Soluciones del examen final estatal de la
24ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. Como $0+1+\cdots+9=45$, que es múltiplo de 9, bastará ver si es posible lograr que un número con todos los dígitos sea múltiplo de 11. Si x es la suma de las cifras pares y y el de las impares, entonces $x-y$ debe ser múltiplo de 11. Como $x+y=45$ es impar, entonces también $x-y$ debe ser impar. Tenemos entonces las dos ecuaciones $x+y=45$ y $x-y=11, 33, \ldots$. Sin embargo también tenemos que $x \leq 9+8+7+6+5=35$, de donde, si $x-y \geq 33$, entonces se tendría $2x \geq 33+45=78$, de donde $x \geq 39$, lo cual ya vimos que es falso. En consecuencia la única posibilidad es $x-y=11$. Entonces, $2x=56$, y de aquí que $x=28$ y $y=17$. Para lograr el número más grande conviene que x tenga a 9, y tenga a 8, etc. Vamos construyendo x y y simultáneamente (cuidando que en la suma de y no nos pasemos de 17) y observamos que lo mejor es

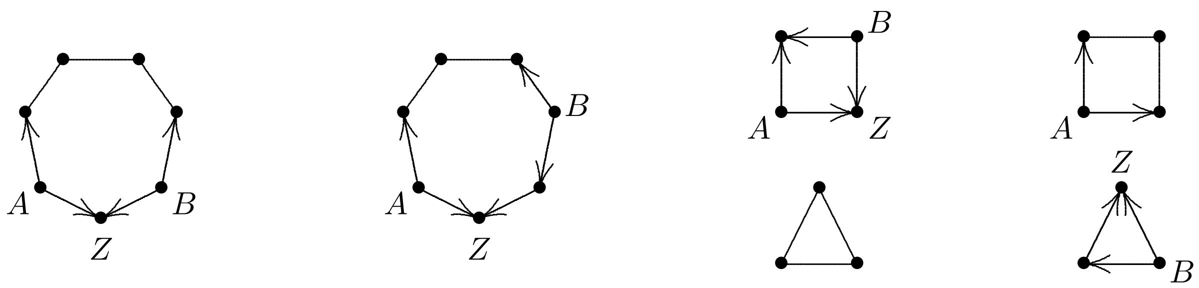
$$x=9+7+5+4+3 \text{ y } y=8+6+2+1+0.$$

El número buscado es 9876524130.

2. Sea r el número de juegos que cada equipo jugó. Entonces el número total de juegos es $\frac{7r}{2}$ así que r debe ser par. Como dos equipos ganaron todos sus juegos, entonces $r \neq 6$.

Primer caso. $r=4$. Si sumamos los juegos que ganaron los equipos, el total coincide con el número de juegos, que es $\frac{7\cdot 4}{2}=14$, pero sabemos que dos equipos ganaron 4 juegos cada uno y otro equipo ganó 3, así que la suma de los juegos ganados por los otros cuatro equipos es $14-(4+4+3)=3$; como son 4 números enteros no negativos con suma 3, alguno de ellos debe ser 0.

Segundo caso. $r=2$. Consideremos la gráfica de juegos en donde los vértices (indicados por • en las figuras) representan los equipos, y una flecha de un vértice a otro significa que el origen de la flecha le ganó al final. Sean A y B equipos que ganaron sus dos juegos. Tenemos esencialmente las siguientes 4 posibilidades, en donde se indica con Z un equipo que forzosamente perdió sus dos juegos.

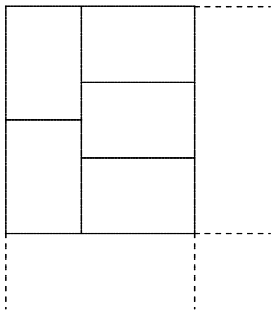


Tercer caso. $r=0$. Éste es imposible porque se sabe que un equipo perdió un juego.

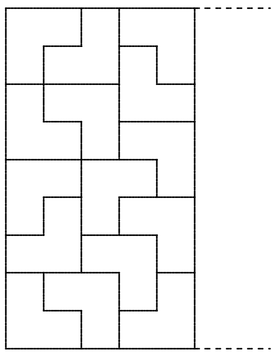
3. Es claro que el papel de a y b es simétrico, así que los trabajaremos en cualquier orden. También observamos que ab debe ser múltiplo de 3 y eso excluye $(35,16)$.

Ahora veamos que $(3,b)$ con b impar es imposible puesto que para que el lado vertical mida 3 sólo hay dos posibilidades de empalmar las fichas a la izquierda del rectángulo como se indica en la figura, y cada una abarca una medida de 2 horizontalmente, lo cual se repetirá hacia la derecha. Esto nos dice que tampoco $(3,41)$ es posible pero que sí lo es $(28,3)$ y, obviamente, repitiendo la construcción en forma vertical, también $(9,60)$.

Ahora veamos que todas las medidas de la forma $(6k,b)$, $b \geq 2$ son posibles. Ya sabemos que se pueden construir rectangulitos de medidas $(2,3)$ y que los de la forma $(3k,b)$ con b par son también son posibles, así que nos faltan los de la forma $(6k,b)$ con b impar mayor o igual que 5. Pero $(6,5)$ es posible como indica la figura y, entonces, agregando a la derecha columnas de 6×2 y hacia abajo repitiendo el patrón, logramos lo pedido. De aquí concluimos que $(35,12)$ es posible.



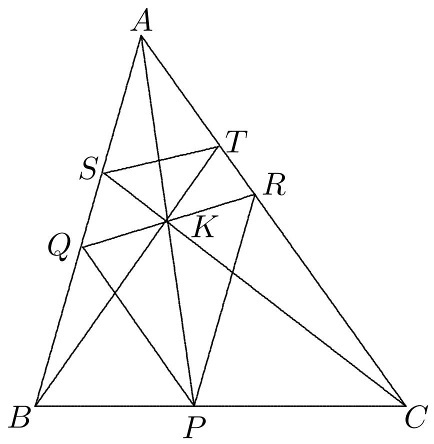
Ahora veamos que $(9,b)$ es posible para cualquier b impar mayor o igual que 5. Como antes, bastará probar que $(9,5)$ es posible. Esto lo indicamos en la siguiente figura.



Agregando franjas de $(6,b)$ con b impar, $b \geq 5$, obtenemos todas las medidas de la forma $(3k,b)$ con $k \geq 3$ y $b \geq 5$ impar, de donde deducimos que $(33,43)$ es posible.

(En resumen, los únicos imposibles son los de la forma $(3,b)$ con b impar y los (a,b) con ab no múltiplo de 3.)

4. El dibujo es como sigue:



Como $AQPR$ es paralelogramo, entonces K es punto medio de AP y de QR. Veamos que ST paralela a BC implica que P es punto medio de BC. Aquí podemos proceder de las siguientes formas.

Primera forma. Sea H la interseccin de ST con AP. Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\frac{PC}{HS} = \frac{KC}{KS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AB}{SA} = \frac{BP}{HS},$$

debidas, respectivamente, a las semejanzas de triángulos siguientes:

$$SHK \sim CPK, \quad KST \sim KCB, \quad AST \sim ABC \quad BPA \sim SHA,$$

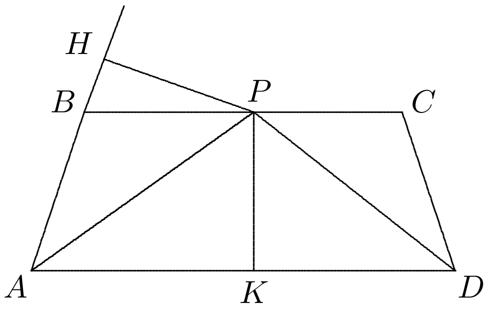
y entonces $PC = BP$, así que P es punto medio de BC, como queríamos probar. Entonces, por definición de Q y R, éstos son los puntos medios de los lados de ABC y de aquí que QR es paralela a BC.

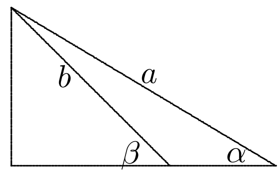
Segunda forma. Aplicamos el teorema de Ceva a las cevianas concurrentes AP, BT y CS para obtener

$$(*) \quad \frac{AS}{SB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CT}{TA} = 1.$$

Pero los triángulos AST y ABC son semejantes, así que $\frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC}$ y entonces, usando esto en $(*)$, podemos concluir que $\frac{BP}{PC} = 1$, de donde $BP = PC$, como habíamos afirmado. Al igual que en la primera demostración, esto implica que QR es paralela a BC.

5. *Primera forma.* Prolonguemos AB como se indica en la figura y sea H el pie de la perpendicular de P a esa recta. Sea K el pie de la perpendicular de P sobre AD. Entonces $PH = PK$ (pues los triángulos PAH y PAK son iguales). Observemos que $\angle HBC = \angle BAD = \angle CDA$. Entonces PHB y PKD son triángulos rectángulos con un cateto igual y el ángulo opuesto a ese cateto en PDK es menor o igual que el opuesto al cateto correspondiente en PBH, así que la hipotenusa BP en PBH es menor o igual que la hipotenusa PD de PDK (ver figura).





$\alpha \leq \beta \Rightarrow b \leq a$

Segunda forma. Tenemos que $\angle BPC = \angle PAD = \angle BAP$, así que el triángulo ABP es isósceles y así $BP = AB = CD \leq PD$ (la última desigualdad porque el ángulo en C es mayor o igual que 90^o).

6. Sea $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$; entonces, bajo la división entre 3, en A hay 3 elementos con residuo 0, 3 con residuo 1 y 3 con residuo 2. Digamos que A se parte en los conjuntos U, V y W. La suma de todos los elementos de A es 45, que es múltiplo de 3, así que las sumas de los elementos de cada uno de U, V y W deben tener respectivos residuos $1, 1, 1$ o $2, 2, 2$ (cualquier otra combinación de residuos no 0 sumaría un residuo no múltiplo de 3, por ejemplo $1 + 2 + 1 = 4$).

En el primer caso (cuando las sumas en U, V y W todas tienen residuo 1), para que la suma de los elementos de cada conjunto tenga residuo 1, los elementos en cada conjunto tienen tres posibilidades de residuos: $\{0, 0, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$ o $\{2, 2, 0\}$; sin embargo, como sólo hay tres elementos en total con cada residuo, tenemos que cada una de estas posibilidades debe aparecer en exactamente uno de U, V y W (es decir, no alcanzarían los elementos de A para que, por ejemplo los residuos de los elementos de U y de V fueran, en ambos, $1, 1, 2$). Para contar el número de formas de hacer la distribución, basta escoger el número de A de residuo 0 que va junto con los de residuo 2 (hay 3 posibilidades), el número de A de residuo 1 que va junto con los de residuo 0 (otras 3 posibilidades), y el de residuo 2 que va junto con los dos de residuo 1 (también 3 posibilidades). En total en este caso las posibilidades son $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

En el segundo caso (cuando las sumas en U, V y W todas tienen residuo 2), para que la suma de los elementos de cada conjunto tenga residuo 2, los elementos en cada conjunto tienen tres posibilidades de residuos: $\{1, 1, 0\}$, $\{2, 2, 1\}$ o $\{0, 0, 2\}$. Al igual que en el caso anterior, el número total de posibilidades es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

El total es $27 + 27 = 54$.

7. Sean (a, b) las dimensiones de los rectángulos pedidos. Entonces en la orilla hay $2a + 2b$ segmentos; para contar los segmentos interiores observemos que en cada $\bullet$ no alineado con los de las orillas pasan 4 segmentos y así se cuentan todos. Entonces buscamos (a, b) parejas de enteros tales que

$$4ab + 2a + 2b = 134, \text{ equivalentemente, } 2ab + a + b = 67, \quad \text{o} \quad b(2a + 1) + a = 67.$$

Aquí podemos prceder de dos formas.

Primera forma: El papel de a y b es simétrico así que, sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \leq b$. Tenemos que $a \leq b = \frac{67-a}{2a+1}$, así que $2a^2 + a \leq 67 - a$, de donde $a(a+1) \leq \frac{67}{2}$, pero $a^2 \leq a(a+1)$, así que $a \leq \sqrt{\frac{67}{2}}$ y de aquí que $a \leq 5$. Entonces buscamos para qué valores de a, con $1 \leq a \leq 5$, se tiene que $\frac{67-a}{2a+1}$ es entero y esto es fácil y nos da los posibles valores de (a, b) (con $a \leq b$) siguientes: $(1, 22)$, $(2, 13)$ y $(4, 7)$. Es fácil darse cuenta que los rectángulos con cualesquiera de las dimensiones mencionadas tienen 134 segmentos.

Segunda forma. Usamos congruencias. Tenemos que $a \equiv 67 \pmod{2\mathrm{a}+1}$ y, como 2 es primo relativo con $2a+1$, la congruencia es equivalente a $2a \equiv 134 \pmod{2\mathrm{a}+1}$, pero $2a \equiv -1 \pmod{2\mathrm{a}+1}$, así que $-1 \equiv 134 \pmod{2\mathrm{a}+1}$ o, equivalentemente, $135 \equiv 0 \pmod{2\mathrm{a}+1}$; esto nos dice que $2a+1$ es divisor de 135, así que $2a+1 = 3, 5, 9, 15, 27, 45$, de donde $a = 1, 2, 4, 7, 13, 22$. Los valores respectivos de b son: $22, 13, 7, 4, 2, 1$, así que, $\{a, b\} = \{1, 22\}, \{2, 13\}$ o $\{4, 7\}$, como vimos también arriba.

8. Para $k = 1, 2, \ldots$ llamemos a_k al número de formas de escribir k como suma de impares. Queremos calcular a_{16}.

Primera forma: Observemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y que podemos determinar los a_k a través de los a_l para $l < k$ como sigue: Para escribir k como suma de impares, el primer sumando puede ser 1, y la cantidad de posibilidades con esta condición es a_{k-1}; si empezamos con 3, entonces la cantidad es a_{k-3} y así sucesivamente hasta poder empezar con el mismo k cuando éste es impar y esto nos da una forma más. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 1, \\
a_3 &= a_2 + 1 = 1 + 1 = 2, \\
a_4 &= a_3 + a_1 = 2 + 1 = 3, \\
a_5 &= a_4 + a_2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5, \\
a_6 &= a_5 + a_3 + a_1 = 5 + 2 + 1 = 8, \\
a_7 &= a_6 + a_4 + a_2 + 1 = 8 + 3 + 1 + 1 = 13, \\
a_8 &= a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = 13 + 5 + 2 + 1 = 21, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observamos aquí también que para $k \geq 3$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ y entonces es fácil construir la lista de los a_k hasta a_{16}:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987)$$

La respuesta es 987.

Segunda forma: Calculemos a_{16} separando en los casos del número de sumandos. Como 16 es par y los sumandos son impares, el número de sumandos debe ser par. Con dos sumandos es claro que hay 8 posibilidades. Supongamos que a, b, c, d son enteros positivos impares con suma 16. Entonces $a-1, b-1, c-1, d-1$ son enteros no negativos pares cuya suma es 12 y $\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}, \frac{c-1}{2}, \frac{d-1}{2}$ son enteros no negativos cuya suma es 6. Recíprocamente, dados 4 enteros no negativos con suma 6 el procedimiento inverso nos lleva a 4 sumandos positivos impares con suma 16. Entonces la cantidad de formas de escribir 16 como suma de 4 impares es la misma que la de escribir 6 como suma de 4 enteros mayores o iguales que 0 y esto es $\binom{6+(4-1)}{4-1} = \binom{9}{3}$ (para ver esto pongamos $6+3=9$ casillas $(-)$ en las que se ponen 3 separadores $(+)$; las casillas que quedan entre los separadores nos dicen los sumandos; por ejemplo, la suma $1+0+4+1$ se representa por $- + + - - - - + -$). De manera análoga, las formas de escribir 16 con 6 sumandos impares es la misma que la de escribir 10 con sumandos pares no negativos y ésta es la misma que la de escribir 5 con 6 sumandos no negativos, lo cual es $\binom{5+(6-1)}{6-1} = \binom{10}{5}$. Esto lo repetimos con 8, 10, 12, 14 y 16 sumandos. El total es

$$\begin{aligned}
&\binom{8}{1}+\binom{9}{3}+\binom{10}{5}+\binom{11}{7}+\binom{12}{9}+\binom{13}{11}+\binom{14}{13}+\binom{15}{15}\\
=&8+\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}+\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2}+\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2}+\frac{13\cdot 12}{2}+14+1\\
=&8+3\cdot 4\cdot 7+10\cdot 9\cdot 4\cdot 7+2\cdot 11\cdot 10\cdot 3+12\cdot 11\cdot 10+13\cdot 6+14+1\\
=&8+84+252+330+220+78+14+1=987.
\end{aligned}$$