SOLUCIONES PARA EL EXAMEN DE LA ÚLTIMA ETAPA ESTATAL DE LA 19a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. Necesitamos que $S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ sea múltiplo de 12; entonces juntos n y $n+1$ deben contener tres $2'$s y un 3. Además $n \geq 12$ pues el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ debe partirse en 12 subconjuntos. Las posibilidades son $n = 15, 23, 24, \ldots$. Para $n = 15$, $S_n = \frac{15\times16}{2} = 120$, así que la suma de cada subconjunto debería ser 10; como uno de los elementos del subconjunto debe contener al 15, también este caso es imposible. Para $n = 23$, $S_n = \frac{23\times24}{2} = 23 \times 12$, así que la suma de cada subconjunto debe ser 23. Este caso sí es posible tomando los subconjuntos:

$$A_1 = \{1, 22\}, A_2 = \{2, 21\}, , A_2 = \{3, 20\} \ldots, A_{11} = \{11, 12\} \text{ y } A_{12} = \{23\}.$$

Entonces la respuesta es $n = 23$.

2. Probaremos que $\angle OAO' + \angle OQO' = 180^o$. Por definición de circuncentro, A es la intersección de la perpendicular a BQ por O y la perpendicular a $B'Q$ por O'; por lo tanto $\angle OAO' = 180^o - \angle BQB'$. Basta entonces probar que $\angle OQO' = \angle BQB'$. Consideremos ahora la recta paralela a OO' que pasa por P.Ésta intersecta a $\mathcal{C}$ y a $\mathcal{C}'$ en C y C', respectivamente y, como QP es perpendicular a OO', entonces también es perpendicular a CC', así que CQ y CQ' son diámetros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, respectivamente. Por otro lado, por abarcar los mismos arcos, tenemos que $\angle B'BQ = \angle C'CQ$ y $\angle BB'Q = \angle CC'Q$, así que los triángulos $BB'Q$ y $CC'Q$ son semejantes y $\angle BQB' = \angle CQC' = \angle OQO'$, como queríamos.

3. Escribamos el acomodo original y a continuación cómo quedan las tarjetas después del primer paso:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
25	1	24	2	23	3	22	4	21	5	20	6	19	7	18	8	17	9	16	10	15	11	14	12	13

Ahora observemos que de esta tabla se puede deducir qué va a pasar con cada tarjeta después de varios pasos; por ejemplo, la tarjeta número 10 va al lugar 20 en el primer paso, así que en el segundo paso irá al lugar al que fue la tarjeta número 20 en el primer paso, que es el lugar 11, y en el tercer paso irá al lugar al que fue la tarjeta 11 en el primero (y éste será el segundo paso para la tarjeta con el número 20), o sea al lugar 22, y así sucesivamente. Escribamos entonces las posiciones en que va quedando la carta que lleva el número 1:

$$1, 2, 4, 8, 16, 19, 13, 25, 1, \ldots$$

de aquí en adelante sus posiciones se repiten y también sabemos cómo van quedando todas las tarjetas que aparecieron en esta lista. Tomemos ahora la primera tarjeta que no está en la lista: la número 3 y sigamos su trayectoria como lo hicimos con la del número 1 hasta lograr una repetición:

$$3, 6, 12, 24, 3, \ldots$$

Ahora hagamos lo mismo con la tarjeta 5:

$$5, 10, 20, 11, 22, 7, 14, 23, 5, \ldots$$

Y ahora con la tarjeta 9:

$$9, 18, 15, 21, 9 \ldots$$

Falta sólo considerar la tarjeta 17, que queda siempre en su lugar.
Como todas las tarjetas llevan un movimiento cíclico, vemos que todas llegan en algún momento a su lugar original, y que las tarjetas del primer ciclo (las de la lista del 1) se repiten cada 8 veces (la longitud del ciclo); las de la segunda lista se repiten cada 4 veces, las de la tercera, cada 8 veces, las de la cuarta, cada 4 veces y la última se repite siempre. Entonces se repiten juntas en el minimo común múltiplo de 1, 4 y 8 que es 8.

4. Usamos inclusión-exclusión.
   El número total de acomodos es $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{8!}{2^4}$.
   Para ver los acomodos en que al menos dos esferas del mismo color quedan juntas, nos fijamos en que las posibilidades de escoger dos lugares juntos son 7 (que son $(1\,2), (2\,3), \ldots, (7\,8)$). El color de las que quedan juntas puede escogerse de 4 formas. Las demás esferas pueden colocarse de $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$. Entonces, en total, el número de estos acomodos es $\frac{7!}{2^3} \times 4$.
   Contemos ahora los acomodos en que al menos dos parejas de esferas quedan juntas. Vemos que las posibilidades para los lugares donde quedan juntas son 15 ($(1\,2)(3\,4)$, $(1\,2)(4\,5)$, $(1\,2)(5\,6)$, $(1\,2)(6\,7)$, $(1\,2)(7\,8)$, $(2\,3)(4\,5)$, $(2\,3)(5\,6)$, $(2\,3)(6\,7)$, $(2\,3)(7\,8)$, $(3\,4)(5\,6)$, $(3\,4)(6\,7)$, $(3\,4)(7\,8)$, $(4\,5)(6\,7)$, $(4\,5)(7\,8)$, y $(5\,6)(7\,8)$). Las posibilidades para el primer color de las que quedan juntas son 4, y para el segundo color son 3; las demás esferas pueden colocarse de $\binom{4}{2}\binom{2}{2}$. En total, el número de estos acomodos es $\frac{6!}{2^3} \times 4 \times 3$.
   Análogamente, las posibilidades de que al menos tres parejas de esferas queden juntas se cuenta como sigue: Son 10 posibilidades para los lugares donde quedan juntas ($(1\,2)(3\,4)(5\,6)$, $(1\,2)(3\,4)(6\,7)$, $(1\,2)(3\,4)(7\,8)$, $(1\,2)(4\,5)(6\,7)$, $(1\,2)(4\,5)(7\,8)$, $(1\,2)(5\,6)(7\,8)$, $(2\,3)(4\,5)(6\,7)$, $(2\,3)(4\,5)(7\,8)$, $(2\,3)(5\,6)(7\,8)$, $(3\,4)(5\,6)(7\,8)$); las posibilidades de escoger los colores para las que quedan juntas son $4 \times 3 \times 2$ y las últimas dos esferas tienen ya el lugar determinado: $\binom{2}{2}$. En esta cuenta tenemos en total $10 \times 4 \times 3 \times 2$.
   Finalmente, el número de posibilidades en que las cuatro parejas de esferas del mismo color queden juntas es 4!
   Juntando todo con inclusión-exclusión tenemos el resultado:

$$\begin{aligned}&\frac{8!}{2^4} - \frac{7! \times 4}{2^3} + \frac{6!}{2^3} \times 4 \times 3 - 10 \times 4 \times 3 \times 2 + 4! \\ =&7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 - 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 - 240 + 24 = 864.\end{aligned}$$

5. Veremos que n es el mínimo número de pasos necesarios. Para ver que con n se puede, diganos que el mago siempre toca el cuadrito que est en la esquina de arriba a la izquierda (es decir, el mago va tocando los cuadritos de la diagonal de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha). Entonces es claro que en n pasos todo el tablero habrá desaparecido.
Para ver que n es el menor, supongamos que con k pasos es posible y que $k < n$; entonces hay una fila cuyos cuadritos nunca tocó el mago; pero en esa fila hay n cuadritos, y entonces la única forma en que éstos desaparecieron es porque el mago en algún momento tocó al menos un cuadrito en cada columna original, pero son n columnas, así que eso es imposible.

6. Tenemos que

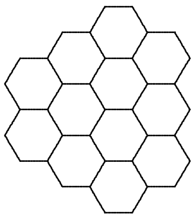
$$\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
a_2 &= a_1 + 2 = 3,\\
a_3 &= 2a_2 + a_1 + 3 = 2a_2 + (a_1 + 2) + 1 = 3a_2 + 1 = 10,\\
a_4 &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 + 4 = 3a_3 + a_3 + 1 = 4a_3 + 1,\\
&\vdots\\
a_n &= na_{n-1} + 1.
\end{aligned}$$

Entonces, módulo 9:

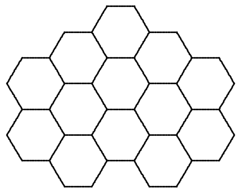
$$\begin{aligned}
a_1 &\equiv 1,\\
a_2 &\equiv 2 \times 1 + 1 \equiv 3,\\
a_3 &\equiv 3 \times 3 + 1 \equiv 1,\\
a_4 &\equiv 4 \times 1 + 1 \equiv 5,\\
a_5 &\equiv 5 \times 5 + 1 \equiv 8,\\
a_6 &\equiv 6 \times 8 + 1 \equiv 4,\\
a_7 &\equiv 7 \times 4 + 1 \equiv 2,\\
a_8 &\equiv 8 \times 2 + 1 \equiv 8,\\
a_9 &\equiv 0 \times 8 + 1 \equiv 1,\\
a_{10} &\equiv 1 \times 1 + 1 \equiv 2,\\
a_{11} &\equiv 2 \times 2 + 1 \equiv 5,\\
a_{12} &\equiv 3 \times 5 + 1 \equiv 7,\\
a_{13} &\equiv 4 \times 7 + 1 \equiv 2,\\
a_{14} &\equiv 5 \times 2 + 1 \equiv 2,\\
a_{15} &\equiv 6 \times 2 + 1 \equiv 4,\\
a_{16} &\equiv 7 \times 4 + 1 \equiv 2,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observamos que a_{16} se construyó igual que a_7 así que, como se usa la misma regla de recurrencia, a partir de aquí todo se repite (o sea, $a_{17} \equiv a_8$, $a_{18} \equiv a_9$, etc.). Entonces ningún a_n es congruente con 0 módulo 9, de donde no hay n's tales que a_n sea múltiplo de 9.

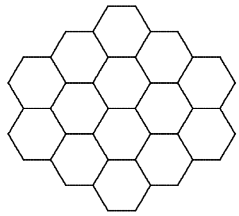
7. Para $n = 12, 13$ y 14 los acomodos son como sigue:



$n = 12$

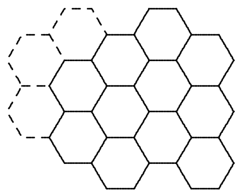


$n = 13$



$n = 14$

Ahora supongamos construido un "panal" con n hexágonos para cierta $n \geq 12$ y construyamos un "panal" con $n + 3$ hexágonos agregando 3 hexágonos a cualquiera de las figuras que se tienen arriba y dejando la figura cómo empezó para poder continuar el proceso indefinidamente y así asegurar que todos los $n \geq 12$ están cubiertos. Los tres hexágonos que aumentamos se indican con línea punteada en la siguiente figura:



8.

(a) Por la igualdad de los lados tenemos que los triángulos ADC y BCD son congruentes. Entonces sus medianas sobre DC son iguales, pero éstas son AP_2 y BP_2, respectivamente; entonces el triángulo AP_2B es isósceles y su mediana P_1P_2 es perpendicular al lado opuesto AB, como queríamos.

(b) Por simetría de los argumentos, basta probar que P_1P_2 es ortogonal a Q_1Q_2 y que se intersectan en los puntos medios. En ABC tenemos $P_1Q_1 \,||\, BC$ y $|P_1Q_1| = \frac{1}{2}|BC|$; análogamente en DBC tenemos que $P_2Q_2 \,||\, BC$ y $|P_2Q_2| = \frac{1}{2}|BC|$; juntando lo obtenido deducimos que $P_1Q_1 \,||\, P_2Q_2$ y $|P_1Q_1| = |P_2Q_2|$. Análogamente $P_1Q_2 \,||\, P_2Q_1$ y $|P_1Q_2| = |P_2Q_1|$. Además $P_1Q_1 = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|AD| = |P_1Q_2|$. Entonces $P_1Q_1P_2Q_2$ es un rombo, así que sus diagonales P_1P_2 y Q_1Q_2 se intersectan ortogonalmente en los respectivos puntos medios.