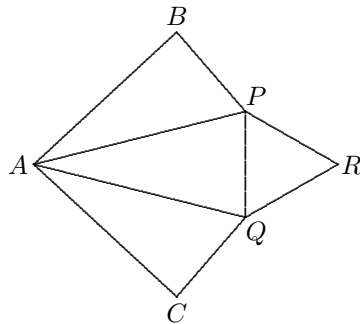


**ETAPA FINAL ESTATAL DE LA 20<sup>a</sup>  
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS**

Primer día

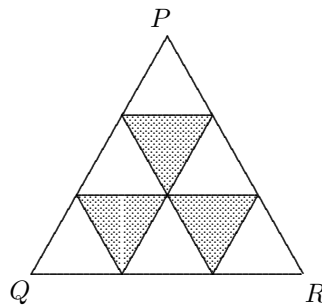
- En la siguiente figura los tres ángulos en  $A$  son iguales; las longitudes  $AP$  y  $AQ$  son iguales;  $PB$  es perpendicular a  $AB$  y también  $AC$  y  $QC$  son perpendiculares;  $PQR$  es equilátero. Determina cómo debe ser el ángulo  $\angle BAC$  para que el punto de intersección de las rectas  $BP$  y  $QC$  sea el centro de  $PQR$ ?



- Encuentra todos los enteros positivos  $x$  que satisfacen la ecuación

$$x^2 = 3^{x-11} + 144.$$

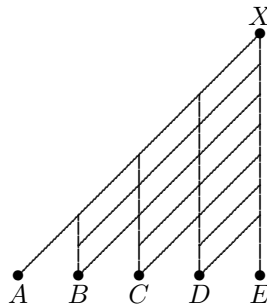
- En el país de Grolandia hay dos estados. En el estado  $A$  hay  $a$  ciudades y en el estado  $B$  hay  $b$  ciudades. Todas las ciudades se van a conectar entre sí, ya sea mediante autopista o mediante carretera de segunda clase (sólo una). Se quiere que al menos haya una ciudad de  $A$  conectada mediante autopista a alguna ciudad de  $B$ . ¿Cuántos diseños distintos pueden hacerse con estas condiciones?
- En los triangulitos en blanco de la figura deben escribirse, sin repetir, los números del 1 al 6, de tal forma que la suma de los números que queden en los 3 triángulos que tienen una base en  $PQ$  sea igual a la de los tres triángulos que tienen una base en  $PR$  y también a la de los 3 triángulos que tienen una base en  $QR$ . ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?



**ETAPA FINAL ESTATAL DE LA 20<sup>a</sup>  
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS**

Segundo día

5. Dado un número entero  $n$  de tres cifras con la cifra de las decenas menor que 7, llamemos  $f(n)$  al número que se obtiene al sumar 3 a la cifra de las decenas, y después escribir las cifras en orden inverso. (Por ejemplo,  $f(618) = 846$ .) Encuentra todos los números  $n$  tales que  $f(n) = 4n$ .
6. Alberto y Rodrigo van a jugar un juego por turnos pintando cuadritos de una cuadrícula de  $n \times n$ . Alberto tiene pintura azul y Rodrigo roja. Al principio todos los cuadros son blancos. Empieza Alberto pintando el cuadro de la esquina superior izquierda y después Rodrigo pinta la esquina inferior derecha. En su turno cada uno debe pintar un cuadro que no haya pintado ya y que comparta una arista con un cuadro de su mismo color. Gana el primero que pinte un cuadro que ya estaba pintado por el otro jugador. Suponiendo que los dos juegan correctamente, ¿cuál de ellos tiene estrategia ganadora y cómo sería esa estrategia?
7. ¿Cuántos caminos diferentes hay para ir desde el punto  $X$  de la figura a cualquiera de los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  o  $E$ , moviéndose siempre sobre las líneas de la figura verticalmente hacia abajo o en diagonal hacia abajo a la izquierda?



8. En la figura,  $ABCD$  es un paralelogramo;  $P$  es un punto sobre la diagonal  $AC$  tal que  $PC = BC$ ;  $H$  es un punto sobre el lado  $CD$  tal que  $PH$  es perpendicular a  $CD$ ;  $Q$  es el punto de intersección de  $AD$  con  $BP$ ;  $M$  es el punto medio del segmento  $PQ$ ;  $T$  es la intersección de  $AM$  con  $CD$ . Prueba que los ángulos  $MQT$  y  $MHT$  son iguales.

