Soluciones del examen final estatal de la
25ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

1. En el momento en que cada equipo ha jugado a lo más 3 juegos, se tiene que el número de partidos jugados es menor o igual a $\frac{7\cdot 3}{2}$, así que es 10 a lo más. Por otro lado, el número total de partidos al finalizar el torneo es de 21, lo cual dice que faltaban al menos 11 partidos por jugar. Si a cada equipo le faltaran 3 a lo más, entonces el mismo razonamiento que arriba nos llevaría a que faltarían a lo más 10 juegos.

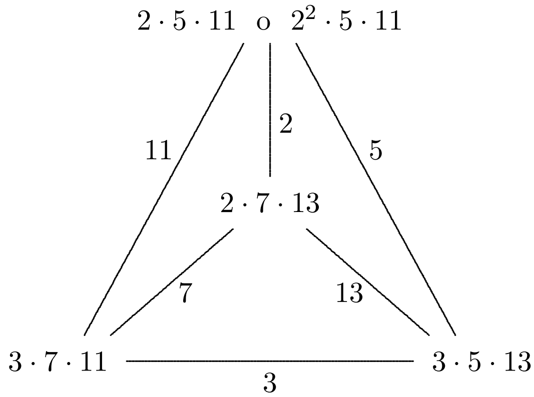
2. Al pasar el primer año ha llovido exactamente los días con número de la forma $5k+2$ y de la forma $5k$. Entonces los últimos días del año con lluvia son el 97 y el 100. El residuo de dividir $97+5=102$ entre 101 es 1 y de dividir $100+5$ entre 101 es 4, de donde ese segundo año lloverá todos los días con número de la forma $5k+1$ y $5k+4$, y los últimos días de lluvia de ese año serán el 99 y el 101. Ahora, los respectivos residuos de la división entre 101 de $99+5=104$ y de $101+5=106$ son 3 y 5, de donde el tercer año lloverá los días con número de la forma $5k+3$ y $5k$, de donde los últimos días del terecer año son el 98 y el 100. De la misma manera el cuarto año lloverá los días con número de la forma $5k+2$ y $5k+4$ y los últimos días son 97 y 99. El quinto año tocará lluvia en los días de la forma $5k+1$ y $5k+3$. Entonces al terminar el quinto año ya habra llovido exactamente dos veces cada día.

3. *Primera solución.* $EPG \sim CPA$ y $FQH \sim DQB$ $(*)$. Además $|EG|=|FH|$ y $|AC|=|BD|$ $(**)$. Sean h_1 la altura de EPG desde P, h_2 la altura de CPA desde P, h_3 la altura de FQH desde Q y h_4 la altura de DQB desde Q. Por $(*)$, $h_1/h_2=|EG|/|AC|$ y $h_3/h_4=|FH|/|BD|$. Por $(**)$, $h_3/h_4=|EG|/|AC|=h_1/h_2$. Por lo tanto PQ es paralela a l y a m.

Segunda solución. Sea r la paralela a l que pasa por P y sea Q' la intersección de r con BH. Notemos que tenemos varias igualdades de áreas: $(ABQ'P)=(CDQ'P)$, $(EFQ'P)=(GHQ'P)$ $(*)$ y $(ABHG)=(CDFE)$ $(**)$. Por $(*)$ se tiene que $(CDFE)=(EFQ'P)+(CDQ'P)\pm(DQ'F)=(GHQ'P)+(ABQ'P)\pm(DQ'F)=(ABHG)\pm(DQ'F)$. Así, por $(**)$, $(ABHG)\pm(DQ'F)=(CDFE)\pm(DQ'F)$. Entonces tenemos que $(CDFE)=(CDFE)\pm(DQ'F)$. Por lo tanto $(DQ'F)=0$ y entonces Q' está en DF y, como estaba en DH, entonces $Q'=Q$.

4. Supongamos que A es un conjunto de los pedidos. Como $\binom{4}{2}=6$, los máximo común divisores de las parejas de elementos de A deben ser 6 primos distintos. Cada número se compara con otros 3 del mismo conjunto así que cada número debe tener entre sus factores a 3 primos, al menos. Si 17 fuera uno de los máximo común divisores, entonces lo menos que podrían ser los números son $2\cdot 7\cdot 17$ y $3\cdot 5\cdot 17=255$. Entonces los números deben formarse con productos de 3 o más de los primos $2,3,5,7,11,13$. Observemos que ningún número puede tener como factores a ambos 11 y 13 pues lo menos que podría ser es $2\cdot 11\cdot 13=286>250$. También tenemos que $13\cdot 7\cdot 5>250$, así que la única posibilidad es de que 13 sea uno de los máximo común divisores es con los números $2\cdot 7\cdot 13=182$ y $3\cdot 5\cdot 13=195$. Como también $11\cdot 5\cdot 7>250$ y no es posible volver a poner juntos al 2 y al 7 ni tampoco al 3 y al 5, la única posibilidad es que los números de los cuales 11 es máximo común divisor son $2\cdot 5\cdot 11=110$ (o $2^2\cdot 5\cdot 11=220$ y $3\cdot 7\cdot 11=231$. Entonces sólo

hay dos conjuntos con las características pedidas y son $\{110, 182, 195, 231\}$ y $\{220, 182, 195, 231\}$. El esquema es:



5. *Primera forma.* Probaremos que para n fija, todo impar positivo menor o igual que 2^{n+1} se puede lograr. Queremos conseguir todos los impares del 1 al 15 en la forma $a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$. Para ver cómo proceder en el caso general, analicemos el ejemplo de $n = 3$.

$$\begin{aligned}
+1+2+4+8 &= 15\\
-1+2+4+8 &= 13\\
+1-2+4+8 &= 11\\
-1-2+4+8 &= 9\\
+1+2-4+8 &= 7\\
-1+2-4+8 &= 5\\
+1-2-4+8 &= 3\\
-1-2-4+8 &= 1
\end{aligned}$$

Lo que se hace es, empezando por $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$ se va reduciendo cada vez en 2 la suma que se tiene y eso se logra utilizando que para toda k, $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Entonces se busca la primera potencia de 2 que tenga signo positivo y se cambian de signo ella y todas las anteriores (por ejemplo, si 1 tenía signo positivo en un paso, entonces en el siguiente se cambia sólo ese signo; si 1 tenía signo negativo y 2 positivo, entonces se cambian los signos de los dos; si 1 y 2 tenían signos negativos pero 4 era positivo, entonces se cambian los signos de los tres y así sucesivamente); se hace esto hasta llegar a $-1 - 2^2 - \cdots - 2^{n-2} + 2^{n-1}$ que es igual a 1.

Segunda forma. Lo que se hizo en la primera demostración se puede también poner de manera formal usando inducción matemática (y empezando a partir de la expresión que nos da 1), como sigue:

Base de inducción: Notemos que

$$1 = -1 - 2 - 2^2 - ... - 2^{n-1} + 2^n.$$

Hipótesis de Inducción: Supongamos que para cierta k tenemos que

$$2k - 1 = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$$

y que no todas las a_i son positivas.

Probaremos entonces que podemos escribir $2k + 1$ de esta forma. Sea a_k el primer coeficiente negativo (es decir, si $i < k$ se tiene que $a_i = 1$). Notemos entonces que:

$$2k + 1 = -1 - 2 - 2^2 - \cdots - 2^{k-1} + 2^k + a_{k-1} + \cdots + a_n \cdot 2^n$$

Tercera forma. Para n fija, el número de expresiones de la forma pedida es 2^{n+1} pues cada uno de los a_i tiene 2 posibilidades y son $n+1$ a_i's; la mitad de las expresiones son positivas y la otra mitad son negativas y de aquí vemos que son 2^n expresiones que resultan en un número positivo. También observemos que cualquiera de las expresiones produce un número impar pues a_0 es 1 o -1 y los demás términos son pares. Como hay 2^n números impares menores que $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, bastará ver que todas son distintas. Supongamos que tenemos dos expresiones distintas

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \cdots + b_n \cdot 2^n$$

que producen el mismo número impar r y sea k el mayor índice tal que $a_k \neq b_k$; sin pérdida de generalidad $a_k = -1$ y $b_k = 1$. Pero entonces, al cancelar los términos iguales, del lado izquierdo queda un número negativo y del derecho queda un número positivo, lo cual es una contradicción.

6. Usando la potencia de X a los círculos tenemos que $XA \cdot XD = XP \cdot XQ = XB \cdot XC$. De aquí concluimos que $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico; pero entonces la potencia de Y a ese círculo es precisamente la igualdad que se pide demostrar.

7. Sea k el número de desagües (y recipientes) escogidos. Primero observemos por cada desagüe saldrán $\frac{100}{k}$ litros de agua. Por lo tanto, un recipiente de capacidad c se llenará sí y sólo sí $c \leq \frac{100}{k}$. Puesto que las capacidades de los recipientes son diferentes, a fuerzas deberá haber por lo menos un recipiente cuya capacidad esté por arriba del promedio; además todos los recipientes que tengan capacidad por encima del promedio no se llenarán. Entonces lo mejor es cuando sólo hay un recipiente con capacidad por encima del promedio y éste tiene la menor capacidad posible.

Comparemos los distintos casos para el número k de recipientes y llamemos $S(k)$ a la cantidad de agua que se conserva. En cada caso, tomamos todas las posibilidades de los mayores $k-1$ números que son distintos y menores o iguales que $\frac{100}{k}$; el otro número es lo necesario para sumar los 100 litros:

Si $k = 2$, con capacidades 49 y 51 se obtiene $S(2) = 49$.
Si $k = 3$, con capacidades 32, 33 y 35 se obtiene $S(3) = 65$.
Si $k = 4$, con capacidades 23, 24, 25 y 28 se obtiene $S(4) = 72$.
Si $k = 5$, con capacidades 17, 18, 19, 20, 26 se obtiene $S(5) = 74$.
Si $k = 6$, con capacidades 12, 13, 14, 15, 16, 30 se obtiene $S(6) = 70$.
Así pues, $k = 5$ es el óptimo, y las capacidades de los recipientes serán 17, 28, 29, 20 y 26.

8. Pongamos coordenadas a los puntos de manera que $A = (0, 0)$ y $B = (4, 4)$. El camino debe tener longitud par (pues las sumas de las coordenadas de A y de B ambas son pares y cada segmento alterna suma par con impar; o, de otra manera, pensando que el camino que va primero todo por abajo y luego hacia arriba tiene longitud 8 que es par; cualquier cosa que haga hacia la izquierda otro camino debe recuperarla hacia la derecha y lo mismo verticalmente). En los vértices de la orilla, salvo en A y en B, se usan a lo más dos segmentos; en A y en B se usa uno. Entonces la suma de los segmentos que se usan es, a lo más, $\frac{1(2)+2(14)+4(9)}{2} = 33$ (esto es porque hay 14 vértices en la orilla distintos de A y B, y hay 9 centrales; la división entre 2 es porque al contar los segmentos que llegan a cada vértice, cada segmento se cuenta dos veces porque tiene dos extremos). Como ya dijimos que la longitud debe ser par, tenemos que a lo más es 32. Para ver que con 32 sí se puede construyamos el camino como sigue, llamando ab al punto de coordenadas a, b:

$$00, 10, 11, 01, 02, 12, 22, 21, 11, 12, 13, 14, 04, 03, 13, 23,$$

$$24, 34, 33, 32, 31, 21, 20, 30, 40, 41, 42, 32, 22, 23, 33, 43, 44.$$