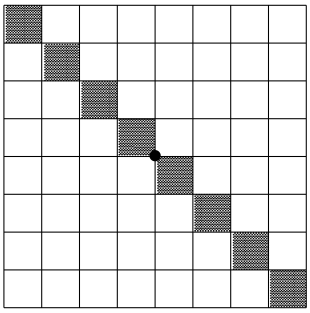
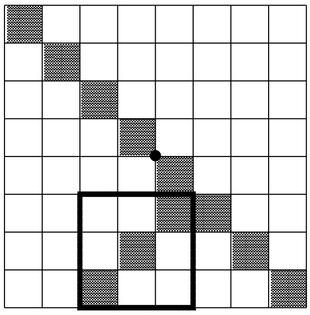
26ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
FINAL ESTATAL 2012, Soluciones

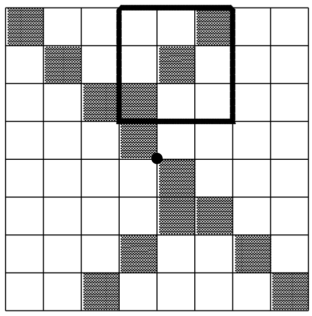
1. Veamos que A puede asegurar su triunfo. En su primer turno A escoge $m = n$ y pinta todos los cuadritos de una de las diagonales. Después de que B juegue, A sólo refleja la jugada de B con respecto al centro del cuadrado de $n \times n$ (ver ilustración abajo). Claramente A siempre podrá hacer esto puesto que B no puede escoger una subcuadrícula con cuadritos ya pintados (es decir, B se ve obligado a tirar en uno de los dos lados que determinó A en su primer turno). Por lo tanto, si B puede pintar cuadritos en su turno, entonces también puede hacerlo A y así, el primero en no poder pintar cuadritos es B.



jugada de A, $m = n = 8$



jugada de B, $m = 3$



jugada de A, $m = 3$

2. La respuesta es no. Toda recta que pasa por A y un punto interior del triángulo divide a este en dos triángulos, y la única recta con la propiedad de que estos tengan la misma área es la mediana. Como esto mismo sucede con los otros dos vértices, concluimos que el único candidato para ser el punto P es el centroide G del triángulo. Sin embargo podemos ver que la recta paralela a BC que pasa por G no divide al triángulo en dos figuras de igual área. En efecto, sean R y S los puntos de intersección de esta recta con AC y AB, respectivamente y sea D el punto medio de BC; para un triángulo XYZ, denotemos por (XYZ) su área. Entonces

$$\frac{(ASR)}{(ABC)} = \left(\frac{AG}{AD}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{1}{2}.$$

3. Primero observemos que la máxima suma que se logra con dos números es $10 + 11 = 21$; de aquí que los montones deben tener tamaños $3, 4, 4$ o $3, 3, 5$. Como la tarjeta con el 2 no puede estar en el mismo montón que otra par, y la suma 22 es par, entonces 2 debe estar en un montón con 2 impares o con 4 impares.

Primer caso. La tarjeta 2 con dos impares. La única posibilidad de que las otras dos sumen 20 es con 9 y 11. Ahora, como 3 y 6 no pueden estar juntas y lo mismo ocurre con 5 y 10, tenemos dos posibilidades: 6 y 10 juntas (y entonces 3 y 5 juntas en el otro montón) o 5 y 6 juntas (y entonces 3 y 10 juntas en el otro montón). Las tarjetas que pueden combinarse con ellas son las restantes: 1, 4, 7, 8. En el primer caso, en el montón de 6 y 10 faltaría agregar tarjetas que sumaran 6, lo cual es imposible con las que están disponibles. En el segundo caso, cuando 5 y 6 están juntas, en su montón falta agregar tarjetas que sumen 11 y esto sólo puede lograrse con 4 y 7. Concluimos entonces que una posibilidad de distribución es $\{2, 9, 11\}$, $\{1, 3, 8, 10\}$ y $\{4, 5, 6, 7\}$.

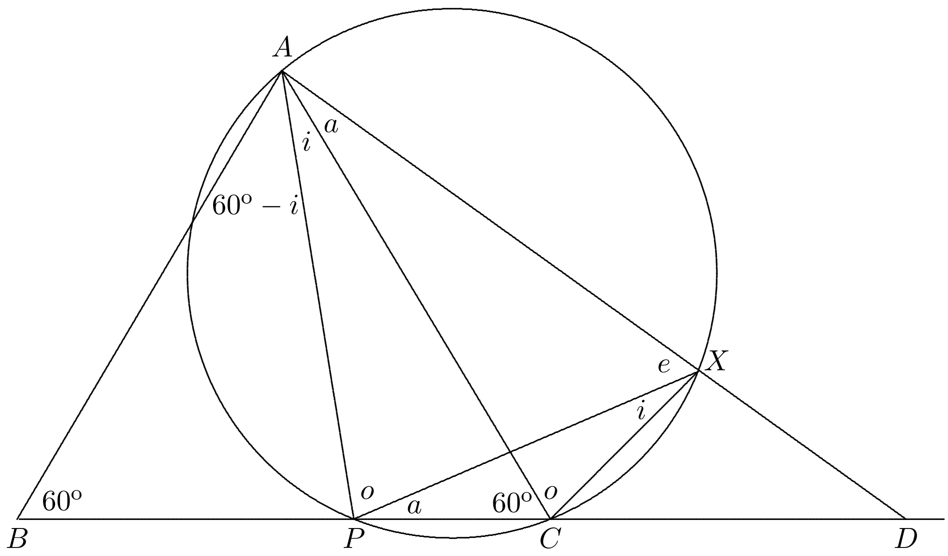
Segundo caso. La tarjeta 2 está en un montón con 4 impares. Queremos lograr suma 20 con 4 de los números 1, 3, 5, 7, 9 y 11. Es claro que no pueden usarse simultáneamente 9 y 11 y también, por las condiciones del problema, no pueden quedar juntas 3 y 9. Además, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ así que forzosamente una de 9 u 11 debe usarse. La única posibilidad es poniendo las tarjetas 1, 3, 5 y 11 con la número 2. Ahora sobran las tarjetas 4, 6, 7, 8, 9 y 10 y éstas deben distribuirse en dos montones; en esta colección hay dos impares y, como la suma 22 es par, 7 y 9 deben quedar en el mismo montón; la que se necesita para completar los 22 con ellas es la tarjeta 6. Concluimos entonces que la otra posibilidad de distribución es $\{1, 2, 3, 5, 11\}$, $\{6, 7, 9\}$ y $\{4, 8, 10\}$.

4. En base a una manipulación algebraica obtenemos la expresión $a^3b^2 - a^3 - b^2 + 1 = pa^3$ que es equivalente a $(a^3 - 1)(b^2 - 1) = pa^3$. Por lo anterior, $a^3 - 1$ es un factor de pa^3; pero $a^3 - 1$ y a^3 no pueden tener factores en común mayores que 1, así que $a^3 - 1$ es divisor de p; luego, como p es primo, tenemos que $a^3 - 1 = 1$ o $a^3 - 1 = p$. En el primer caso no hay solución entera, por lo tanto debe ocurrir la igualdad $a^3 - 1 = p$, que es equivalente $(a - 1)(a^2 + a + 1) = p$, pero de nuevo, por ser p primo, tenemos que $a - 1 = 1$ puesto que $a - 1 < a^2 + a + 1$; entonces $a = 2$ y $p = 7$. En este caso $b = 3$.

5. Como la suma tiene que ser igual, entonces es $1/5$ de $1 + 2 + \cdots + 25 = 325$, es decir, es 65. Para completar las filas y columnas que ya están, se necesitan seis parejas que sumen 38 (pues las que ya tienen números todas suman 27), pero las parejas que suman 38 son (25,13), (24,14), (23,15), (22,16), (21,17) y (20,18), de las cuales ya sólo se pueden usar tres porque 13, 15 y 17 ya fueron usados y no deben repetirse números.

6. La ecuación es equivalente a $(a - 1)!(b - 1)! = ab$. Observemos que para $x = 1$ se tiene que $(x - 1)! = 1$, así que una solución es $a = 1$ y $b = 1$. Supongamos ahora que $2 \leq a \leq b$ y observemos que si $2 \leq x \leq 3$ entonces $(x - 1)! < x$, mientras que si $x > 3$ entonces $(x - 1)! > x$ pues $(x - 1)! > (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2 \geq 4x - 3x + 2 = x + 2 > x$. De aquí tenemos $a \leq 3$ (o sea, $a = 2$ o $a = 3$) y $b \geq 4$. Analicemos en qué se convierte la ecuación para los distintos valores de a:
Para $a = 2$, la ecuación queda $(b-1)! = 2b$; ésta no tiene solución pues si $b = 4$ entonces $(b-1)! = 6$ y $2b = 8$, y para $b \geq 5$ se tiene que $\frac{1}{2}(b-1)! \geq \frac{1}{2}(b-1)(b-2) = \frac{1}{2}(b^2-3b+2) \geq \frac{1}{2}(5b-3b+2) = b+1 > b$.
Para $a = 3$, la ecuación es $2(b - 1)! = 3b$, que tiene por única solución a $b = 4$ pues para $b \geq 5$, $\frac{2}{3}(b - 1)! > \frac{1}{2}(b - 1)!$ que, como vimos arriba, es mayor que b.
Entonces las únicas parejas (a, b) que cumplen la igualdad son $(1, 1)$ y $(3, 4)$.

7. Usando que ángulos que abarcan el mismo arco en un círculo son iguales y que el triángulo ABC es equilátero (sus ángulos miden 60^o), consideremos los ángulos marcados en la figura.



Queremos entonces probar que $o = e + i$, pues esto nos dirá que el triángulo AXC es isósceles y así $AX = AC$.
Por ser AP bisectriz, tenemos que $60^o - i = i + a$, de donde

$$i = 30^o - \frac{a}{2}. \tag{1}$$

Por ser $APCX$ cíclico, ángulos opuestos suman 180^o, lo cual nos da las dos ecuaciones:

$$o + a + e + i = 180^o, \tag{2}$$

$$i + a + 60^o + o = 180^o, \tag{3}$$

y estas dos nos dicen que

$$e = 60^o. \tag{4}$$

Por otro lado, sustituyendo en (2) los valores encontrados de i y e en (1) y (4) obtenemos

$$o + a + 60^o + 30^o - \frac{a}{2} = 180^o,$$

la cual es equivalente a

$$o + \frac{a}{2} = 90^o. \tag{5}$$

Finalmente,

$$o \underset{(5)}{=} 90^o - \frac{a}{2} \underset{(1)}{=} 60^o + i \underset{(4)}{=} e + i,$$

que era lo que queríamos demostrar.

8. Podemos trabajar más en general con $n = 20$. Numeremos los vértices de $\mathcal{P}$ en forma consecutiva: $1, 2, \dots, n$. Veamos dos formas distintas de proceder:

Primera forma. Contemos los triángulos que tienen por vértice al que lleva el número 1, y sean $a < b$ los otros vértices. Si $a = 3$, entonces b se puede escoger de $n - 5$ formas (del 5 al $n - 1$); si $a = 4$, entonces b se puede escoger de $n - 6$ formas (del 6 al $n - 1$), etc. (la última posibilidad es $a = n - 3$ y entonces b sólo tiene $1 = n - (n - 1)$ posibilidad (b debe ser igual a $n - 1$). Entonces, los triángulos que tienen al 1 son: $(n-5)+(n-6)+\cdots+1 = \frac{(n-4)(n-5)}{2}$. Hacemos esto para cada uno de los vértices multiplicando por n y entonces debemos dividir entre 3 porque cada triángulo se cuenta tres veces (una por cada vértice). El resultado general es

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

En el caso particular de $n = 20$ tenemos que el resultado es $\frac{20 \cdot 16 \cdot 15}{6} = 800$.

Segunda forma. Buscamos ternas (a, b, c) de elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ de manera que $a+1 < b$, $b+1 < c$ y $(a, c) \neq (1, n)$. Sin considerar la última condición tenemos $\binom{n-2}{3}$ posibilidades puesto que esto nos cuenta las formas de escoger números $a' < b' < c'$ dentro de $\{1, 2, \dots, n-2\}$, y una elección de éstos determina la de a, b, c (y recíprocamente) haciendo $a' = a$, $b' + 1 = b$ y $c' + 2 = c$. Ahora sólo tenemos que restar las ternas en que aparecen juntos 1 y n; éstas son $n - 4$ (pues el otro vértice debe ser uno de $3, 4, \dots, n-2$). Entonces la fórmula que nos cuenta el número de triángulos es

$$\binom{n-2}{3} - (n-4).$$

Para $n = 20$ tenemos el resultado: $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} - 16 = 800$.