Soluciones del Examen Final 2004

Solución 1. Consideremos la gráfica de amistades, es decir, pongamos un punto por cada duende y una línea uniendo dos puntos si los duendes correspondientes son amigos. Es claro que basta fijarse en un duende cualquiera y probar que llega un momento en que él es amigo de todos los demás; para esto también es claro que basta ver que hay un camino formado por las líneas de la gráfica que une a ese duende con todos los demás (es decir, que la gráfica es conexa). Como al principio cada duende es amigo de n duendes, con ellos ya está conectado, de manera que un bloque conexo de la gráfica tiene por lo menos $n+1$ elementos. Si hubiera un duende no conectado con ese bloque, él mismo pertenecería a un bloque de $n+1$ duendes separado del primero, pero sólo hay $2n+1$ duendes así que eso es imposible.

Solución 2. Escribamos $n = a^2 + b^2$ con a y b positivos. Módulo 10 los residuos de los cuadrados son 0, 1, 4, 9, 6 y 5. Al considerar todas las sumas de éstos por parejas observamos que las únicas posibilidades en las que el resultado tiene residuo 1 son $5+6$ y $0+1$ (esto se puede analizar rápidamente formando una tabla). Por otro lado, módulo 3 los residuos de los cuadrados son 0 y 1 y, como $1+1=2$ no es múltiplo de 3, tenemos que a y b deben ser ambos múltiplos de 3.

1er caso. Uno de los cuadrados, digamos a^2, tiene residuo 5 módulo 10 y el otro, digamos b^2, tiene residuo 6. En este caso, las posibilidades de los residuos de a y b son, por parejas, $(5,4)$ y $(5,6)$. Como además sabemos que a y b son múltiplos de 3, tenemos que $a = 15, 45, \ldots$ y $b = 6, 24, \ldots$. Usando ahora que $n < 1000$ observamos que las únicas posibilidades en este caso son $(a,b) = (15,6)$ y $(a,b) = (15,24)$, de donde las posibilidades para n son $225+36 = 291$ y $225+576 = 801$.

2o caso. Uno de los cuadrados, digamos a^2, tiene residuo 0 módulo 10 y el otro, digamos b^2, tiene residuo 1. En este caso, las posibilidades de los residuos de a y b son, por parejas $(0,1)$ y $(0,9)$. Aquí también, usando que a y b son múltiplos de 3, tenemos que $a = 30, 60, \ldots$ y $b = 9, 21, 39, 51, \ldots$, pero como $n < 1000$ la única posibilidad en este caso es $(a,b) = (30,9)$, de donde $n = 900+81 = 981$.

Solución 3. Sea $\mathcal{K}$ el círculo con centro O y radio OB. Sea F la intersección de CE con $\mathcal{K}$. Como OC es perpendicular a EF, entonces $CE = CF$. Además BF es diámetro de $\mathcal{K}$ (pues $\angle BEF$ es recto), así que O es punto medio de BF. Entonces en el triángulo BEF se tiene que BC y EO son medianas y, como $BD = 2DC$, entonces D es baricentro y así tenemos que EO pasa por D.

Solución 4. Observemos primero que para $n \geq 5$ se tiene que

$$(*) \quad 2^n > n^2.$$

(Esto puede probarse formalmente por inducción como sigue: Para $n = 5$, $2^n = 32$ y $n^2 = 25$ así que el resultado es obvio; suponiendo que también lo es para cierta $n \geq 5$, probémoslo para $n+1$: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ que, aplicando la hipótesis de inducción es mayor que $2n^2 = n^2 + n^2$, el cual es mayor que $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ puesto que $n > 2 + \frac{1}{n}$ y entonces $n^2 > 2n+1$.)

Usaremos este resultado varias veces en lo que sigue. Escribamos la ecuación del problema como

$$x(p^2 - x^2) = 3 \cdot 2^p.$$

1er caso. $x = 1$. Aquí $p^2 - 1 = 3 \cdot 2^p$. Es claro que $p = 2$ y $p = 3$ no satisfacen la ecuación. Para $p \geq 5$ tenemos que $p^2 - 1 < p^2 \leq 2^p < 3 \cdot 2^p$, así que este caso es imposible.

2o caso. $x = 3$. Aquí $p^2 - 9 = 2^p$. También es claro que $p = 2$ y $p = 3$ no satisfacen la ecuación y que, para $p \geq 5$, $(*)$ también aplica para decir que no hay solución.

3er caso. $x = 3 \cdot 2^r$, para cierta $r \geq 1$. Entonces $p^2 - 9 \cdot 4^r = 3 \cdot 2^{p-r}$. Como $r \geq 1$, tenemos que $9 \cdot 4^r$ es par. El caso $p = 2$ es claramente imposible, así que p^2 debe ser impar, de donde la única posibilidad es $p = r$ (para que $2^{p-r} = 1$). La ecuación entonces es $p^2 = 9 \cdot 4^p + 1$. Es claro que $p = 3$ no satisface la ecuación y, otra vez, cuando $p \geq 5$, $(*)$ nos dice que el lado derecho de la nueva ecuación es siempre mayor que el izquierdo, por lo que tampoco en este caso hay solución.

Entonces no hay ninguna pareja de enteros que satisfaga la ecuación.

Solución 5. La ficha 2004 va siempre a la casilla 2004, así que el único lugar donde pueden encontrarse todas las fichas es en la casilla 2004. Como $2004 = 6 \times 334$, la ficha 6 llega por primera vez a la casilla 2004 después de 333 segundos; por otro lado, si a es un múltiplo cualquiera de 6, entonces $a + 333a = 334a$ es múltiplo de 2004, así que la respuesta es 333 segundos.

Solución 6. Digamos que el paralelogramo tiene vértices A, B, C y D, en ese orden. Sean P, Q y R los centros de los cuadrados con bases DA, AB y BC, respectivamente. Por simetría, bastará probar que $PQ = QR$ y que estos dos segmentos forman un ángulo recto. Llamemos a al ángulo $\angle DAB$. Tenemos que a y $\angle ABC$ suman 180^o, así que el ángulo exterior en B (formado por los lados de los cuadrados) es igual a a. Por otro lado, como $AD = BC$, entonces $AP = BR$. También tenemos que $AQ = QB$ y que $\angle PAQ = 45^o + a + 45^o = \angle BQR$; de aquí que los triángulos APQ y BRQ son iguales y así $PQ = QR$. Además $\angle AQP = \angle BQR$, por lo que $\angle PQR = \angle AQB = 90^o$, como queríamos probar.

Solución 7. Llamemos h_n a la altura a la que llegan los colchones despues de haber colocado el n-ésimo colchón. Como h_1 es 1 o 2, entonces $h_1 < \frac{8}{3}$. Supongamos, por hipótesis de inducción, que hasta un cierto n se tiene que $h_n < \frac{8}{3}$, y probemos también que $h_{n+1} < \frac{8}{3}$. En el caso en el que el $(n+1)$-ésimo colchón pese 2 Kg, tenemos que $h_{n+1} = 2 + \frac{h_n}{4} < 2 + \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$. En el caso en el que el $(n+1)$-ésimo colchón pese 1 Kg, tenemos que $h_{n+1} = 1 + \frac{h_n}{2} < 1 + \frac{8}{3 \cdot 2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} < \frac{8}{3}$. De esta forma vemos que la altura $\frac{8}{3}$ no puede alcanzarse.

Veamos que con colchones de 2 Kg, en algún momento superamos 2.666 cm. Tenemos que

$$\begin{aligned}
h_1 &= 2, \\
h_2 &= 2 + \frac{2}{4} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\right), \\
h_3 &= 2 + \frac{2}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right), \\
&\vdots \\
h_n &= 2\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = 2\left(\frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).
\end{aligned}$$

De aquí ya es claro que podemos lograr $h_n > 2.666$ (al despejar vemos que basta que 4^n sea mayor que $\frac{1}{0.00025} = 4000$, lo cual es cierto para $n \geq 6$.)

Solución 8. Pongamos el río $\mathcal{R}$ en la parte inferior de la cuadrícula. Entonces el recorrido debe empezar verticalmente hacia arriba y terminar también verticalmente hacia arriba; como cada vuelta cambia el sentido, observamos que el número de vueltas debe ser par.

1er caso. 0 vueltas. En este caso hay 10 caminos.

2o caso. 2 vueltas. La elección de dos calles verticales en orden y la elección de una calle horizontal determinan el camino y esta elección puede hacerse de $5 \times 10 \times 9 = 450$.

3er caso. Un camino así está formado por dos recorridos horizontales y tres verticales; sin embargo, el orden de los caminos horizontales elegidos limita las posibilidades para los verticales pues el recorrido no debe autointersectarse. Tenemos entonces dos posibilidades: La primera es escoger las dos calles horizontales de manera que la primera que recorra el autobúsŻesté más abajo que la segunda (las posibilidades de elección son $\binom{5}{2} = 10$); en este caso cualquier orden de las tres calles verticales es posible y esto puede hacerse de $10 \times 9 \times 9 = 810$ formas. La segunda posibilidad es que la primera calle horizontal elegida esté más arriba que la segunda (esto pasa en $\binom{5}{2} = 10$ casos); aquí las 3 calles verticales deben escogerse de izquierda a derecha o de derecha a izquierda para que el recorrido no se autointersecte, lo cual puede hacerse de $2\binom{10}{3} = 240$ formas. Entonces en el caso de 4 vueltas tenemos $810 + 240 = 1050$ recorridos.

El total de recorridos es $10 + 450 + 1050 = 1510$.