21ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
SOLUCIONES PARA EL EXAMEN FINAL ESTATAL

1. (a) El problema puede resolverse haciendo primero (b) o directamente, como sigue. Al escribir $8 = a + b + c$ con $1 \leq a \leq b \leq c$, pensamos que un periodo dura a semanas, otro periodo dura b semanas y el otro c semanas; la elección de los lunes del periodo se puede hacer de $a \cdot b \cdot c$ formas; además hay que considerar que los números a, b, c pueden permutarse. Entonces tenemos los siguientes casos:

$*$ $(a, b, c) = (1, 1, 6)$. Hay 3 permutaciones de estos números así que en este caso hay $6 \cdot 3 = 18$ formas.

$*$ $(a, b, c) = (1, 2, 5)$. Hay 6 permutaciones de estos números así que en este caso hay $10 \cdot 6 = 60$ formas.

$*$ $(a, b, c) = (1, 3, 4)$. Hay 6 permutaciones de estos números así que en este caso hay $12 \cdot 6 = 72$ formas.

$*$ $(a, b, c) = (2, 2, 4)$. Hay 3 permutaciones de estos números así que en este caso hay $16 \cdot 3 = 48$ formas.

$*$ $(a, b, c) = (2, 3, 3)$. Hay 3 permutaciones de estos números así que en este caso hay $18 \cdot 3 = 54$ formas.

En total son $18 + 60 + 72 + 48 + 54 = 252$.

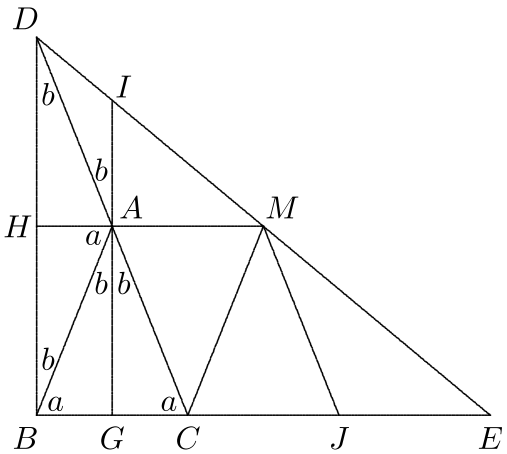
(b) En $n + 2$ casillas escojamos 5 de ellas; la primera determina el lunes del primer periodo, la segunda determina donde termina el primer periodo, la tercera es para el lunes del segundo periodo, la cuarta separa el segundo periodo del tercero y la quinta escoge el lunes del último periodo. En el ejemplo del enunciado, de las casillas $1, 2, 3, \ldots, 12$ se habría escogido las que tienen los números 1, 5, 9, 11 y 12. Entonces $C(n) = \binom{n+2}{5}$.

2. Usaremos varias veces que si tenemos una ecuación $c^2 = pd$ con c, d enteros y p primo, entonces p es divisor de c, así que si $c = pe$ y tenemos que $p^2e^2 = pd$, de donde $pe^2 = d$. De esta forma tenemos que $A = 10x^2$ y, de la misma manera, $A = 36y^3$, para ciertos enteros x, y. Podemos ir deduciendo las ecuaciones siguientes en donde todas las letras que van apareciendo son enteros:

$$\begin{aligned}
10x^2 &= 36y^3, \\
5x^2 &= 18y^3, \quad x = 6k, \\
5 \cdot 36k^2 &= 18y^3 \\
10k^2 &= y^3, \quad y = 10l, \\
10k^2 &= 1000l^3, \\
k^2 &= 100l^3, \quad k = 10m, \\
100m^2 &= 100l^3, \\
m^2 &= l^3.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que m es el cubo de un número y que m y l tienen los mismos primos en su factorización y, como $A = 10x^2 = 360k^2 = 36\,000m^2$, entonces $m^2 \leq \frac{4000}{36} \leq 112$, de donde $m \leq 10$. Pero m es un cubo, así que $m = 1$ o $m = 8$ (y entonces $l = 1$ o $l = 4$, respectivamente), de donde $A = 36\,000$ o $A = 36\,000 \cdot 64 = 2\,304\,000$.

3. Primero observemos que A es punto medio de CD. Esto se ve fácilmente al trazar la perpendicular IG por A a BE y la perpendicular AH a BD y considerar entonces que los ángulos marcados con a en la figura son todos iguales entre sí y que son complementarios de los ángulos marcados con b. Sea M el punto medio de DE. Bastará probar que CM es paralela a AB (pues entonces $F = M$ y es claro que AM es paralela a BC por unir puntos medios de dos lados en el triángulo DCE). Sea J el punto medio de CE. Entonces en el triángulo EDC la recta MJ une los puntos medios de dos lados así que es paralela al tercer lado. Entonces $AMJC$ es paralelogramo, así que $|AC| = |MJ|$; además $\angle MJC = a$. Por otro lado tenemos que $|BC| = |CJ|$, así que los triángulos ABC y MCJ son congruentes y, como dos de sus lados son paralelos, también lo es el tercero: $AB||MC$, como queríamos probar.



4. Gana el jugador A pues siempre puede dejar a B con un número par de rectángulos que tengan un número par de cuadritos. Una forma de lograrlo es escoger al principio el cuadro central, dejando a B con cuatro cuadros de 3×3 (o sea, 0 rectángulos con número par de cuadritos). A partir de aquí A imita lo que hace B; es decir, si B escoge una esquina en alguno de los cuadros de 3×3, entonces A hace lo mismo en otro de los cuadros, y así sucesivamente. Como A siempre puede imitar lo que hace B, entonces A es el último en jugar y gana.

5. Observemos que después de n pasos, la ficha que originalmente estaba en la casilla a, queda en la casilla del residuo módulo 19 de

$$2^n a + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1 = 2^n a + (2^n - 1) = 2^n(a+1) - 1.$$

Entonces buscamos el primer natural n tal que para toda $a \in \{1, 2, \ldots, 19\}$ se tenga que

$$2^n(a+1) - 1 \equiv a \pmod{19},$$

o, equivalentemente,

$$2^n(a+1) \equiv a + 1 \pmod{19},$$

Para $a = 18$ esta congruencia se satisface para toda n (es decir, la ficha que empieza en la casilla 18 siempre se mueve a esa misma casilla). Para $a \neq 18$, el número $a + 1$ es primo relativo con 19, así que se puede cancelar de la congruencia, y entonces buscamos el primer n tal que

$$2^n \equiv 1 \pmod{19},$$

Analicemos las potencias de 2:

$$\begin{aligned}
2^1 &\equiv 2,\\
2^2 &\equiv 4,\\
2^3 &\equiv 8,\\
2^4 &\equiv 16 \equiv -3,\\
2^5 &\equiv -6,\\
2^6 &\equiv -12 \equiv 7,\\
2^7 &\equiv 14 \equiv -5,\\
2^8 &\equiv 10 \equiv 9,\\
2^9 &\equiv 18 \equiv -1.
\end{aligned}$$

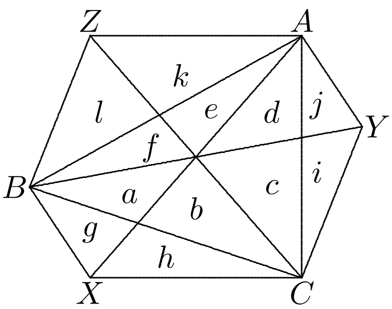
A partir de aquí los residuos son los que ya obtuvimos pero con signo contrario, así que el primer 1 lo obtenemos cuando $n = 18$. Cada 18 minutos ocurre lo mismo.

6. Para ver que 10 es partible pongamos $A = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ y $B = \{2, 6, 7, 8, 10\}$. Las sumas de A son todas distintas: 4, 5, 6, 10, 7, 8, 12, 9, 13 y 14. Las sumas de B también son distintas entre sí: 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 15, 17 y 18.

Para ver que 15 no es partible observemos que si lo fuera, entonces alguno de los dos conjuntos tendría al menos 8 elementos, así que habría por lo menos $\binom{8}{2} = 28$ parejas de elementos en ese conjunto; sin embargo el rango para las sumas va de $1 + 2 = 3$ hasta $14 + 15 = 29$, de manera que las posibilidades para las sumas son $29 - 2 = 27 < 28$. Por el Principio de las Casillas alguna suma debe repetirse.

7. (a) Como los ángulos $\angle ZAC$ y $\angle ZBC$ son rectos, tenemos que el cuadrilátero $ACBZ$ es cíclico y CZ es un diámetro. Análogamente son cíclicos $AYCB$ y $ACXB$ con diámetros YB y XA, respectivamente. Entonces todo el hexágono es cíclico (pues X, Y, Z están en el circuncírculo de ABC) y los diámetros AX, CZ y BY concurren en el centro de este círculo.

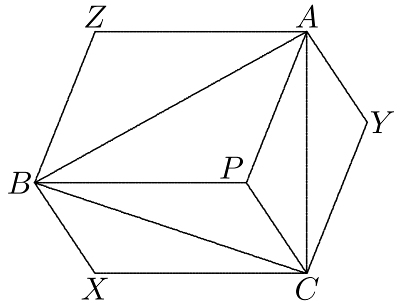
(b) Llamemos $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ a las áreas de los triángulos seguún se indica en la figura.



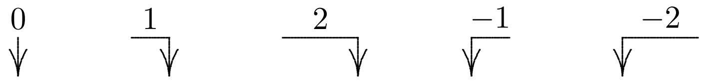
Entonces

$$\begin{aligned}
&BC(CY+BZ)+AB(AY+BX)+AC(CX+AZ)\\
=&2((a+b+c+i)+(a+b+f+l)+(d+e+f+j)\\
+&(a+e+f+g)+(b+c+d+h)+(c+d+e+k))\\
=&6(a+b+c+d+e+f)+2(g+h+i+j+k+l).
\end{aligned}$$

Basta entonces ver que $g+h+i+j+k+l=1$, el área de ABC. Para ello, por A tracemos una paralela a CY, por B tracemos una paralela a XC y por C tracemos una paralela a BX. Éstas deben intersectarse en un punto que llamamos P. Tenemos paralelogramos $APCY$, $BPCX$ y $APBZ$ y los lados de ABC son diagonales de estos paralelogramos, de manera que los dividen en triángulos de la misma área.



8. Identifiquemos cada uno de los siguientes movimientos con el símbolo que se muestra encima de él.



Entonces cada camino está determinado (y viceversa) por una sucesión de los símbolos $-2,-1,0,1,2$ de longitud 6, tal que el símbolo 0 no aparece en dos lugares consecutivos salvo tal vez al principio. Por ejemplo el camino ejemplificado en el enunciado del problema corresponde a la sucesión $(0,2,0,-1,-2,0)$. Contemos las sucesiones por casos:

$*$ Sin $0'$s: 4^6.

$*$ Con un 0: $6\cdot 4^5$.

$*$ Con dos $0'$s: $11\cdot 4^4$ (pues las posiciones donde pueden estar los $0'$s son 11: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,5)$, $(3,6)$ y $(4,6)$).

1 $*$ Con tres $0'$s: $7\cdot 4^3$ (pues las posiciones donde pueden estar los $0'$s son 7: $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,2,6)$, $(1,3,5)$, $(1,3,6)$, $(1,4,6)$ y $(2,4,6)$).

1 $*$ Con cuatro $0'$s: 4^2 (pues slo en una posicin pueden estar los $0'$s esson 7: $(1,2,4,6)$).

En total son

$$4^6+6\cdot 4^5+11\cdot 4^4+7\cdot 4^3+4^2=13\,520.$$