Etapa Final Estatal de la
28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014
Primer día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

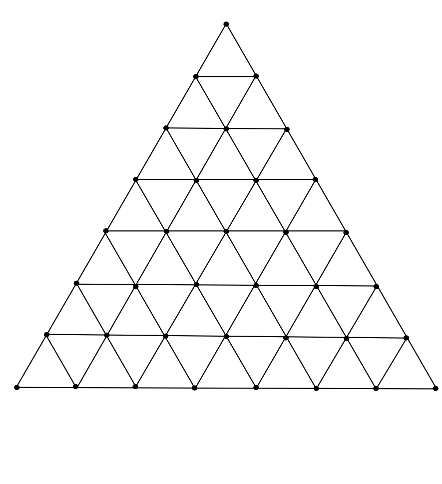
1. El entero positivo n y el primo p cumplen que p no divide a $(3n)!$ pero sí divide a

$$(3n+1)! + (3n+2)!.$$

Mostrar que 3 divide a $p-1$.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D, E y F los respectivos pies de las alturas en A, B y C. Sean D', E', F', puntos sobre los segmentos BC, CA y AB (respectivamente) tales que $|BD| = |D'C|$, $|CE| = |E'A|$ y $|AF| = |F'B|$. Probar que son concurrentes las perpendiculares a BC en D', a CA en E' y a AB en F'.

3. Un triángulo equilátero de lado 7 se divide en triángulos equiláteros de lado 1 (ver la figura). Se pintan todos los vértices de los triángulos usando los colores rojo, verde y azul de manera que cada triangulito de lado 1 tiene un vértice de cada color. Probar que si se eligen segmentos (de lado 1) de manera que cada vértice pertenece a exactamente un segmento, entonces el número de segmentos elegidos que van de un vértice rojo a uno azul es el mismo que el múmero de segmentos que van de un vértice rojo a uno verde.



Etapa Final Estatal de la
28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014
Segundo día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

4. Probar que si a, b, c y d son números reales positivos, entonces

$$4a^2 + 2b^4 + c^8 + d^8 \geq 8abcd.$$

5. Los vértices de un polígono regular de 160 lados están numerados en el sentido de las manecillas del reloj del 1 al 160. En un juego, Manuel debe escoger un vértice y ponerle una marca. Después seguirá marcando algunos vértices de acuerdo a la siguiente regla: Cada vez que marque un vértice con número par, girará en el sentido de las manecillas del reloj el mismo número de vértices que indique el vértice que acaba de marcar. Por ejemplo, si escoge el vértice 42, marcará éste, luego el 84, luego el 8, etc.). En caso de que en algún momento marque un vértice con número impar, entonces hará lo mismo que con el par, pero en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Irá marcando vértices hasta que llegue a un vértice ya marcado y ahí termina su juego. ¿Cuál es el máximo número de vértices que puede marcar?

6. Un cuadrilátero cíclico $ABCD$ es tal que las cuerdas AD y BC son paralelas, $|AD| < |BC|$ y el centro del circuncírculo de $ABCD$ queda en el exterior del cuadrilátero. Sean E la intersección de las rectas AB y CD, F el pie de la altura de EBO en E y G la intersección de EF con BC. Demostrar que $AGOCE$ es cíclico.