Examen Final de la 17a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Primer dia

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

Problema 1. Una sucesión de números $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se construye como sigue: a_0 es un número entero positivo cualquiera menor o igual que 200 y, para $n \geq 1$, $a_n = 5a_{n-1} - 2$ (es decir, cada término de la sucesión se obtiene restándole 2 al resultado de multiplicar el término anterior por 5). Determina (con demostración) cuáles de los siguientes pueden ser términos de la sucesión: 1000, 2003 y 6938.

Problema 2. Sean A y B dos puntos fijos en el plano y sea $\mathcal{L}$ una recta que pasa por A pero no por B. Para P y Q puntos de $\mathcal{L}$ (distintos de A) sean O_P y O_Q los centros de las circunferencias circunscritas a APB y AQB, respectivamente. Muestra que los ángulos $\angle O_P PB$ y $\angle O_Q QB$ son iguales.

Problema 3. Alrededor de una mesa redonda se encuentran sentadas n personas, a quienes se les reparten $2n$ tarjetas (numeradas del 1 al 2n) de manera que una persona tiene las tarjetas (1,2), la persona a su derecha las tarjetas (3,4), a la derecha quedan (5,6), etc.
De manera simultánea, cada persona toma la tarjeta con el número menor (de las dos que tiene) y la pasa a quien esté sentado a su derecha. Este paso se repite una infinidad de veces.
(a) Demuestre que a partir de cierto momento, hay n tarjetas que ya no se mueven.
(b) ¿Cuantos pasos son necesarios para alcanzar el momento mencionado en el inciso a?

Problema 4. ¿Para qué enteros positivos n, se tiene que el mayor entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ es un número primo?

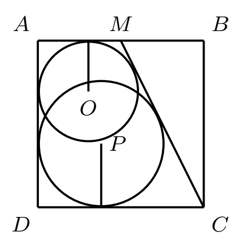
Examen Final de la 17a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Segundo dia

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

Problema 5. Aquiles y la tortuga se encuentran en las esquinas opuestas de un tablero de ajedrez de 5×5. Entre ellos se desarrolla un juego con las siguientes reglas:
(i) Cada uno puede moverse de una casilla a otra casilla adyacente (en diagonal no) y en cada jugada, Aquiles hace 3 movimientos consecutivos y la tortuga dos movimientos. Por ejemplo, la tortuga puede moverse a una casila y regresar, finalizando su jugada donde la empezó.
(ii) Gana aquel que al final de su jugada llegue justo a la casilla que ocupa su adversario.
Si la tortuga hace la primera jugada y ambos juegan inteligentemente, ¿quién puede asegurar la victoria?

Problema 6. Encontrar todas las parejas de enteros positivos (n, p) tales que p es primo y $p^n - 9n = n^p$.

Problema 7. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y M el punto medio de AB. La circunferencia con centro en O y radio r es tangente a AD, a AM y a MC. La circunferencia con centro P y radio R es tangente a AD, DC y MC.



Demuestre que

$$R = 2\left(\frac{r}{r+1}\right)$$

Problema 8. En cierto juego hay varios montones de piedras que pueden modificarse de acuerdo a las siguientes 2 reglas:
(1) Se pueden juntar dos de los montones en uno solo.
(2) Si un montón tiene un número par de piedras, se puede partir en dos montones con el mismo número de piedras cada uno.
Al principio hay tres montones, uno de ellos tiene 5 piedras, otro tiene 49 y el otro tiene 51. Determinar si es posible lograr, con movimientos sucesivos, y siguiendo las reglas (1) y (2), que al final haya 105 montones, cada uno con una piedra.