ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA 15a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Primer día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

1. Encontrar el menor entero positivo tal que la suma de sus cifras es 2001 y el producto de sus cifras es 2^{751}.

2. ¿Cuántas listas de 7 números de dos cifras son tales que cada tres términos consecutivos de la lista tienen suma múltiplo de 3? (*Nota:* En cada lista pueden repetirse números.)

3. En un triángulo ABC, sea D el pie de la altura en A y sea M el punto medio de esa altura. Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por D y que es paralela a AC. La recta BM corta a AC en P y a $\mathcal{L}$ en Q. Sean R y S los pies de las perpendiculares a BC por P y Q, respectivamente. Prueba que la suma de las longitudes de PR y QS es igual a la longitud de la altura AD.

4. En la siguiente cuadrícula se tienen escritos los números del 1 al 45 como indica la figura. Un *movimiento* consiste en elegir dos casillas e intercambiar los números que aparecen en ellas. Describe una forma de lograr con 12 movimientos (o menos) que las 5 sumas de los números que aparecen en cada renglón sean todas iguales.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45

ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA
15a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Segundo día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

5. En un torneo hubo 8 competidores (A, B, C, D, E, F, G y H). Cada uno jugó exactamente contra otros 3. En cada juego se le dio 2 puntos al ganador, 0 al perdedor y, en caso de empate, se le dio un punto a cada competidor. Si A obtuvo 4 puntos, B obtuvo 2, C obtuvo 3, D obtuvo 1, E obtuvo 6, F obtuvo 1 y G obtuvo 4, ¿cuántos puntos obtuvo H?

6. Dos círculos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, con respectivos centros M y N, se intersectan en dos puntos distintos. Sea P uno de esos puntos. La recta MP corta por segunda vez al círculo $\mathcal{D}$ en R y la recta NP corta por segunda vez al círculo $\mathcal{C}$ en S. Prueba que M, S, R y N son concíclicos.

7. Encontrar una pareja de enteros (a, b) que satisfaga $a > 2$ y $2a^2 = b(b+2)$.

8. Un triángulo equilátero ABC de lado 2 tiene gravicentro G. Sean G_1 el reflejado de G a través de la recta AC, G_2 el reflejado de G_1 a través de la recta BC y G_3 el reflejado de G_2 a través de la recta AB. Encuentra la distancia de G_3 a G.