

## 24ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

### FINAL ESTATAL 2010, Primer día

1. Encontrar el mayor número que no tenga cifras repetidas y que sea múltiplo de 99.

2. En una competencia de basquetbol entre 7 equipos todos jugaron el mismo número de juegos. Se sabe que no hubo empates, que dos de los equipos ganaron todos los juegos que jugaron y que otro de los equipos sólo perdió uno. Probar que forzosamente hay algún equipo que perdió todos los juegos que jugó.

3. Con piezas de madera de la forma indicada abajo se construyó un rectángulo de lados  $a, b$ . Determinar cuáles de los siguientes valores para  $(a, b)$  son posibles y cuáles no. (Nota: Las piezas se pueden voltear o girar a conveniencia; son  $L$ 's construidas pegando tres cuadraditos de  $1 \times 1$ .)

$$(a, b) = (3, 41), (35, 16), (28, 3), (35, 12), (33, 43), (9, 60).$$



4. En un triángulo  $ABC$ , los puntos  $P, Q$  y  $R$  están sobre los lados  $BC, AB$  y  $CA$ , respectivamente, de manera que  $PQ$  es paralela a  $AC$  y  $PR$  es paralela a  $AB$ ; los puntos  $K, S$  y  $T$  son las respectivas intersecciones de  $AP$  con  $QR$ , de  $CK$  con  $AB$  y de  $BK$  con  $AC$ . Probar que si  $ST$  es paralela a  $BC$  entonces  $QR$  también es paralela a  $BC$ .

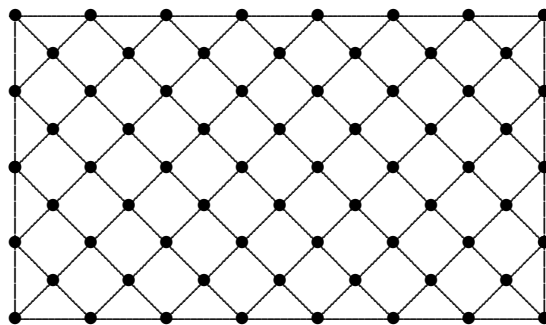
**24ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS**  
**FINAL ESTATAL 2010, Segundo día**

5. Sea  $ABCD$  un cuadrilátero tal que  $BC \parallel AD$ ,  $|AB| = |CD|$  y  $|BC| \leq |AD|$ . Un punto  $P$  sobre el segmento  $BC$  es tal que  $\angle BAP = \angle PAD$ . Probar que  $|BP| \leq |PD|$ .

6. ¿De cuántas maneras puede partirse el conjunto  $\{1, 2, \dots, 9\}$  en tres conjuntos si cada uno de esos conjuntos debe tener 3 elementos y la suma de los elementos en cada conjunto no debe ser múltiplo de 3? (*Nota:* No importa el orden de los elementos dentro de cada conjunto ni tampoco el orden de los conjuntos; por ejemplo, las dos siguientes distribuciones se consideran una misma:

$$\{\{4, 1, 2\}, \{3, 7, 6\}, \{5, 8, 9\}\} \quad \text{y} \quad \{\{3, 6, 7\}, \{9, 8, 5\}, \{1, 4, 2\}\}.)$$

7. El dibujo muestra un rectángulo de  $4 \times 7$  en el que el número de segmentos que unen puntos indicados por  $\bullet$  es 134. Determinar todas las posibles dimensiones de rectángulos que se pueden formar con el mismo patrón de construcción y que tengan también 134 segmentos.



8. ¿De cuántas maneras diferentes es posible escribir 16 como suma de enteros positivos impares? (*Nota:* El orden de los sumandos es importante; así, por ejemplo,  $7 + 3 + 3 + 3$  y  $3 + 7 + 3 + 3$  se consideran distintas.)