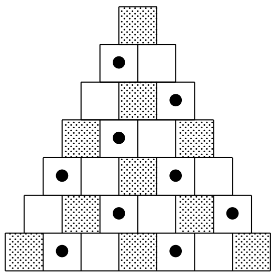
23ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
SOLUCIONES DEL FINAL ESTATAL 2009

1. El segundo jugador puede asegurar su triunfo. Puede seguir cualquiera de las dos estrategias siguientes:
(a) Tirar siempre en posición simétrica con respecto a cualquiera de los dos ejes de simetría del tablero a la ficha recién jugada por su contrincante. Él siempre puede jugar puesto que dos vértices no en la misma columna o renglón tienen a la misma pareja de vértices simétricos, así que los vértices simétricos van llenándose por parejas.
(b) Tirar siempre en el renglón en el que tiró su contrincante en la jugada anterior. Él siempre encuentra lugar vacío en ese renglón porque hay un número par de cuadritos en cada renglón. (Un argumento similar sirve para columnas.)

2. Contamos al revés; es decir, restamos del total los que sí suman múltiplos de 4. Contando según los posibles residuos módulo 4: $(0,0,0)$, $(0,1,3)$, $(0,2,2)$, $(1,1,2)$ y $(2,3,3)$, respectivamente tenemos:

$$\binom{20}{3} - \left(\binom{5}{3} + 5^3 + 5\binom{5}{2} + 5\binom{5}{2} + 5\binom{5}{2}\right).$$

3. Marquemos los cuadros como se indica:



Cada ficha tapa exactamente un cuadrito blanco, uno sombreado y uno con $\bullet$. Por otro lado las posibilidades de residuos para que sumen múltiplo de 3 son $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(2,2,2)$ y $(1,2,3)$. Entonces cada ficha debe tapar exactamente uno de cada residuo. Como hay 10 cuadros grises, 9 blancos y 9 con $\bullet$, y entre los números del 1 al 28 hay 10 que tienen residuo 1, 9 que tienen residuo 0 y 9 que tienen residuo 2, tenemos que colocar los de residuo 1 en los cuadros grises y los de residuo 0 ya sea todos en los blancos o todos en los que tienen $\bullet$. Entonces las formas son $10! \cdot 2 \cdot 9! \cdot 9!$.

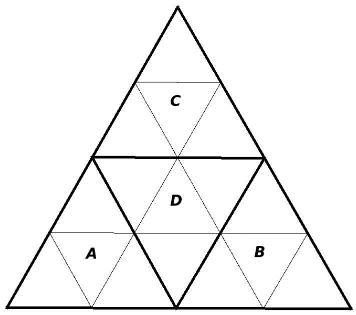
4. Basta probar que LM y AB son paralelas (y entonces, análogamente, MN es paralela a BC, y LN es paralela a AC, así que ABC y LMN son semejantes con lados paralelos, por lo cual las rectas que unen vértices correspondientes concurren). Tracemos las rectas $Q'P$ y PR. Observamos entonces que $\angle Q'PR = \angle R'RP$ pues abarcan el mismo arco. Así, $Q'P$ es paralela a AB y, como L y M son puntos medios de segmentos entre paralelas, también LM es paralela a ellas.

5. Es claro que n no puede ser par. Comprobamos fácilmente que 1 no sirve, 3 sirve y 5 no. Para mayores, como 2, 4, 8 y 16 nos dan todos los residuos no 0 módulo 3 y módulo

5, entonces n debe ser múltiplo de 3 y de 5 (pues, por ejemplo si n no es múltiplo de 5 entonces su residuo no es 0, digamos r así que al sumarle un número con residuo $5 - r$ obtenemos un múltiplo de 5). Directamente comprobamos que 15 sirve pero 45 y 75 no.

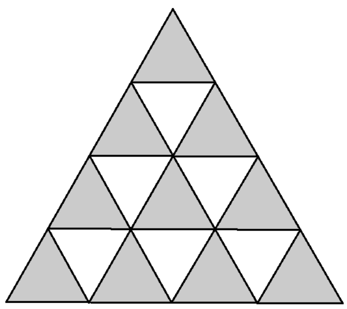
6. Sea O la interseccion de AC con DB. El ángulo $\angle CAB$ es igual al $\angle CDB$ por abarcar el mismo arco CB. Además, $\angle PDB = \angle CAB$, pues ambos suman 90º con el $\angle ABD$. Entonces la línea DB es bisectriz de $\angle XDC$ y, como XC corta en perpendicular, se tiene que $XO = OC$. Se tiene también, análogamente, que $\angle DAC = \angle DBC = \angle CAQ$ (la primera igualdad se da por sustentar la cuerda DC, y la segunda porque el cuadrilátero $ABQO$ es cíclico). Entonces $DO = OY$, pues CA es bisectriz de $\angle DAY$. Entonces XC y DY se cortan en su punto medio y por lo tanto $XYCD$ es paralelogramo, pero como además se cortan en perpendicular, también es rombo.

7. (a) Partamos el triángulo grande en cuatro triángulos (que llamamos subtriángulos), cada uno con 4 triangulitos, y llamemos A, B, C y D a los triangulitos como se indica en la figura.

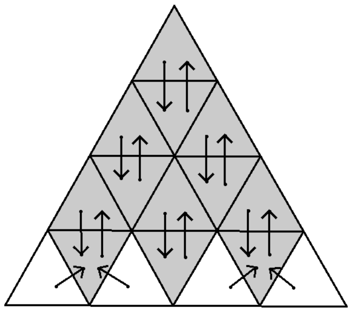


Observamos que después del movimiento de fichas, los triangulitos A, B y C deben quedar llenos pues las fichas que están en los triangulitos de las esquinas deben moverse hacia ellos. Por otro lado, las fichas de A, B, C y D deben haberse movido dentro de su respectivo subtriángulo así que quedan en triangulitos todos distintos entre sí y distintos de los mismos A, B, C y D. De aquí tenemos que por lo menos 7 triangulitos quedan llenos, de donde vemos que el máximo es menor o igual que $16 - 7 = 9$. Vemos que 9 sí es posible con el siguiente esquema de movimientos:

(b) Consideremos el siguiente dibujo:



En él que vemos que hay 10 triangulitos grises y 6 blancos. Como cada ficha debe ir de una casilla gris a una blanca y viceversa, por lo menos deben quedar vacíos $10 - 6 = 4$ triangulitos. Ahora veamos que 4 es el mínimo con el siguiente esquema:



8. En $\frac{5!}{2} = 60$ distribuciones tendrá que moverse. Para ver esto observemos que hay el mismo número de distribuciones en las que el asiento está vacío (y entonces Rocío no se mueve) que en las que Rocío misma está en el asiento de Ana (y entonces Rocío sí se mueve) (que son, en cada caso, 4!). De las restantes, otra hermana debe moverse y, en ese caso, hay la misma cantidad de distribuciones en las que el asiento que le corresponde está vacío (Rocío no se mueve) que en las que Rocío está en su asiento (Rocío se mueve). Así sucesivamente se van partiendo en cantidades iguales las distribuciones en las que Rocío se mueve que en las que no.