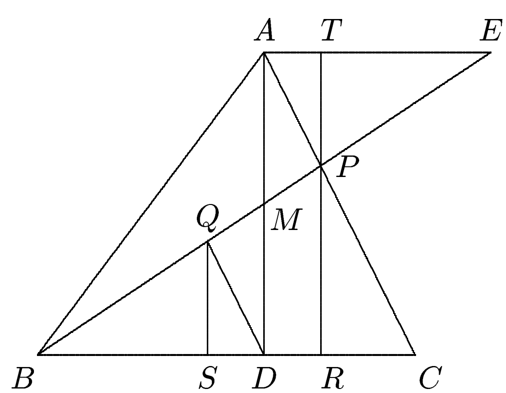
RESPUESTAS PARA EL EXAMEN DE LA
ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA
15a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. Como queremos que el producto de las cifras sea una potencia de 2, las únicas posibilidades para las cifras son 1, 2, 4 y 8. Buscamos el menor número N que cumpla las propiedades así que N debe tener la menor cantidad de cifras posible y esto se logra claramente usando tantos 8 como sea posible. Sea a el número de 1's de N, b el número de 2's, c el número de 4's y d el número de 8's. Podemos expresar que la suma de las cifras de N es 2001 en la siguiente ecuación: $a+2b+4c+8d = 2001$ $(*)$. La condición de que el producto de las cifras sea 251 se expresa con la ecuación: $b+2c+3d = 751$ $(**)$ (pues $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$). Por $(*)$ tenemos que $d \leq 250$. Si $d = 250$ entonces, por $(**)$, $b+2c = 1$, de donde $b = 1$ y $c = 0$, contradiciendo $(*)$. Entonces $d < 250$. Para $d = 249$, en $(**)$ tenemos $b+2c = 4$; otra vez, queremos que c sea lo mayor posible, así que $c = 2$ y $b = 0$. Entonces, sustituyendo estos valores en $(*)$ obtenemos $a = 1$. Así
$$N = 144\underbrace{88\cdots8}_{249}.$$

2. Observemos primero que los números de 2 cifras son 90. Los primeros dos términos los podemos escoger arbitrariamente, es decir, hay 90^2 posibilidades. A partir del tercer término, la elección queda determinada por el residuo módulo 3 del producto de los términos elegidos anteriormente, es decir, en cada caso hay $\frac{90}{3}$ posibilidades. Entonces la respuesta es $90^2 30^5$.

3. Sea E el punto de intersección de BM con la paralela a BC por A. Sea T el punto de interseción de PR con AE. Entonces es claro que PT es la altura en P del triángulo PAE. Ahora observemos que los triángulos MAE y MDB son congruentes, pues tienen sus lados paralelos y $AM = MD$. De aquí tenemos que $BD = AE$. Por otro lado, los triángulos QBD y PEA también tienen sus lados paralelos, así que también son semejantes, pero como $BD = AE$, entonces son congruentes. Sabemos que dos triángulos iguales tienen la misma altura, así que $QS = PT$. Así, $AD = TR = TP + PR = QS + PR$, como queríamos.



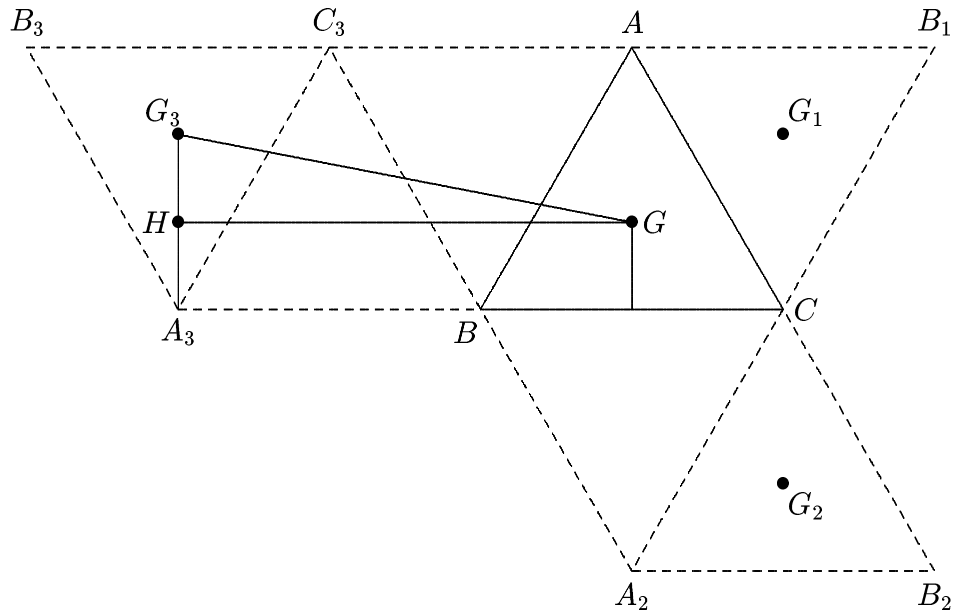
4. Llamemos Σ a la suma que queremos obtener en cada renglón (como la suma de todos los números de la cuadrícula es $\frac{45\times 46}{2}$, entonces $\Sigma = \frac{45\times 46}{2\times 5}$). Para ver cuál es la diferencia de la suma de los otros renglones con Σ (sin hacer las cuentas), observemos que los números se van incrementando en 9 hacia abajo (por ejemplo, $10 = 1 + 9$, $35 = 26 + 9$, etc.) Tenemos entonces que las sumas iniciales de los renglones son como sigue: la del primer renglón es $\Sigma - 18 \cdot 9$, la del segundo es $\Sigma - 9 \cdot 9$, la del tercero es Σ, la del cuarto es $\Sigma + 9 \cdot 9$ y la del quinto es $\Sigma + 18 \cdot 9$. Hechas estas observaciones, vemos que una posibilidad conveniente es intercambiar números en casillas de la misma columna (pues intercambios de este estilo agregan o quitan nueves). Entonces intercambiemos el 1 con el 37, el 2 con el 38, el 3 con el 39 y el 4 con el 40; en cada intercambio modificamos el primero y el quinto renglón por 4 nueves, así que en total se han modificado 16 nueves (de los 18 necesarios para estos renglones). Análogamente intercambiemos 10 y 28, 11 y 29, 12 y 30, y 13 y 31; de esta manera, el segundo y cuarto renglones se habrán ajustado cada uno con 8 nueves. Para las modificaciones finales usemos el tercer renglón: intercambiemos 5 y 23 (aquí el primer renglón ya queda bien, pero el tercero se desajustó y perdió 2 nueves), 15 y 24 (el segundo ya queda bien y el tercero pierde otro nueve), 25 y 34 (el cuarto queda bien y el tercero gana un nueve), y 26 y 44 (tercero y quinto renglones ya quedan bien).

5. En total se jugaron $\frac{8\times 3}{2} = 12$ partidos. Cada partido otorgó un total de 2 puntos (según el resultado del partido se reparten 2 puntos entre los dos competidores). De esta manera, el total de puntos obtenidos debe ser 24. Como la suma de los puntos de A, B, C, D, E, F y G es $4 + 2 + 3 + 1 + 6 + 1 + 4 = 21$, entonces H ganó $24 - 21 = 3$ puntos.

6. El triángulo SMP es isósceles (pues MS y MP son radios de $\mathcal{C}$) y, por lo tanto, $\angle MSP = \angle MPS$. Análogamente, $\angle NPR = \angle NRP$. Pero los dos ángulos en P son iguales por ser opuestos por el vértice, así que $\angle MSN = \angle MRN$ y esta condición es suficiente para que el cuadrilátero $MNRS$ sea cíclico.

7. Como b y $b+2$ tienen la misma paridad y su producto es par, entonces ambos son pares. Escribamos $b = 2b_1$. Entonces $a^2 = 2b_1(b_1 + 1)$, así que a también es par: $a = 2a_1$. De aquí tenemos que $2a_1^2 = b_1(b_1 + 1)$, es decir, el coeficiente binomial (o número triangular) $\frac{b_1(b_1+1)}{2}$ es un cuadrado. Analizando las posibilidades vemos que para $b_1 = 8$, $\frac{b_1(b_1+1)}{2} = 6^2$. En este caso, $b = 16$ y $a = 12$.

8. Para observar fácilmente dónde está G_3 en relación al triángulo ABC, reflejemos este triángulo varias veces (como poniendo espejos sobre los lados de ABC).



Tracemos H tal que $HG||BC$ y $\angle G_3HG = 90^\circ$. Observemos que $HG = 3$ y que además G_3H es $\frac{1}{3}$ de la altura de ABC puesto que $AG = A_3G_3$ y esta longitud es igual a $\frac{2}{3}$ de dicha altura porque sabemos que el gravicentro de un triángulo divide a cada mediana en razón 1:2, y porque en un triángulo equilátero las medianas coinciden con las alturas. Ahora, por Pitágoras la altura mide $\sqrt{3}$ y así $G_3H = \frac{\sqrt{3}}{3}$; nuevamente, por Pitágoras, $G_3G = \sqrt{\frac{1}{3} + 9} = \sqrt{\frac{28}{3}}$.