ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA
19a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Primer día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

1. Dado un subconjunto A de $\{1, 2, \ldots, n\}$, llamamos suma de A a la suma de los elementos de A (por ejemplo, si $A = \{1, 4, 8\}$, entonces la suma de A es 13 y si $A = \{9\}$, entonces su suma es 9. El conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ quiere partirse en 12 subconjuntos (ajenos y no vacíos) con la misma suma. Hallar el menor n para el cual esto es posible.

2. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos círculos con centros en O y O', respectivamente, y tales que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sea $\mathcal{L}$ una recta por P que intersecta a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ en dos puntos B y B', respectivamente. Sea A el circuncentro de $BB'Q$. Probar que A está en el circuncírculo de O, O' y Q.

3. Hay 25 tarjetas numeradas del 1 al 25 sobre la mesa formando una fila de izquierda a derecha (en orden). Se van a revolver como sigue: Se toma primero la carta que está más a la derecha, luego la que está más a la izquierda, y luego la que quedó más a la derecha, y luego a la izquierda y así sucesivamente. Se colocan otra vez en fila de izquierda a derecha. Esto se repite varias veces. (Por ejemplo, al finalizar el primer paso, el orden en que quedan las cartas es $25, 1, 24, 2, 23, 3, \ldots, 14, 12, 13$, y al finalizar el segundo paso, quedan en el orden $13, 25, 12, 1, 14, 24, \ldots$.) Probar que debe llegar un momento en que todas las cartas estén al mismo tiempo exactamente en el orden en que empezaron (el $1, 2, 3, 4, \ldots, 24, 25$) y encontrar el menor número de pasos en que esto ocurre.

4. Ocho cajas numeradas del 1 al 8 están colocadas en una fila en orden de numeración. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 8 esferas de Navidad en las cajas si de cada uno de 4 colores distintos hay dos esferas iguales, en cada caja va una esfera y esferas del mismo color no deben quedar en cajas con numeración consecutiva?

ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA
19a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Segundo día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

5. En un tablero cuadriculado de madera de $n \times n$ un mago toca con su varita mágica uno de los cuadritos y, al tocarlo, desaparece toda la fila y columna del cuadrito; quedan varios tableros rectangulares a los que les aplica el mismo acto mágico, es decir, toca un cuadrito de alguno de los rectángulos y elimina su fila y su columna (sólo en el rectángulo donde está el cuadrito que tocó). El acto de magia se repite varias veces hasta que todos los cuadritos han desaparecido. El mago quiere hacer el procedimiento el mínimo número posible de veces; ¿cuál es este número y cómo debe ir tocando los cuadritos?

6. Sea $a_1, a_2, \ldots$ la sucesión definida por $a_1 = 1$ y, para $n \geq 2$,

$$a_n = (n-1)a_{n-1} + \cdots + ka_k + \cdots + 1a_1 + n.$$

¿Para qué n's es a_n múltiplo de 9?

7. Probar que para $n \geq 12$ es posible dibujar un "panal" con n hexágonos regulares todos del mismo tamaño de manera que cada uno tenga lado común con al menos otros tres hexágonos.

8. Sea $ABCD$ un tetraedro en el que $|AB| = |CD|$, $|AC| = |BD|$ y $|AD| = |BC|$ y sean P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1 y R_2 los puntos medios de AB, CD, AC, BD, AD y BC, respectivamente. Probar que
(a) P_1P_2 es ortogonal a AB.
(b) P_1P_2, Q_1Q_2 y R_1R_2 concurren y son ortogonales entre sí.