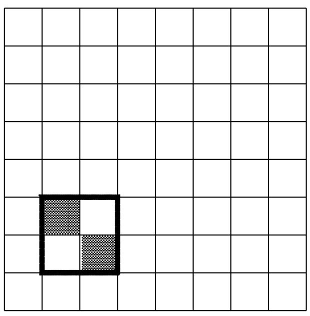
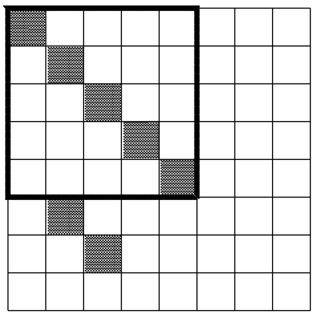
# 26ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
# FINAL ESTATAL 2012, Primer día

*Tiempo límite: 4:30 horas.*
*Escribe todos los razonamientos.*
*No puedes usar calculadora.*
*Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.*
*Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.*

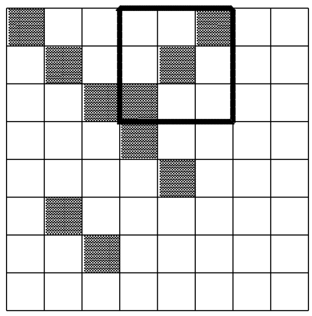
1. Dos jugadores $A$ y $B$ juegan alternadamente en una cuadrícula de $n \times n$. Una tirada consiste en escoger un entero $2 \leq m \leq n$ y una subcuadrícula de $m \times m$ contenida en la cuadrícula inicial, y pintar todos los cuadritos de $1 \times 1$ que están en una de las dos diagonales de dicha subcuadrícula. Además se tiene la restricción de que no se puede escoger una subcuadrícula que contenga cuadritos pintados previamente (ver el ejemplo que se ilustra abajo en la figura). Pierde el jugador que ya no puede borrar cuadritos. Si $B$ es el segundo en tirar, ¿quién de $A$ o $B$ puede asegurar que ganará si juega apropiadamente y ¿cómo debe hacer para asegurar su triunfo?



jugada de $A$, $m = 2$



jugada de $B$, $m = 5$



jugada de $A$, $m = 3$

2. ¿Existe un triángulo $ABC$ y un punto $P$ en su interior que cumplan que toda recta que pasa por $P$ divide a $ABC$ en dos figuras de igual área?

3. Se tienen 11 tarjetas numeradas del 1 al 11. Determinar todas las formas de distribuir las tarjetas en 3 montones de tal manera que la suma de las tarjetas de cada montón sea 22 y que en ninguno de los montones haya dos tarjetas una de las cuales tenga un número primo y la otra esté numerada con un número múltiplo de ese primo (por ejemplo, la tarjeta que lleva el 10 no puede estar en el mismo montón que la que lleva el 5).

4. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1$$

con $a$ y $b$ enteros positivos y $p$ número primo.

**$26^{\text{a}}$ OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS**
**FINAL ESTATAL 2012, Segundo día**

*Tiempo límite: 4:30 horas.*
*Escribe todos los razonamientos.*
*No puedes usar calculadora.*
*Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.*
*Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.*

5. Mostrar que el siguiente tablero de $5 \times 5$ no se puede completar con los números del 1 al 25 (usando exactamente una vez cada uno) de modo que en cada columna y en cada renglón la suma sea la misma.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | | 17 | | 3 |
| | | | | |
| 5 | | 9 | | 13 |
| | | | | |
| 15 | | 1 | | 11 |

6. Encontrar todas las parejas de enteros positivos $a \leq b$ que satisfagan la siguiente ecuación:

$$a!b! = a^2b^2.$$

7. Sea $ABC$ un triángulo equilátero y sea $D$ cualquier punto en la prolongación del lado $BC$ (con $C$ entre $B$ y $D$). Sea $P$ la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAD$ con $BC$. Sea $X$ la intersección del circuncírculo del triángulo $APC$ con $AD$. Probar que $AX = AC$.

8. Sea $\mathcal{P}$ un polígono regular de 20 lados. Determinar cuántos triángulos $\mathcal{T}$ con vértices en los vértices de $\mathcal{P}$ cumplen que ningún lado de $\mathcal{T}$ es también lado de $\mathcal{P}$.