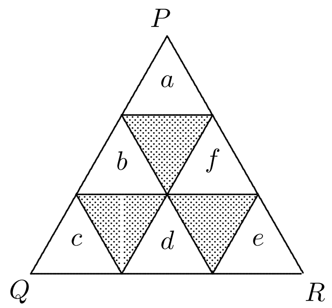
Soluciones del examen de la ETAPA FINAL ESTATAL DE LA 20ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. Sea O el punto de intersección de BP con CQ. Los ángulos en O dentro del triángulo PQR son todos iguales a 120^o así que, por simetría, $\angle BOA = 60^o$. Como el ángulo en B es recto, el ángulo $\angle BAO = 30^o$, y de aquí que $\angle BAC = 60^o$.

2. Tenemos que $(x-12)(x+12) = x^2 - 144 = 3^{x-11}$. Entonces ambos $x-12$ y $x+12$ son potencias de 3. La diferencia entre ellos es 24, así que la única posibilidad es que $x-12$ sea 3 y $x+12$ sea 27, esto es, que x sea 15.

3. Representemos cada ciudad por un punto y pongamos una línea entre dos puntos si entre las ciudades que representan va a haber una autopista. El número total de parejas de puntos es $\binom{a+b}{2}$, así que las posibilidades de poner o no líneas son $2^{\binom{a+b}{2}}$; sin embargo, aquí no se está tomando en cuenta el que al menos haya una ciudad de A conectada mediante autopista a alguna ciudad de B. Entonces, hay que restar los casos en que entre todas las ciudades de A y las de B no haya línea; estos casos son $2^{\binom{a}{2}}2^{\binom{b}{2}}$. El resultado es
$$2^{\binom{a+b}{2}} - 2^{\binom{a}{2}+\binom{b}{2}}.$$

4. Llamemos a, b, c, d, e, f a los números que quedan en los triangulitos según se indica en la figura. Podemos suponer que $a < c < e$ y después, el resultado que obtengamos con esta condición lo multiplicaremos por $6 = 3!$, que es el número de permutaciones de estas tres letras.



Tenemos que $a+b+c = c+d+e = a+f+e = x$. Tenemos entonces que $3x = 2a+2c+2e+b+d+f = 21+a+c+e$ y así $a+c+e$ es múltiplo de 3; además, como los números están entre 1 y 6, a, c y e deben dejar distinto residuo al dividirlos entre 3. Con estas condiciones tenemos 8 casos para $(a, c.e)$: $(1,2,3)$, $(1,2,6)$, $(1,3,5)$, $(1,5,6)$, $(2,3,4)$, $(2,4,6)$, $(3,4,5)$ y $(4,5,6)$. Ahora consideremos también los números que faltan de poner: junto a los dos que sumen más en las esquinas debe ir el más chico de los que faltan y viceversa (es decir, entre los dos que sumen más debe ir el más chico); de esta manera, los otros tres números están determinados por a, c y e. Comprobamos entonces que sólo los casos siguientes son posibles para (a,b,c,d,e,f): $(1,6,2,4,3,5)$, $(1,6,3,2,5,4)$, $(2,5,4,1,6,3)$ y $(4,3,5,1,6,2)$. En total son $6 \times 4 = 24$.

5. Necesitamos un número de tres cifras tal que al multiplicarse por 4 siga teniendo 3 cifras, así que el número debe ser menor que 250. La primera cifra no puede ser 1, pues al voltear las cifras quedaría un número impar, lo cual no es posible porque al voltearlo es múltiplo de 4. Entonces la primera cifra es 2 y, por lo tanto, la última es 8 o 9. No puede ser 9 pues entonces al multiplicarlo por 4 el resultado terminaría en 6, no en 2. Hasta quí hemos deducido que las únicas posibilidades son: 208, 218, 228, 238 y 248. Ahora es fácil comprobar que sólo el 208 funciona.

6. Rodrigo tiene estrategia ganadora pues siempre puede pintar el cuadro simétrico al que pinte Alberto con respecto a la diagonal que va de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha. Cuando Alberto pinte un cuadro de la diagonal, entonces si Rodrigo siguió su estrategia, podrá entonce pintar ese mismo cuadro que pintó Alberto y así ganará.

7. Primera solución: *Con recursión.* Observemos que al bajar verticalmente llegamos a una figura igual a la inicial, pero con un vértice menos. Bajando en diagonal, llegamos a otra figura como la inicial, pero con dos vértices menos. Esto nos da una relación de recurrencia: $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$. Calculando $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$ y haciendo los primeros 8 términos, obtenemos la respuesta, que es 34.
   Segunda solución: *Con conteo.* Observemos que cada paso en diagonal ahorra dos pasos en vertical. En total podemos dar 0, 1, 2, 3 o 4 pasos en diagonal. Eligiendo las posiciones en que los damos tenemos que la respuesta es
   $$\binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} = 34.$$

8. Oservemos que $\angle APQ = \angle CPB = \angle PBC = \angle AQB$ ya que PCB es isósceles y BQ es una transversal entre las paralelas AD y BC. Entonces AQP es isósceles, de donde AM es mediatriz de PQ y, por lo tanto, $\angle PQT = \angle QPT$. Por otro lado, el cuadrilátero $MTHP$ es cíclico pues los ángulos en M y en H son rectos, así que $\angle MPT = \angle MHT$, y con esto termina la prueba.