

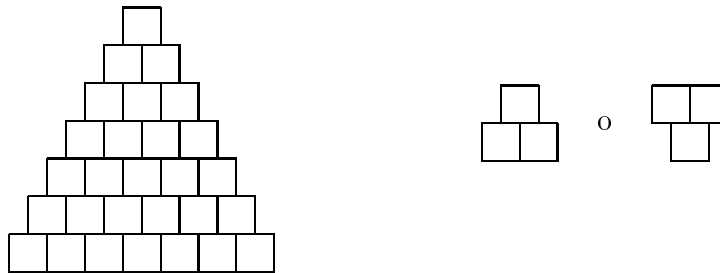
23ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

FINAL ESTATAL 2009, Primer día

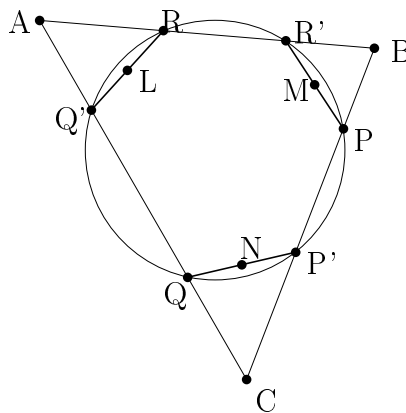
1. En un tablero cuadrulado de 6×10 se juega un juego entre dos personas que alternan turnos. El jugador que inicia el juego pone una ficha en cualquiera de los cuadros; a partir del segundo turno debe ponerse cada vez una ficha en algún cuadro vacío que esté en el mismo renglón o la misma columna que la ficha que se puso en el turno anterior. Pierde el primer jugador que no puede jugar (es decir, que encuentra llenos todos los cuadros que están en el renglón y la columna de la ficha que se puso en el tablero en el turno anterior). Determinar cuál de los jugadores puede asegurar su triunfo y cómo debe jugar para lograrlo.

2. ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos escogidos dentro de $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ son tales que la suma de sus tres elementos no es múltiplo de 4?

3. En el tablero dibujado abajo a la izquierda quieren ponerse los números del 1 al 28 (uno en cada cuadrado) de manera que los tres números que tape cualquier ficha con la forma que se muestra a la derecha (en sus dos posiciones posibles) tengan suma múltiplo de 3? (Nota: La ficha puede girarse como se indica, pero al colocarse sobre el tablero debe quedar exactamente tapando tres cuadrillos.) ¿De cuántas maneras distintas es posible poner los números?



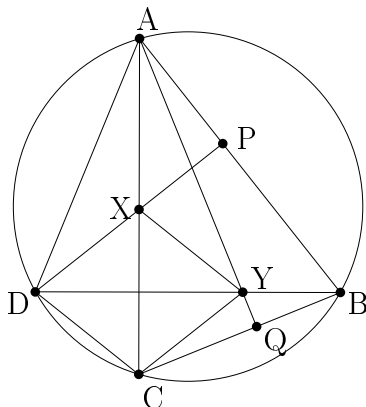
4. En la figura, ABC es un triángulo y un círculo corta a los lados en los puntos P , P' , Q , Q' , R y R' . Se tiene además que $|P'Q| = |Q'R| = |R'P|$, y que L , M y N son los puntos medios de los segmentos $Q'R$, $R'P$ y $P'Q$, respectivamente. Probar que las rectas AL , BM y CN son concurrentes.



23^a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL 2009, Segundo día

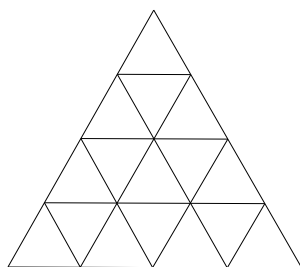
5. Encontrar todos los naturales n menores que 100 tales que los siguientes números son todos primos: $n + 2$, $n + 4$, $n + 8$ y $n + 16$.

6. En la figura, $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales se cortan en ángulo recto; P y Q son los respectivos pies de las perpendiculares desde D a AB y desde A a BC ; X es el punto de intersección de DP con AC , y Y es el punto de intersección de AQ con DB . Demostrar que el cuadrilátero $DXYC$ es un rombo (es decir, es un paralelogramo con todos los lados de la misma longitud).



7. En la siguiente figura hay una ficha en cada uno de los 16 triangulitos. Cada ficha debe moverse a un triangulito adyacente (es decir, a un triangulito que comparta un lado con el triangulito en el cual está la ficha originalmente) exactamente una vez.

- (a) ¿Cuál es el máximo número de triangulitos que pueden quedar vacíos?
 (b) ¿Cuál es el mínimo número de triangulitos que pueden quedar vacíos?



8. Cinco hermanas van al teatro; cada una de ellas tiene un boleto numerado. Ana, la hermana menor, llega más tarde y encuentra a sus hermanas ya sentadas, habiendo escogido al azar sus asientos dentro de los cinco que su grupo tenía asignados. Al llegar, Ana insiste en sentarse en el asiento que le corresponde. Si lo encuentra ocupado, la hermana que se encuentra en su asiento también insiste en sentarse en su asiento asignado y así sucesivamente. ¿En cuántas de las 120 posibles distribuciones de los 5 asientos Rocío, la hermana mayor, tendrá que moverse?