21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL, Primer día

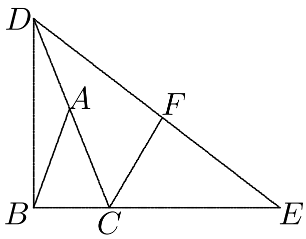
1. En un campamento de verano que va a durar n semanas se quiere dividir el tiempo en 3 periodos de manera que cada periodo empiece un lunes y termine un domingo. El primer periodo se dedicará a labores artísticas, el segundo será para deportes y en el tercero se hará un taller tecnológico. Durante cada periodo se escogerá un lunes para que un experto en el tema del periodo dé una plática. Sea $C(n)$ el número de formas en que puede hacerse el calendario de actividades. (Por ejemplo, si $n = 10$ una forma en que podría hacerse el calendario es poniendo las cuatro primeras semanas para arte y la plática con el artista el primer lunes; las siguientes 5 semanas podrían ser para deportes, con la visita del deportista el cuarto lunes de ese periodo; la semana restante sería para el taller tecnológico y la plática sería el lunes de esa semana.)

(a) Calcular $C(8)$.

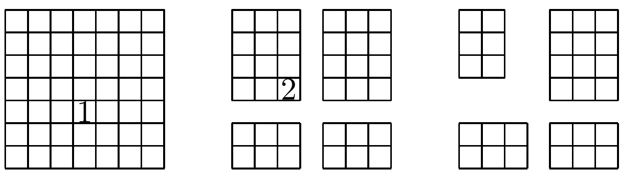
(b) Probar que para cualquier n natural, $C(n)$ es un coeficiente binomial, es decir, encontrar k y r naturales tales que $C(n) = \binom{k}{r}$.

2. Encontrar todos los enteros positivos A menores que 4 millones, tales que $10A$ es un cuadrado y $6A$ es un cubo.

3. En la figura, ABC es un triángulo isósceles con $|AB| = |AC|$; D es un punto sobre AC tal que DB es perpendicular a BC; E es un punto sobre la recta BC tal que $|CE| = 2|BC|$ y F es un punto sobre ED tal que FC es paralela a AB. Probar que la recta FA es paralela a BC.



4. Dos personas A y B van a jugar un juego alternando turnos; A toma el primer turno. Para el juego está dibujada sobre un papel una cuadrícula de 7×7. En cada turno se borran algunos de los cuadritos como sigue: El jugador en turno escoge un cuadrito y borra toda la columna y el renglón a los que pertenece ese cuadrito dentro de la porción rectangular donde está en ese momento el cuadrito. Por ejemplo, si al principio A escoge el cuadrito marcado con 1 en la figura (a) de abajo, a B le queda la figura (b) y, si él escoge el cuadrito marcado con 2, entonces para el siguiente turno a A le queda la figura (c).



(a) (b) (c)

Gana el jugador que en su turno logra que no sobre ningún cuadrito. Determinar cuál de los dos jugadores puede asegurar su triunfo y cómo debe jugar para lograrlo.

21^{a} OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL, Segundo día

5. En un tablero circular hay 19 casillas numeradas en orden del 1 al 19 (a la derecha del 1 está el 2, a la derecha de éste está el 3 y así sucesivamente, hasta el 1 que está a la derecha del 19). En cada casilla hay una ficha. Cada minuto cada ficha se mueve a su derecha el número de la casilla en que se encuentra en ese momento más una; por ejemplo la ficha que está en el lugar 7 se va el primer minuto $7 + 1$ lugares a su derecha hasta la casilla 15; el segundo minuto esa misma ficha se mueve a su derecha $15 + 1$ lugares, hasta la casilla 12, etc. Determinar si en algún momento todas las fichas llegan al lugar donde empezaron y, si es así, decir cuántos minutos deben transcurrir.

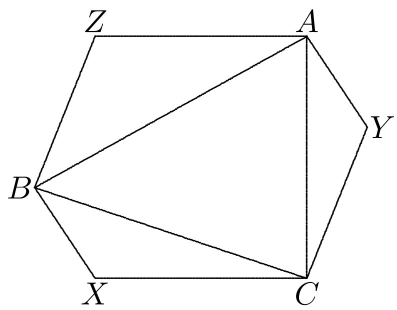
6. Dado un natural n, sea $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Digamos que n es *partible* si existen dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = [n]$, $A \cap B = \emptyset$ y las sumas de parejas de elementos de A son todas distintas entre sí y lo mismo ocurre con B. Por ejemplo, 5 es partible pues al tomar $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 4\}$, las sumas de las parejas de A son $2+3 = 5$, $2+5 = 7$ y $3+5 = 8$ (y los resultados 5, 7 y 8 son distintos) y lo mismo ocurre en B, pues sólo hay una suma (con resultado 5). Probar que 10 es partible pero que 15 no lo es.

7. En el hexágono $AYCXBZ$ los lados AZ y CX son perpendiculares a la diagonal AC; los lados AY y BX son perpendiculares a la diagonal AB, y los lados BZ y CY son perpendiculares a la diagonal BC.

(a) Probar que AX, CZ y BY concurren.

(b) Probar que si el área del triángulo ABC es 1, entonces

$$BC(CY + BZ) + AB(AY + BX) + AC(CX + AZ) = 8.$$



8. En una cuadrícula se encuentra un punto P y, abajo de él, a una distancia de 6 cuadros, hay una recta horizontal $\mathcal{L}$. ¿Cuántos caminos hay de P a cualquier punto de $\mathcal{L}$ si los caminos deben ir sobre las líneas de la cuadrícula, no deben pasar dos veces por un mismo punto ni ir hacia arriba, y deben avanzar en línea recta a lo más una distancia de dos cuadros. (En la figura aquí abajo se muestra un camino con las condiciones pedidas.)