Soluciones del Examen Final de la 17a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Primer dia

Solución 1. 1) El número 1000 no puede ser parte de la sucesión pues es mayor que 200 y 1000+2=1002 no es múltiplo de 5.
2) Como $2003 > 200$ no puede ser el a_0, si fuera parte de la sucesión el número que le precede debería ser $\frac{2003-2}{5} = 401$. Sin embargo, 401 no puede ser parte de la sucesión pues es mayor que 200 y 401+2=403 no es múltiplo de 5.
3) Haciendo el proceso inverso vemos que 6938 es parte de la sucesión que inicia en 56: 56, 278, 1388, 6938.

Solución 2. Dado que las distancias BO_P y PO_P son iguales tenemos que el triángulo BO_PP es isósceles, $\angle O_PPB = O_PBP$, y, por lo tanto, $\angle O_PPB = \frac{1}{2}(180^o - PO_PB)$. Recordando que O_P es el centro de la circunferencia circunscrita es fácil ver que $\frac{1}{2}\angle PO_PB = \angle PAB$ (si O_P cae dentro de APB) o que $\frac{1}{2}PO_PB = 180 - \angle PAB^o$ (si O_P está fuera de APB). En cualquier caso, $\angle PO_PB$ es igual a la mitad del menor ángulo que forman BA y $\mathcal{L}$. Cómo este ángulo no depende de P entonces $\angle PO_PB$ es constante y $\angle O_PPB$ también.

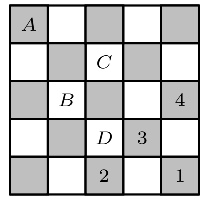
Solución 3. (a) Observemos la suma de las tarjetas que se mueven en cada paso. Es claro que si una tarjeta que se mueve en cierta ocasión no se mueve en el paso siguiente es porque se mueve una tarjeta con un número menor y, en tal caso, la suma desciende. Como la suma no puede descender infinitamente entonces tenemos que a partir de cierto paso debe estabilizarse y hay n cartas que se mueven y las otras n se quedan estables.

(b) Las tarjetas que van a quedarse en su lugar son las numeradas del $n+1$ al $2n$ y a las que llamaremos “grandes”. Una vez que cada persona tenga una de estas cartas habremos alcanzado el momento buscado. Veamos que pasa con estas cartas cuando n es par (el caso impar es análogo). Para esto, llamemos a las personas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comenzando con la que tenía el 1 y continuando hacia su derecha. Antes de iniciar los movimientos, $n/2$ personas ($\{A_{n/2+1}, \ldots, A_n\}$) tienen todas la cartas grandes. En el siguiente movimiento A_1 y $A_{n/2+1}$ tienen una carta grande y $\{A_{n/2+2}, \ldots, A_n\}$ tienen dos. El siguiente movimiento no cambia la gente que tiene cartas grandes, pero ahora, los que tienen dos son $\{A_{n/2+3}, \ldots, A_n, A_1\}$, así que en el siguiente paso A_2 recibirá una carta grande. Este mecanismo se irá repitiendo y el resultado es que A_1 recibe una carta grande en el primer paso, A_2 la recibe en dos pasos al igual que $A_3, A_4, \ldots, A_{n/2}$. Se necesitan $1 + 2(\frac{n}{2} - 1) = n - 1$ pasos.
En el caso n impar los que empiezan con cartas grandes son $\{A_{(n+1)/2}, \ldots, A_n\}$ y se requieren $1+2(\frac{n-1}{2}-1) = n - 2$ movimientos.
NOTA: Un análisis detallado del proceso podría terminar resolviendo el inciso (b) y al mismo tiempo demostrando el (a) y, en tal caso, merecería puntuación completa.

Solución 4. El mayor entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ puede ser $\frac{n^2}{3}$ (cuando la division es exacta), o $\frac{n^2-1}{3}$ o $\frac{n^2-2}{3}$. Para resolver el problema, basta considerar los posibles casos:
1. Si $n^2 = 3p$ entonces p tendría que ser 3 y $n = 3$.
2. Cuando $n^2 - 1 = 3p$ entonces p y 3 deben ser los factores de $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$. La única solución es que $3 = n - 1$ y $p = n + 1$ con lo que obtenemos $n = 4$ también es solución.
3. El tercer caso, $n^2 - 2 = 3p$ no puede ocurrir pues entonces el residuo de dividir n^2 entre 3 sería 2 y los únicos residuos posibles para un cuadrado son 0 y 1 cuando se divide entre 3.

Solución 5. Supongamos que ambos comienzan a jugar en esquinas grises (en lugar de negro). La tortuga siempre finaliza sus jugadas en casillas grises, mientras que Aquiles siempre alterna el color donde finaliza sus jugadas. De esta manera, si Aquiles finaliza una jugada en un cuadro blanco la tortuga no podrá ganar en su siguiente jugada, sin importar que tan cerca esté.

Analicemos las posibilidades usando el siguiente tablero donde A es la posición inicial de Aquiles y 1 la posición inicial de la tortuga.



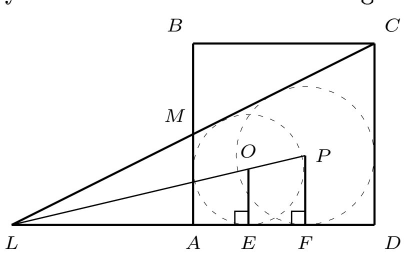
En su jugada inicial, la tortuga termina en alguna de las casillas marcadas 1 a 4. Aquiles debe moverse a B o C buscando acercarse lo más posible. La tortuga debe regresar a 1 buscando alejarse lo más posbile, cualquier otra posición hace que Aquiles gane. Si entonces Aquiles se mueve a la casilla D, ganará en su siguiente turno.

Solución 6. Supongamos que tenemos una solución. Despejando obtenemos que

$$p^n = n(n^{p-1} + 9)\,.$$

De la ecuación anterior podemos obtener varias conclusiones útiles: n y $n^{p-1}+9$ son potencias de p y en particular son divisibles entre p (si n fuera 1 no hay solución y $n^{p-1}+9$ no puede ser 1). De aquí que p tiene que dividir a 9 y por lo tanto $p = 3$. Como n es una potencia de 3 (mayor a 1) $n^2 + 9$ es divisible entre 9 pero claramente no será divisible entre 27, lo cual contradice el hecho de que $n^2 + 9$ debe ser potencia de 3. Por lo que concluimos que no hay soluciones.

Solución 7. Prolonguemos OP, MC y AD como se muestra en la figura.



Por la simetría de las circunferencias con respecto a la línea OP es claro que, llamando L a la intersección de la tangente común AD con OP, MC también pasa por L. Llamemos E y F a los puntos de tangencia indicados en la figura. Es claro que los triángulos LEO y LFP son semejantes. De aquí tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{LE}{LF} & = & \dfrac{EO}{FP} \\ \dfrac{2+r}{4-R} & = & \dfrac{r}{R} \end{array}$$

Despejando R se obtiene la igualdad buscada.

Solución 8. En el primer movimiento tenemos que juntar dos de los tres montones de piedras pues niguno tiene una cantidad par. Si en el primer movimiento juntamos los montones de 51 y 49, en el siguiente paso la cantidad de piedras en cada montón será múltiplo de 5. Como las operaciones posibles son sumar dos montones o dividir uno entre 2, las cantidades de los montones en los siguientes pasos serán nuevamente todos múltiplos de 5; de esta manera será imposible conseguir montones de una sola piedra haciendo estas operaciones. En las otras dos posibilidades para el primer movimiento los montones que resultan son, o ambos múltiplos de 3, o ambos múltiplos de 7, así que, por el mismo argumento, no es posible llegar a montones con una piedra.