y obtenemos que el área de BDC es

$$\frac{2AB \cdot 3h}{2} = 6\frac{AB \cdot h}{2} = 30.$$

26. **(a)** Como $1+2+3+\cdots+8 = 36$ y cada vértice pertenece a 3 caras, entonces la suma de todas las sumas de las caras es 3×36, de donde cada cara debe tener suma $\frac{3\times 36}{6} = 18$. Entonces el número que va en el otro vértice de la base es $18-(1+4+6) = 7$. Los números que faltan por colocar son 2, 3, 5 y 8. Entonces a la cara lateral que tiene ya los números 4 y 7 le falta una suma de 7, lo cual sólo se logra con 2 y 5 (de entre los números restantes). A la cara posterior que tiene ya los números 6 y 7 le falta una suma de 5, lo cual se logra sólo con los números 2 y 3; entonces ya tenemos que en lugar de x va 2. La colocación completa es:



27. **(c)** Cualquier elección de 3 vértices produce un triángulo. Son 8 vértices así que el número de posibilidades de escoger los tres vértices en orden es $8 \times 7 \times 6$. Sin embargo, no nos importa el orden de los vértices en un cada triángulo así que debemos dividir esta cantidad entre 6 y obtenemos que el total de triángulos es 56. Ahora hay que restar los que se forman en las caras. En cada cara se forman 4 triángulos y, como son 6 caras, los que tenemos que restar son 24.

28. **(d)** Como $B+E$ y $B+C$ pesaron menos de 1000 gramos sabemos que los pesos obtenidos son correctos; juntando estos resultados obtenemos que $2B+(C+E) = 1700$. Dado que $C+E \geq 1000$, tenemos que $B \leq 350$. Como $B+D \geq 1000$, tenemos que $D \geq 650$ (y por tanto $B < D$). De $A+E = 600$ podemos concluir que A y E son menores que D. Finalmente, como $B+C = 900$ y $B+D > 1000$, podemos concluir que $C < D$.

29. **(e)** Cuando se pregunta ¿'Estás vestido de morado?", los únicos que pueden responder "Sí"son los amarillos, así es que hay 8 duendes amarillos que dijeron una mentira en la primera y en la tercera pregunta. Como 17 duendes respondieron "Síçuando se preguntó ¿'Estás vestido de verde?ز 8 duendes amarillos mintieron en ese caso, en total hay $17-8 = 9$ duendes verdes y morados. Como estos 8 duendes amarillos fueron los únicos que dijeron la verdad en la segunda pregunta, hay $12-8 = 4$ duendes morados. Así, tenemos que hay $9-4 = 5$ duendes verdes y el número de duentes amarillos es $20-5-4 = 11$.

30. **(a)** Sea O el centro del 15-ágono y P el centro del n-ágono. El triángulo OAB es congruente a cualquier triángulo que se forme tomando como vértices a O y a los dos extremos de un lado del 15-ágono; como hay 15 triángulos de esos alrededor de O tenemos que el ángulo AOB mide $\frac{360^o}{15} = 24^o$. Esos 15 triángulos son congruentes y así el ángulo ABC (dentro del 15-ágono) es igual a la suma de los ángulos ABO y BAO, que es igual a $180^o - 24^o = 156^o$. Por otro lado, el triángulo BCD es equilátero y entonces el ángulo ABD (dentro del n-ágono) mide $360^o - 60^o - 156^o = 144^o$. Como $PAB + PBA = ABD$, el ángulo APB mide $180^o - 144^o = 36^o$, así que debe haber $\frac{360}{36} = 10$ triángulos congruentes a APB alrededor de P. Por lo anterior, tenemos que $n = 10$.