

**Examen Final de la 16a Olimpiada Mexicana de Matemáticas**  
**Primer día**

*Tiempo límite: 4:30 horas.*

*Escribe todos los razonamientos.*

*No puedes usar calculadora.*

*Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.*

*Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.*

**Problema 1.** En una computadora voy a escribir un número de 125 dígitos usando ceros y unos como sigue:

Presiono 1, después 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, y así sucesivamente (es decir, cada vez voy intercalando un cero más entre los unos). Cada vez que el número que se ha escrito hasta ese momento es múltiplo de 3, suena un timbre en la computadora (por ejemplo, sonará después de la sexta tecla y también después de la séptima). Cuando termine de escribir el número ¿cuántas veces habrá sonado el timbre?

**Problema 2.** En una fiesta con  $n$  personas ocurre que cada quien era amigo de exactamente tres personas. ¿Cuáles son los posibles valores de  $n$ ?

**Problema 3.** Los ángulos de un triángulo  $ABC$  están en progresión aritmética ( $\angle B = \angle A + x$  y  $\angle C = \angle B + x$ ).  $D, E$  y  $F$  son, respectivamente, los puntos medios de  $BC, CA$  y  $AB$ . Llamamos  $H$  al pie de la altura desde  $C$  (que cae entre  $B$  y  $F$ ) y  $G$  a la intersección de  $DH$  y  $EF$ . ¿Cuánto vale el ángulo  $HGF$ ?

**Problema 4.** Queremos llenar una cuadrícula de 3 renglones y  $n$  columnas siguiendo tres reglas:

- 1) En el primer renglón se ponen los números del 1 al  $n$  en orden creciente.
- 2) En el segundo renglón también se ponen los números 1, 2, 3, ...,  $n$  empezando en algún cuadrado y continuando hacia la derecha hasta llegar a la columna  $n$  y continuando en la columna 1.
- 3) En el tercer renglón se pone una permutación de los números del 1 al  $n$ .

¿Para que valores de  $n$  se puede llenar la cuadrícula siguiendo las reglas y de manera que la suma de los números en cada columna sea la misma?

**Examen Final de la 16a Olimpiada Mexicana de Matemáticas**  
**Segundo día**

*Tiempo límite: 4:30 horas.*

*Escribe todos los razonamientos.*

*No puedes usar calculadora.*

*Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.*

*Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.*

**Problema 5.** ¿Existe algún  $n$  para el cual  $n!$  sea divisible por  $3^{100}$  pero no por  $3^{101}$ ?

**Problema 6.** Encuentra todos los números primos  $p$  para los cuales  $p^2 + 77$  tiene exactamente 5 divisores.

**Problema 7.** Considera un cuadrilátero cíclico  $ABCD$ . La prolongación de  $DA$  más allá de  $A$  se corta con la prolongación de  $BC$  en un punto  $P$  y las diagonales  $AC$  y  $BD$  se cortan en  $Q$ . Se cumple que  $DQ = DC = CP$ . Demuestre que  $\angle DAC = 60^\circ$ .

**Problema 8.** A cada uno de los vértices de un polígono de  $2n$  lados se le asigna un número entero de manera que los números asignados a vértices adyacentes difieran en 1. Llamamos *loma* a un vértice cuyo número es mayor que los números de sus dos vértices adyacentes. Un *valle* es un vértice con un número menor que los números adyacentes. Demuestra que la suma de los números de las lomas menos la suma de los números de los valles es igual a  $n$ .