Soluciones de los problemas

Solución del problema 1. La respuesta es (b).
Si x es el lado de cada cuadrado, tenemos que los lados de los triángulos pequeños miden x y los del triángulo grande miden $2x$, de donde el perímetro mide $14x$. Luego, $14x = 98$ y $x = 7$, por lo que el área buscada es $49\,cm^2$.

Solución del problema 2. La respuesta es (a).
Como hay $\frac{2}{5}$ de peces amarillos y de ellos $\frac{3}{4}$ son hembras, tenemos que $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ del total son peces amarillos hembra. Luego, $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$ del total serán peces amarillos macho. Como $\frac{1}{2}$ del total son machos, $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$ del total son peces rojos machos.

Solución del problema 3. La respuesta es (c).
La mitad de estos números, 375 son múltiplos de 2. De entre ellos, una tercera parte, 125 son múltiplos de 3, por lo que hay $375 - 125 = 250$ pares que no son múltiplos de 3.

Solución del problema 4. La respuesta es (a).
Si elegimos el número de monedas de 5 y 2 pesos (sin pasarnos de 15 pesos), el número de monedas de 1 peso quedará determinado. Luego, basta ver cuántas monedas de 5 y 2 pesos usaremos. Si usamos 3 monedas de 5 pesos, ya acabamos, si usamos 2 monedas de 5 pesos podemos usar 0, 1 ó 2 de 2 pesos, si usamos 1 de 5 pesos, podemos usar entre 0 y 5 monedas de 2, mientras que si no usamos monedas de 5 pesos, podemos usar entre 0 y 7 monedas de 2 pesos.
Luego, el número de maneras de hacerlo es igual a $1 + 3 + 6 + 8 = 18$.

Solución del problema 5. La respuesta es (b).
Sabemos que 1 kilómetro tiene 1000 metros y que 1 hora tiene 60 minutos, por lo tanto
$$15\frac{km}{hr} = \frac{15 \cdot 1000\,m}{60\,min} = \frac{15000\,m}{60\,min} = 250\frac{m}{min}.$$

Solución del problema 6. La respuesta es (e).
Primero, es claro que Tomás le ganó a Juan. Si n es el número total de corredores, los que llegaron a la meta antes de Tomás son $\frac{n-1}{2}$, después llegaron Tomás, 10 corredores, Juan y luego $\frac{n-1}{4}$ corredores más. Por lo tanto
$$\frac{n-1}{2} + 12 + \frac{n-1}{4} = n,$$

de donde $n = 45$.

Solución del problema 7. La respuesta es (b).
Denotemos por h la altura buscada, entonces, los 6.4 litros de agua están contenidos en el paralelepípedo de dimensiones $20\,cm \times 20\,cm \times h$. Por otro lado, un litro de agua equivale a $(10\,cm)^3 = 1000\,cm^3$, así que,

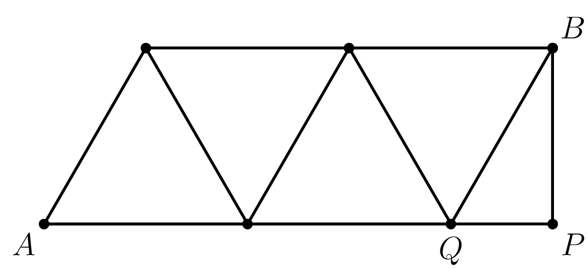
$$\begin{aligned}(20\,cm)^2 h &= 6.4(1000\,cm^3)\\ 400h &= 6400\,cm\\ h &= \frac{6400\,cm}{400} = 16\,cm.\end{aligned}$$

Solución del problema 8. La respuesta es (d).
Tenemos que

$$\sqrt{2^{16}+2^{15}+2^{12}} = \sqrt{2^{12}(2^4+2^3+1)} = \sqrt{2^{12}(16+8+1)} = \sqrt{2^{12}5^2} = 2^6 5 = 320.$$

Solución del problema 9. La respuesta es (d).
Sean P es el pie de la perpendicular desde B hacia la base del paralelogramo y Q el vértice marcado. Por simetría, tenemos que $QP = 5$ y por el teorema de Pitágoras en el triángulo QPB tenemos que $PB^2 = QB^2 - PQ^2 = 10^2 - 5^2 = 75$. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABP tenemos que

$$AB = \sqrt{AP^2 + PB^2} = \sqrt{25^2 + 75} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}\,cm.$$



Solución del problema 10. La respuesta es (b).
La cantidad de monedas que reciben los trece amigos son 1, 2, 4, 8, $\ldots$, 2^{12}. Tenemos que sumar esa cantidad de monedas, es decir, tenemos que encontrar $1+2+2^2+\cdots+2^{12}$, la cual podemos calcular ya que es la suma de los términos

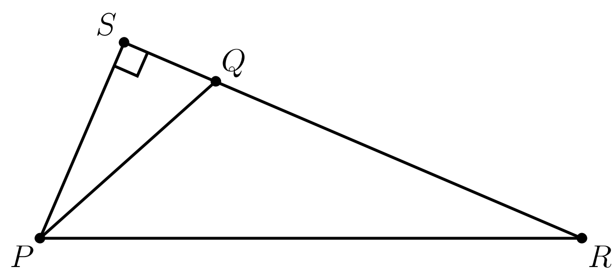
de una progresión geométrica con razón 2. Luego, $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{12} = \frac{2^{13}-1}{2-1} = 8191$. Así que en total quedan $10000 - 8191 = 1809$ monedas.

Solución del problema 11. La respuesta es (a).
Tenemos que

$$32^{33} \cdot 125^{55} = (2^5)^{33}(5^3)^{55} = 2^{165} \cdot 5^{165} = 10^{165}$$

por lo que el número tiene 166 dígitos.

Solución del problema 12. La respuesta es (e).
Por el teorema de Pitágoras en el triángulo PQS tenemos que $PS = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, y en el triángulo PRS tenemos que $SR = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35$, por lo que $QR = SR - SQ = 35 - 5 = 30\,cm$.

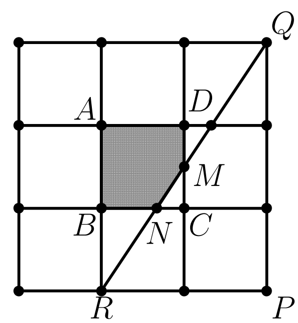


Solución del problema 13. La respuesta es (b).
Notamos que para cualquier entero positivo x, 21^x siempre termina en 1 y 25^x siempre termina en 5. Por otro lado, 23^x termina en 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, etc (mientras x va creciendo), repitiéndose cada cuatro términos. Luego, como 4 divide a 2016, tenemos que 23^{2016} termina en 1 y el número en cuestión termina en $1 + 1 + 5 = 7$.

Solución del problema 14. La respuesta es (d).
La idea es siempre apretar el botón que genera la mayor cantidad de canicas. Con la primer moneda es obvio que se necesita apretar el primer botón para tener 16 canicas. Si con la segunda moneda apretamos el primer botón obtendremos 16 canicas más, mientras que con el segundo botón sólo se obtendrán 8 canicas más. Luego, después de dos monedas se tienen como máximo 32 canicas. Con la tercer moneda da igual cual botón se apriete pues en ambos casos se obtendrán 16 canicas más. Luego, después de tres monedas hay 48 canicas. Con la cuarta moneda y con la quinta es mejor usar el segundo botón, ya que con este se

obtendrían 24 y 36 canicas, respectivamente, mientras que el primer botón sólo genera 16 canicas en ambos casos. Luego, el máximo número de canicas que se pueden comprar con 5 monedas es $48 + 24 + 36 = 108$.

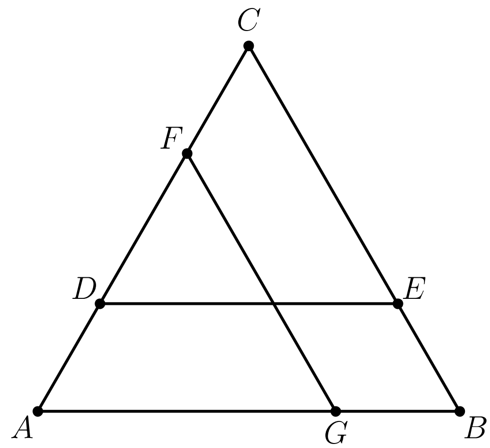
Solución del problema 15. La respuesta es (d).
Tenemos que M es el punto medio del lado DC, por lo que $MC = \frac{1}{2}$. Como los triángulos NCM y RPQ son semejantes y $\frac{RP}{PQ} = \frac{2}{3}$, tenemos que $NC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Luego, el área del triángulo NCM es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ y el área buscada es igual a $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}\, cm^2$.



Solución del problema 16. La respuesta es (c).
Notemos que $\overline{abcabc} = 10^3 \cdot (\overline{abc}) + \overline{abc} = \overline{abc}(10^3 + 1)$. Luego, tenemos que ver el número de divisores primos de $10^3 + 1 = 1001$. Este se factoriza como $7 \cdot 11 \cdot 13$. Luego, el número $\overline{abcabc}$ tiene cuatro divisores primos diferentes: 7, 11, 13 y $\overline{abc}$.

Solución del problema 17. La respuesta es (d).
Cada cara aporta un determinado número de aristas dependiendo qué tipo de polígono es la cara. Por ejemplo, un triángulo aporta tres aristas. Luego el número total de aristas contadas por caras es $31 \cdot 3 + 18 \cdot 4 + 11 \cdot 5 + 7 \cdot 6 = 93 + 72 + 55 + 42 = 262$. Pero notemos que cada arista de la escultura debe pertenecer a exactamente dos caras, por lo que estamos contando doble. Luego, la escultura tiene $\frac{262}{2} = 131$ aristas.

Solución del problema 18. La respuesta es (c).
Los triángulos ABC y DEC son semejantes. Si la razón entre sus lados es r, la razón entre sus áreas es r^2. Para que la razón sea 2, r tiene que valer $\sqrt{2}$. Luego, $DC = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De la misma manera, $AF = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Al sumar los segmentos AF y DC obtenemos justo el lado AC y el segmento DF. Por lo tanto, $DF = 2AF - AC = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1\,m$.

Solución del problema 19. La respuesta es (b).
Denotemos por ABC cualquier número de 3 dígitos. Si $A = 5$ tenemos 9 posibilidades para B y para C (cualquier dígito salvo el 5), así que en total hay $9^2 = 81$ números. Si $B = 5$, tenemos 8 posibilidades para A (cualquier dígito salvo 5 o 0) y 9 para C, por lo que hay $8 \cdot 9 = 72$ números. Análogamente, si $C = 5$ tenemos 72 números. Entonces, el total es $81 + 2 \cdot 72 = 225$ números.

Solución del problema 20. La respuesta es (e).
Es fácil ver que aparece un 1 en las posiciones 1, $1+2$, $1+2+3$, etc. Por lo que para contar el número de unos, necesitamos encontrar el mayor entero n tal que

$$1 + 2 + \cdots + n \leq 100.$$

Usando que esta suma es $\frac{n(n+1)}{2}$ o intentando con varios valores de n, encontramos que dicha n es 13. Por lo que hay 13 unos en los primeros 100 términos de la sucesión y $100 - 13 = 87$ números 3. Por lo tanto, la suma buscada es $13(1) + 87(3) = 274$.