22ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
SOLUCIONES PARA EL EXAMEN FINAL ESTATAL

1. Sean A, B y C los vértices del triángulo, con $|AB| = c$, $|BC| = a$ y $|AC| = b$.

Primera forma. Sean h_A, h_B y h_C las alturas desde los vértices A, B y C, respectivamente. Tenemos que $ah_A = bh_B = ch_C = 2$ pues el área de ABC es 1. Sabemos que en cualquier triángulo la suma de las longitudes de cualesquiera dos de los lados es mayor que la del otro; en este caso $b + c > a$, $a + b > c$ y $a + c > b$. Usando esto obtenemos

$$\begin{aligned} M &= (a+b+c)(h_A+h_B+h_C) \\ &= ah_A + (b+c)h_A + bh_B + (a+c)h_B + ch_C + (a+b)h_C \\ &> 2ah_A + 2bh_B + 2ch_C = 12. \end{aligned}$$

Segunda forma. Sean r el radio del círculo inscrito en el triángulo e I el centro de este círculo. Al partir el triángulo en tres triángulos AIB, AIC y BIC, las alturas de éstos desde el vértice I son todas iguales a r y entonces $(a+b+c)r = 2$ (el doble del área de ABC). Es claro que las tres alturas de ABC son todas mayores que $2r$ y de aquí que $M = (a+b+c)(h_A+h_B+h_C) > (a+b+c)6r = 12$.

2. Como A debe tener 4 divisores, $A = pq$ con $p < q$ primos o $A = p^3$ con p primo.

Consideremos primero el caso $A = p^3$. Como $A \leq 120$ las posibilidades para p son $p = 2$ y $p = 3$ (pues $5^3 = 125 > 120$). Si $p = 2$ entonces $A = 8$ y la suma de sus divisores es $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, que no es cuadrado. Si $p = 3$ entonces $A = 27$ y la suma de sus divisores es $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ que tampoco es cuadrado.

Ahora tomemos $A = pq$ con $p < q$ primos. Tenemos que $p < \sqrt{120}$ así que $p \leq 7$.

Si $p = 2$, tenemos que $3 \leq q \leq 60$ y la suma de los divisores de A es $1 + 2 + q + 2q = 3(1+q)$. Para que esta suma sea cuadrado, $1 + q = 3x^2$ para algún $x > 1$. Los primos entre 3 y 60 son:

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.$$

Sólo tenemos que revisar los que tienen residuo 2 al dividirlos entre 3 (pues son de la forma $3x^2 - 1$). Éstos son $11, 17, 23, 29, 41, 47, 53$ y 59. Los únicos que cumplen que al sumarles 1 y dividirlos entre 3 son cuadrado son $q = 11$ y $q = 47$.

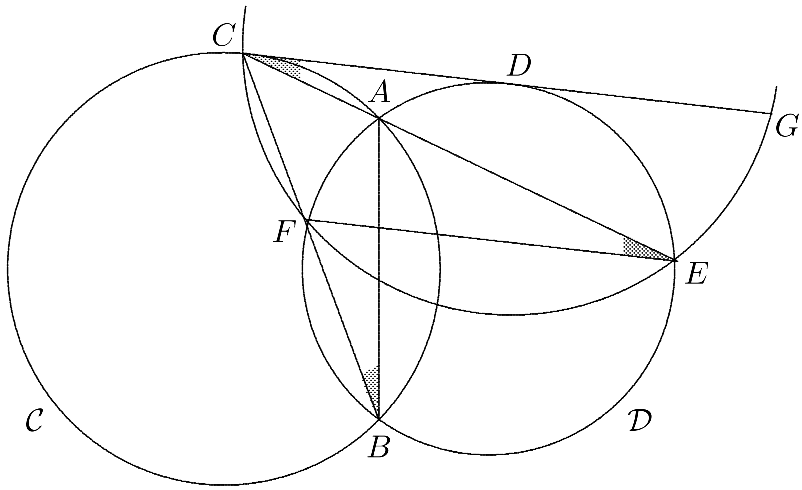
Si $p = 3$ tenemos que $5 \leq q \leq 40$ y la suma de los divisores de A es $1 + 3 + q + 3q = 4(1+q)$. Para que esta suma sea cuadrado, $1 + q = x^2$ para algún $x > 1$. Revisamos cuáles de los primos entre 5 y 40 al sumarles 1 obtenemos un cuadrado y ninguno lo cumple.

Si $p = 5$ tenemos que $7 \leq q \leq 24$ y la suma de los divisores de A es $1 + 5 + q + 5q = 6(1+q)$. Para que esta suma sea cuadrado, $1 + q = 6x^2$ para algún $x > 1$. Revisamos cuáles de los primos entre 7 y 24 al sumarles 1 y dividirlos entre 6 obtenemos un cuadrado; en este caso 23 es el único.

Si $p = 7$ tenemos que $11 \leq q \leq 17$ y la suma de los divisores de A es $1 + 7 + q + 7q = 8(1+q)$. Para que esta suma sea cuadrado, $1+q = 2x^2$ para algún $x > 1$. Revisamos cuáles de los primos entre 11 y 17 al sumarles 1 y dividirlos entre 2 obtenemos un cuadrado; en este caso 17 es el único.

Entonces las posibilidades para A son $2 \cdot 11 = 22$, $2 \cdot 47 = 94$, $5 \cdot 23 = 115$ y $7 \cdot 17 = 119$.

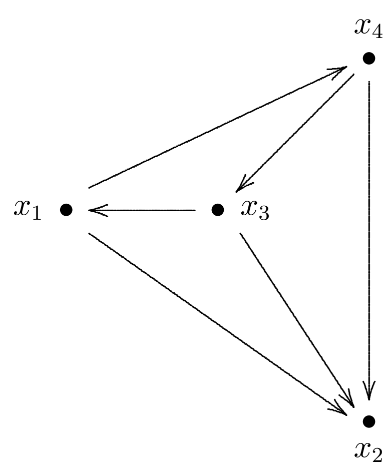
3. Tenemos que los ángulos $\angle AEF$ y $\angle ABF$ son iguales por abarcar el mismo arco en el círculo $\mathcal{D}$. Por otro lado, $\angle ABC = \angle ACD$ también por abarcar el mismo arco en $\mathcal{C}$. Combinando tenemos que $\angle DCE = \angle CEF$, de donde EF y CD son paralelas.



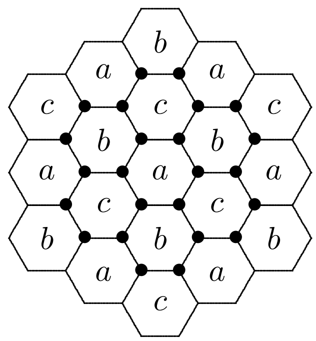
Ahora, la recta que pasa por D y el centro del círculo $\mathcal{D}$ es perpendicular a CD, por lo tanto también a EF, y así esta recta es mediatriz de EF y entonces pasa por el centro del circuncírculo de CEF y, como CG es cuerda de ese círculo, la corta en el punto medio, es decir, D es punto medio.

4. **(a)** Tomemos un jugador a que haya ganado el mayor número de juegos k. Como a no ganó todos los juegos, tomemos c algún jugador que le haya ganado a a; observemos que c no pudo haberle ganado a todos a los que a ganó pues, como le ganó a a, tendría más de k juegos ganados, así que hay algún b que le ganó a c y al cual a le ganó, como queríamos.

(b) Sea $n \geq 3$ arbitrario y llamemos $x_1, x_2, \dots, x_n$ a los jugadores. Para $i, j \in \{2, \dots, n\}$ digamos que x_i le ganó a x_j si y sólo si $i > j$. Por otro lado, digamos que x_1 le ganó a todos salvo a x_{n-1}. Entonces el único "triángulo" es el formado por x_n, x_{n-1}, x_1. Ilustramos abajo esta situación para $n = 4$.



5. Sea a el residuo (de la división entre n) del número del hexágono central, y sean b y c los residuos de los números en dos hexágonos adyacentes al central y también adyacentes entre sí. Entonces los residuos en los 6 hexágonos adyacentes al central deben de ser b y c alternadamente, pues si $a+b+d$ es múltiplo de n, entonces también lo es $c-d = (a+b+c)-(a+b+d)$, de donde $d=c$. De esta misma forma también el número en cualquier hexágono adyacente a ambos b y c debe tener residuo a. Así, los residuos deben ser los indicados en la figura.



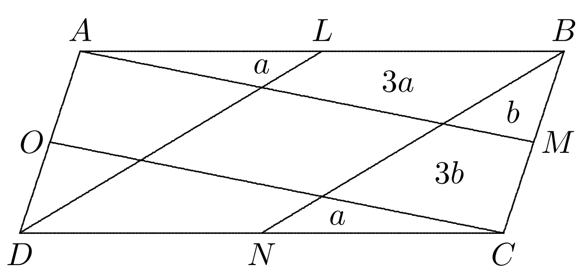
Observamos que hay 7 a's, 6 b's y 6 c's en la configuración total.

Si $n=2$ como $a+b+c$ debe ser par y no es posible que todos sean pares (pues son los números del 1 al 19), dos de ellos son impares y el otro es par, pero esto es imposible pues del 1 al 19 hay 10 pares.

Para $n=3$ sí es posible tomando $a=1$, $b=0$ y $c=2$ y acomodando los 7 números 1, 4, 7, 10, 13, 16 y 19 en cualesquiera de los lugares marcados con a, los 6 números 3, 6, 9, 12, 15 y 18 en los lugares marcados con b, y los 6 números 2, 5, 8, 11, 14 y 17 en los lugares marcados con c.

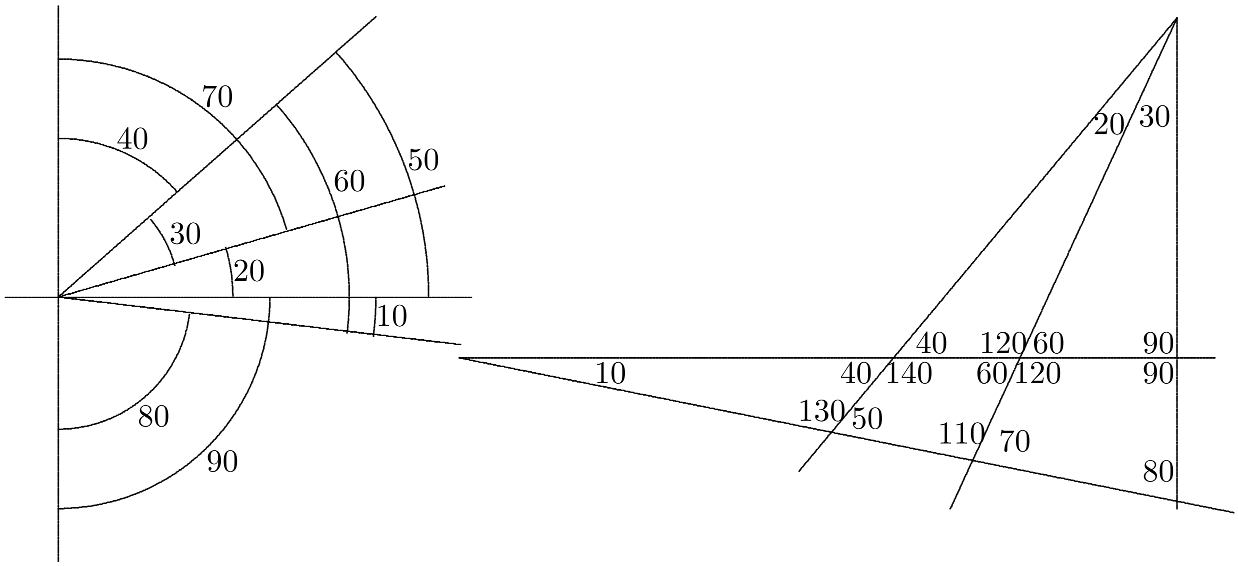
Si $n \geq 4$, como sólo aparecerían 3 residuos, faltarían números, así que tampoco es posible que n sea 4.

6. Sea O el punto medio de AD. Llamemos a y b a las áreas que se muestran en la figura, notando que hay coincidencias en algunas regiones por simetría y paralelismo, y también tomando en consideración que en cualquier triángulo RST, si U y V son los puntos medios de los lados RS y RT, respectivamente, entonces el área de RUV es la cuarta parte del área de RST. Observamos también que las áreas de ABM y de BNC son iguales pues son la cuarta parte del área del paralelogramo. Entonces $4a+b=4b+a$, de donde $a=b$, como queríamos probar.



7. Con 4 rectas se forman a lo más 6 ángulos menores o iguales que 90^o, así que no es posible lograr los 9 ángulos pedidos.

Las siguientes figuras son esquemas (los ángulos no están dibujados en su tamaño real por la conveniencia del dibujo) en los que se muestra que con 5 rectas sí es posible. En la figura de la derecha es fácil verificar que en los triángulos formados la suma de los ángulos es 180^o, y que en los cuadriláteros la suma es 360^o.



8. La cantidad de renglones distintos que se pueden formar usando dos de los números, por ejemplo el 1 y el 2, es $2^5 - 2 = 30$. Análogamente se pueden formar 30 renglones distintos usando el 1 y el 3, y otros 30 usando el 2 y el 3. Es claro entonces que se pueden construir 90 renglones (todos distintos) en los que no aparezca el 4 y, por tanto, que no se forme el rectángulo pedido.

Tomemos ahora una cuadrícula con 91 renglones y veamos que forzosamente hay un rectángulo cuyas 4 esquinas tienen todos los números del 1 al 4.

Primera forma. Como hay 30 posibles renglones que usan dos de los números y las posibilidades de parejas de dos números son 6: $(1,2),(3,4),(1,3),(2,4),(1,4),(2,3)$, entonces debe haber por lo menos dos renglones en los que los números de las parejas son todos distintos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que hay un renglón que usa los números 1 y 2 y otro renglón que usa los números 3 y 4. Por el principio de las casillas, el que tiene 1 y 2, en al menos 3 posiciones tiene el mismo número, digamos que es el 1, así que ese renglón podemos suponer, sin pérdida de generalidad que es $(1,1,1,2,\_)$; también el que tiene a 3 y 4 tiene tres veces al menos el mismo número, digamos que es el 3 y algún 3 debe coincidir con alguna posición de 1; sin pérdida de generalidad ese renglón es $(3,\_,\_,\_,\_)$. Si en la posición de algún 2 también aparece 4 (por ejmeplo, en la cuarta columna), entonces ya acabamos (el rectángulo buscado se forma con la primera y la curta columnas); si no, entonces 4 debe aparecer en alguna posición que coincide con la de algún 1, o sea que el renglón con 3 y 4 es, sin pérdida de generalidad, $(3,4,\_,3,\_)$, y con la segunda y la cuarta columnas tenemos el rectángulo buscado.

Segunda forma. Para $r = 2, 3, 4$ sea a_r el número de renglones que usan los números 1 y r y sea b_r el número de renglones que usan los números distintos de 1 y r (por ejemplo, a_3 es el número de renglones que usan los números 1 y 3, y b_3 es el de los que usan 2 y 4). Como $91 = 3 \cdot 30 + 1$, por el Principio de las Casillas, alguna de las parejas $a_r + b_r \geq 31$, digamos $a_2 + b_2 \geq 31$. También, por el Principio de las Casillas, alguna de a_2 o b_2 es mayor o igual que 16; digamos que $a_2 \geq 16$. Tenemos entonces que al menos hay 16 renglones que usan los números 1 y 2; por otro lado, como $a_2 + b_2 \geq 31$ pero $a_2 \leq 30$ entonces $b_2 \geq 1$, es decir, por lo menos hay un renglón que usa los números 3 y 4; sin pérdida de generalidad digamos que es $(3, 4, \_, \_, \_)$. Queremos ver que alguno de los a_2 renglones que usan 1 y 2 es de la forma $(1, 2, \_, \_, \_)$ o $(2, 1, \_, \_, \_)$. Los de la forma $(1, 1, \_, \_, \_)$ son a lo más $2^3 - 1 = 7$ y análogamente son a lo más 7 los de la forma $(2, 2, \_, \_, \_)$; como $7 + 7 = 14 < 16$, tenemos uno de la forma buscada.

En conclusión, el mínimo valor para k es 91.