**Soluciones del Examen Final de la 16a Olimpiada Mexicana de Matemáticas**

**Solución 1.** Sabemos que los múltiplos de 3 son los números cuya suma de cifras también es múltiplo de 3. Veamos cuántos 1's se escriben antes de completar el número. Los 1's aparecen en los lugares 1, 1+2, 1+2+3, etc., así que debemos encontrar la máxima $n$ tal que $1+2+\cdots+n \leq 125$, o sea, $n(n+1) \leq 250$. De esta manera, $n = 15$. Como $\frac{15\times16}{2} = 120$, despúes de escribir el último 1, se escribirán 5 ceros más. Los múltiplos de 3 aparecen cuando el número de 1's escritos es 3, 6, 9, 12 o 15. Cada número con esta cantidad de 1's y algunos 0's a continuación (tal vez ninguno) es también múltiplo de 3. El número de 0's después de tres 1's es 3, después de seis 1's es 6, etc. pero despúes de 15 sólo puede haber cinco 0's (pues se completan los 125 dígitos), entonces el número total de veces que sonará el timbre es $4+7+10+13+6 = 40$.

**Solución 2.** Como cada persona es amiga de otras 3, en la fiesta hay al menos 4 personas.
Digamos que al principio de la fiesta cada pareja de amigos se saludó. Es claro que el número de personas multiplicado por 3 es igual al doble del número de saludos, o sea, si $s$ es el número de saludos, $3n = 2s$. Esta relación implica que $n$ no puede ser impar.
A continuación se muestran los acomodos para $n = 4$ y $n = 6$.

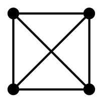


Fig. 1

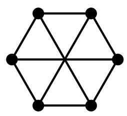
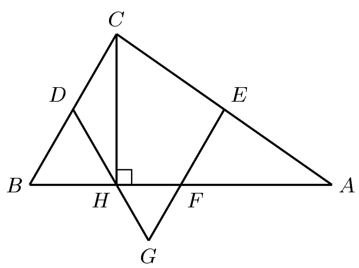


Fig. 2

Si $n$ es un par de la forma $4k$ podría haber $k$ grupos como el que se muestra en la Fig. 1.
Si $n = 4k+2$ podría haber 1 grupo como el de la Fig. 2 y $k-1$ grupos como el de la Fig. 1. Así que $n$ puede ser cualquier par mayor o igual a 4.

**Solución 3.**




Comencemos por observar que $180^o = \angle A + \angle B + \angle C = 3\angle A + 3x$ de donde $\angle B = \angle A + x = 60^o$. De lo anterior $BCH$ es un medio triangúlo equilátero y como $D$ es el punto medio de $BC$, $BDH$ es un triángulo equilátero. $\angle HFG = \angle HBD = 60^o$ pues $EF||BC$. $\angle GHF = \angle BHD = 60^p$. Por lo tanto $\angle HFG = 60^o$

**Solución 4.** Si $n$ fuera par, considerando los residuos módulo 2 los primeros dos renglones de la tabla serían de alguna de estas formas:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | ... | 1 | 0 |
| 1 | 0 | ... | 1 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | ... | 1 | 0 |
| 0 | 1 | ... | 0 | 1 |

En cualquiera de los dos casos es claro que al llenar el tercer renglón la mitad de las columnas tendría una suma par y la otra mitad tendría suma impar así que no se cumple la regla 3.

Si $n$ es impar en algún lugar del segundo renglón debe haber dos 1's consecutivos (si no, estamos en la situación anterior). Digamos que esos 1's están en las columnas $k$ y $k+1$. Antes de llenar el tercer renglón las sumas de las primeras $k$ columnas son todas de la misma paridad y las sumas de las siguientes columnas son todas de la paridad opuesta. Como en el tercer renglón queremos acomodar $\frac{n-1}{2}$ pares y $\frac{n+1}{2}$ impares, $k$ debe tomar alguno de estos dos valores. Eligiendo uno de estos valores hay una única manera de completar la tabla. Por ejemplo, para el primero de estos valores el siguiente acomodo funciona:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ... | $\frac{n-1}{2}$ | $\frac{n+1}{2}$ | ... | $n-1$ | $n$ |
| $\frac{n+3}{2}$ | $\frac{n+5}{2}$ | $\frac{n+7}{2}$ | ... | $n$ | 1 | ... | $\frac{n-1}{2}$ | $\frac{n+1}{2}$ |
| $n-1$ | $n-3$ | $n-5$ | ... | 2 | $n$ | ... | 3 | 1 |

**Solución 5.** En la factorización en primos de $n!$ el exponente de 3 es la suma de los exponentes de 3 en los números del 1 al $n$. Los únicos números que aportan algo a esta suma son los múltiplos de 3. Del 1 al 9 hay 3 múltiplos de 3 pero 9 aporta 2 3's, asi que hay 4 3's en 9!. Del 1 al 27 hay tres intervalos de 9 y 27 aporta un 3 más, así que hay $3 \times 4 + 1 = 13$ 3's en 27!. En 81! hay $3 \times 13 + 1 = 40$ 3's. En 162! hay $2 \times 40 = 80$ 3's (pues $162 = 81 \times 2$). En 189! hay $80 + 13 = 93$ 3's ($189 = 162 + 27$). En 204! hay $93 + 4 + 1 + 1 = 99$ 3's ($204 = 189 + 9 + 3 + 3$) pero en 207! ya hay 101 3's pues 207 es múltiplo de 9 y aporta 2 3's. Por lo tanto, no existe $n$ que cumpla la condición pedida.

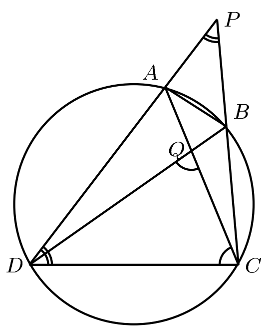
**Solución 6.** Si $p = 2$, $p^2 + 77 = 81$ que tiene 5 divisores (1, 3, 9, 27 y 81). Si $p = 3$, $p^2 + 77 = 86$ que tiene sólo cuatro divisores. Para los demás primos, $p^2 + 77$ es múltiplo de 6, en efecto, es par y es congruente con 0 módulo 3. Esto implica que $p^2 + 77 = 6k$ y tiene como divisores al menos a $1, 2, 3, 6, k, 2k, 3k, 6k$, que son todos distintos pues $k > 12$. Luego, la única solución es $p = 2$.

**Solución alternativa:** Como 5 es primo $p^2 + 77$ no puede tener dos primos distintos en su factorización; de hecho $p^2 + 77 = q^4$ para algún primo $q$. De lo anterior tenemos

$$77 = q^4 - p^2 = (q^2 + p)(q^2 - p)$$

Como 77 es impar, cada factor de la derecha es impar y $p$ y $q$ son de distinta paridad, así que alguno de ellos es 2. Además, $q^2 + p$ es positivo, de donde $q^2 - p$ también lo es. Si $q = 2$, la única manera de que $q^2 - p$ sea positivo e impar es que $p = 3$, pero $q^4 - p^2 = 7$ y no 77. Si $p = 2$ entonces $q = \sqrt[4]{77 - 2^2} = 3$ y esta es la única solución

**Solución 7.**




La condición $DQ = DC = CP$ implica $\angle DQC = \angle QCD$ y $\angle PDC = \angle CPD$. Sean $\alpha = \angle QCD$ y $\beta = \angle PDC$. Entonces $\angle DAC + \alpha + \beta = 180^{\mathrm{o}}$ y el problema se reduce a probar que $\alpha + \beta = 120^{\mathrm{o}}$.

Llamemos $\gamma$ a $\angle PDQ = \angle QCB$. $180^{\mathrm{o}} = \angle PDC + \angle DCP + \angle CPD = \beta + (\alpha + \gamma) + \beta = \alpha + 2\beta + \gamma$. Por otro lado, $180^{\mathrm{o}} = \angle QDC + \angle DCQ + \angle CQD = (\beta - \gamma) + \alpha + \alpha = 2\alpha + \beta - \gamma$. Sumando estas dos igualdades se tiene $360^{\mathrm{o}} = 3\alpha + 3\beta$, de donde $\alpha + \beta = 120^{\mathrm{o}}$.

**Solución 8.** Recorremos el polígono en el sentido de las manecillas del reloj asignando 1 (o $-1$) a cada lado si el vértice final es mayor (o menor) que el vértice inicial. Es claro que durante el recorrido las lomas y los valles van apareciendo alternadamente. La diferencia entre una loma y el valle que le sigue es la cantidad de $-1$'s que hay entre los dos. Calcular la diferencia de la suma de las lomas menos la suma de los valles es lo mismo que sumar las diferencias entre cada loma y su valle consecutivo, que es lo mismo que contar el total de $-1$'s que aparecen en el polígono. Supongamos que $c$ es el número escrito en el vértice donde inició el recorrido. Si a $c$ le voy sumando los 1's y $-1$'s de los lados conforme van apareciendo obtengo los números de los vértices a lo largo del recorrido. Por lo tanto, al finalizar el recorrido deben haber aparecido la misma cantidad de 1's que de $-1$'s, esto es, hay $n$ de cada uno.