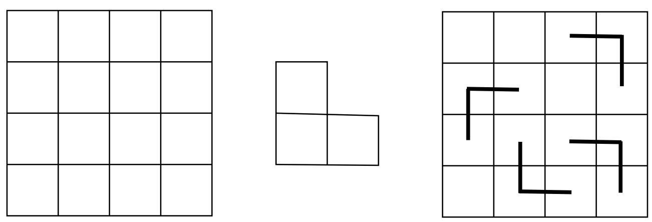
Etapa Final Estatal de la
29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015
Primer día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

1. En un tablero de 4×4 como el que se muestra abajo a la izquierda se van a colocar fichas como la que se muestra a su lado, en cualquier posición, de manera que cada ficha tape exactamente 3 de los cuadritos de la cuadrícula. Llamamos *nivel* a cualquier colocación de las fichas en la que ya no quepa ninguna ficha más, como la colocación que se muestra abajo a la derecha. ¿Cuál es el menor número de niveles necesarios para que cada cuadrito del tablero tenga encima de él exactamente 60 fichas?



2. Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Sobre el lado AE se construye el triángulo equilátero AFE, hacia afuera del pentágono. Sea P un punto en el segmento BF (en el interior del pentágono) de tal forma que $\angle AEP = 12^o$. Calcular el valor de $\angle CAP$.

3. Digamos que un número entero n es *partible* si se puede poner como la suma de n enteros y también como el producto de esos mismos n enteros. Por ejemplo, el número 12 es partible pues

$$\begin{aligned} 12 &= 6 \times (-2) \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times (-1) \\ &= 6 + (-2) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + (-1). \end{aligned}$$

Demostrar que el número 2015 no es partible, es decir, que no existen enteros $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ tales que las dos expresiones siguientes den como resultado 2015:

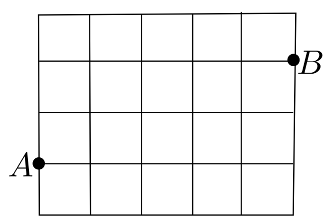
$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{2015}$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015}.$$

Etapa Final Estatal de la
29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015
Segundo día

Tiempo límite: 4:30 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de los problemas.

4. Sea ABC un triángulo equilátero. Llamemos *cuerda* a cualquier segmento que tenga extremos en dos de los lados de ABC y que sea paralelo al otro lado. Encontrar el menor n tal que si se dibujan n cuerdas paralelas a cada lado del triángulo, entonces el número de puntos de intersección de las cuerdas sea exactamente 180.

5. En la cuadrícula de abajo, cada cuadrito es de 1×1. ¿Cuántos caminos de longitud 9 hay de A a B que usen las líneas de la figura pero que no pasen dos veces por un mismo punto?



6. Una hoja de papel rectangular $ABCD$ se dobla de manera que el vértice B queda ubicado en el punto B' sobre el lado AD, como se muestra en la figura (y C queda en C'). Sean E y F los extremos del segmento determinado por el doblez, con E sobre AB y F sobre CD. Sea G el punto de intersección de $B'C'$ y CD. Sea H el pie de la perpendicular desde G hasta FE. Sea I el punto donde la bisectriz del ángulo $\angle AEB'$ intersecta a AD. Demostrar que

$$\frac{GH}{CF} = \frac{EB}{EI}.$$