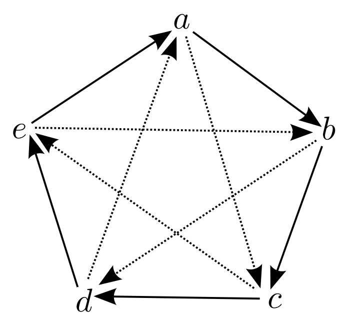
Soluciones de la Etapa Final Estatal de la
27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2013

1. Cinco equipos. Esto ocurrirá si, por ejemplo, 4 de los equipos ganan todos sus juegos contra los otros 5 (obteniendo así, al menos 5 puntos cada uno), y entre los 5 restantes cada uno gana 2 juegos (esto es posible si, digamos que son a, b, c, d y e y cada uno gana al que le sigue en las listas a, b, c, d, e, a y a, c, e, b, d, a (que son los 10 juegos posibles entre ellos).



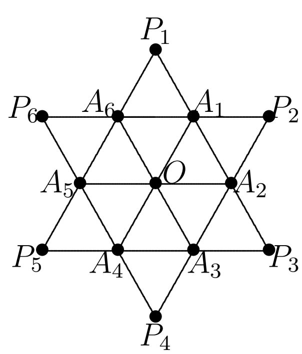
Sin embargo no es posible que 6 equipos sean eliminados pues esto querría decir que, aunque hubieran perdido todos los juegos contra los otros 3, al jugar entre ellos sólo habrían obtenido 12 puntos de los $\binom{6}{2} = 15$ posibles, pues cada juego otorga un punto.

2. Reescribamos la ecuación en la forma $3p = q(2p - 7r - 5)$. De aquí tenemos que q es un factor de $3p$ y, como es primo y también lo es p, hay sólo dos posibilidades: $q = 3$ o $q = p$.

Caso 1. Si $q = 3$ entonces $p = 2p - 7r - 5$, así que $p = 7r + 5$; observemos aquí que r no puede ser impar porque entonces p sería par y mayor que 2, lo cual es imposible porque es primo. Entonces $r = 2$ y tenemos una solución: $(p, q, r) = (19, 3, 2)$.

Caso 2. Si $q = p$ entonces $3 = 2p - 7r - 5$, es decir $2p - 8 = 7r$, lo cual implica que r es par y, como es primo, $r = 2$. Tenemos entonces la solución $(p, q, r) = (11, 11, 2)$.

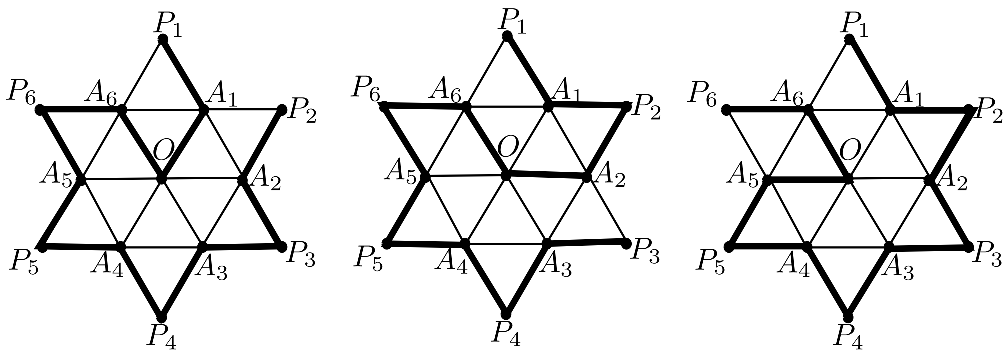
3. Nombremos los puntos como se indica:



Observemos que los puntos de la forma A_i deben ser todos intermedios en el camino, pues si, por ejemplo, el camino empezara por A_1, entonces debería terminar en alguno de P_1 o P_2; pero el que pasara por todos los otros P_i implicaría que usaría los dos segmentos que contienen a cada P_i y entonces no pasaría por O.

Supongamos que el camino empieza en alguno de los P_i (hay 6 posibilidades); tiene dos posibilidades para continuar (los dos segmentos que contienen a P_i). Digamos, sin pérdida de generalidad, que empieza en P_1 y que va hacia A_1. Tenemos dos casos:

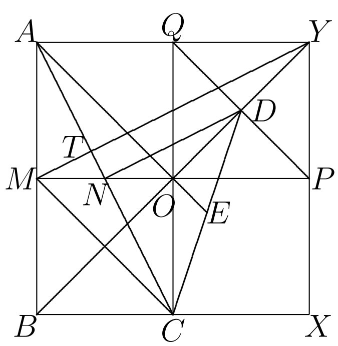
Primer caso. Que termine en otro punto de la forma P_j (hay 5 posibilidades). Una vez elegido P_j (que puede ser cualquiera de los puntos) el camino queda determinado pues debe usar el segmento A_{j-1} para entrar a O, después de haber pasado por todos los picos que están entre P_1 y P_j; luego debe irse hacia P_6 y, si $j \neq 6$, continuar de regreso. En la ilustración abajo se muestran los casos $j = 2$, $j = 3$ y $j = 6$.



Segundo caso. Que termine en O. En este caso, el camino debe recorrer primero todos los P_i, así que el camino queda determinado con la elección de P_1A_1 del principio. Falta también considerar los caminos inversos de estos últimos, es decir, los caminos que empiezan en O (y terminan en algún P_i).

En total, el número de formas de escoger caminos que empiecen y terminen en dos puntos de la forma P_i es $6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ (6 por la elección del punto inicial, 5 por la del punto final y 2 por la elección de hacia donde salir a partir del punto inicial). El segundo caso nos da $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ posibilidades (6 representa la elección del punto P_i, el primer 2 es la dirección que se toma a partir de ese punto y el segundo 2 es por la inversión del camino). El total de caminos es 84.

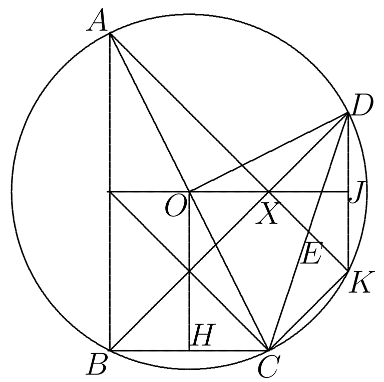
4. *Primera forma.* Construyamos el cuadrado que se muestra en la figura; llamamos O a su centro y digamos que los puntos medios de los lados son M, C, P y Q (aquí usamos que $2|BC| = |AB|$). Sea N el punto medio de MO y notemos que, otra vez, puesto que $2|BC| = |AB|$, N está sobre AC. Ahora notemos que D es la intersección de la perpendicular a AC por N (esto en vista de que $|DA| = |DC|$) con la diagonal BY del cuadrado (pues ésta es la bisectriz de $\angle B$).



Como también MY es perpendicular a AC (porque $\angle MAN = \angle AYM$ y $\angle MAN +$

$\angle NAY = 90^o$, de donde $\angle AYM + \angle NAY = 90^o$ y entonces $\angle ATY = 90^o$ si T es la intersección de AC con MY), tenemos que $ND||MY$ y entonces D es el punto medio de OY (ya que N es punto medio de OM); así D es el centro del cuadrado $QOPY$. Finalmente la recta AE pasa por O, es paralela a QP y a MC, y es equidistante de estas dos, así que corta a DC en su punto medio, como queríamos probar.

Segunda forma. Sean O el punto medio de AC; H el punto sobre BC tal que $OH||AB$; J la intersección de la paralela a AB que pasa por D con la paralela a BC por O. Observemos que $\angle DOC = 90^o$ (pues D está sobre la mediatriz de AC) y también $\angle JOH = 90^o$ (porque JO es perpendicular a una paralela a OH). Ahora, $\angle DOJ = \angle COH$ y, por construcción, $\angle OHC = \angle OJD = 90^o$, así que los triángulos OJD y OHC son semejantes y $\frac{OJ}{JD} = \frac{OH}{HC} = 2$.



Sea X la intersección de BD con OJ. Como $\angle DXJ = 45^o$, el triángulo DXJ es rectángulo e isósceles. Tenemos que $OX = HC$ ya que $\angle DBC = 45^o$ y OJ es paralela a BC, así que $XOHC$ es rectángulo. Entonces

$$2 = \frac{OJ}{JD} = \frac{OX + XJ}{JD} = \frac{HC + JD}{JD},$$

de donde $JD = HC$ y así tenemos que los triángulos OJD y OHC son congruentes. Tenemos entonces que $OD = OC$ y, por lo tanto, D está en el círcuncírculo de ABC.

Sea K la intersección de AX y DJ. El triángulo DXK es isósceles y tenemos $DK = 2DJ = BC = XC$ (pues OX es mediatriz de AB). Como $DK = XC$ y son paralelas, entonces $DXCK$ es paralelogramo y de aquí que sus diagonales DC y XK se bisectan, como queríamos probar.

5. Afirmamos que el menor n es 13. Recordemos que los posibles residuos de un entero al dividirlo entre 3 son 0, 1 y 2, y que exactamente los números divisibles entre 3 son aquéllos que tienen residuo 0. También notemos que un número es múltiplo de 3 si, y sólo si, la suma de los respectivos residuos lo es.

Para $n = 12$ separemos los elementos en los conjuntos siguientes: $A = \{1, 4, 6, 9\}$, $B = \{2, 7, 10, 11\}$ y $C = \{3, 5, 8, 12\}$. Entonces los residuos de la división entre 3 de los elementos de A son $1, 1, 0, 0$, los de B son $2, 1, 1, 2$ y los de C son $0, 2, 2, 0$ y así es fácil comprobar que ninguna suma de 3 elementos de cualquiera de los conjuntos es múltiplo de 3.

Para $3 \leq n < 12$, construimos A, B y C como arriba, pero tomando sólo los elementos menores o iguales a n.

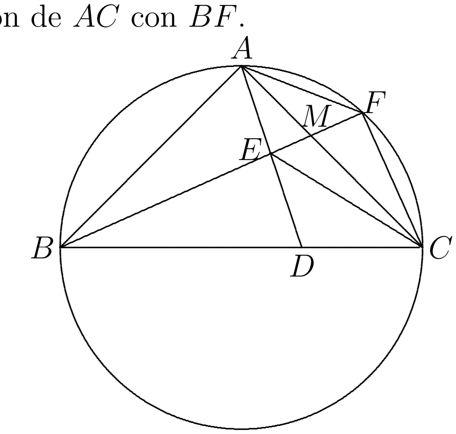
Entre los números del 1 al 13 hay cinco con residuo 1, cuatro con residuo 2 y cuatro con residuo 0. Observemos que alguno de los tres conjuntos debe tener 5 elementos o más. Si entre los 5 elementos de ese conjunto hay tres elementos con el mismo residuo entonces esos tres elementos tienen suma múltiplo de 3. Si no, entonces forzosamente ese conjunto tiene 3 números con residuos distintos. La suma de esos 3 números es múltiplo de 3.

6. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} gf(x) &= g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \\ (gfgf)(x) &= g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{-1}{x-1}, \\ (gfgfgf)(x) &= g(1-x) = 1-(1-x) = x. \end{aligned}$$

Así vemos que al aplicar 99 veces gf a 2013 regresamos a 2013. Entonces $gf(2013) = \frac{2013-1}{2013}$.

7. *Primera forma.* Sea F la intersección de la recta BE con el circuncírculo de ABC. Como $\angle AFB$ abarca el mismo arco AB que $\angle ACB$ en el círculo y el triángulo es rectángulo isósceles, tenemos que $\angle AFB = 45^o$, el triángulo AEF es isósceles y $\angle FAE = 45^o$. Sea M el punto de intersección de AC con BF.



Como AE es altura en el ángulo recto del triángulo rectángulo AMB tenemos que los triángulos AEM y BEA son semejantes, de donde

$$(*) \quad \frac{EM}{EA} = \frac{AE}{BE}.$$

Por otro lado, el ángulo CFB también es recto (porque abarca el mismo arco que CAB), así que DE es paralela a CF y también son semejantes los triángulos BDE y BCF. Entonces

$$\frac{BE}{BF} = \frac{BD}{BC},$$

pero sabemos que $BD = 2DC$, por lo que $BE = 2EF = 2AE$. Sustituyendo en $(*)$ tenemos

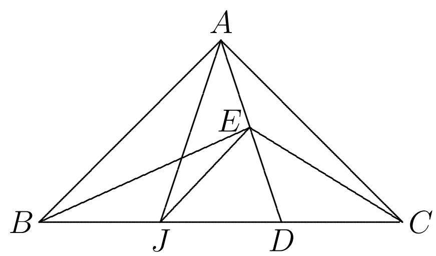
$$\frac{EM}{EA} = \frac{EF}{BE} = \frac{1}{2},$$

lo que nos dice que M es punto medio de EF, así que los triángulos CMF y AME son congruentes. En particular tenemos que $CF = AE = EF$ y esto implica que el triángulo CFE es rectángulo isósceles. Luego $\angle CED = 45^o$.

Segunda forma. Sin pérdida de generalidad supongamos que $AB = 1$. Tenemos entonces, por el teorema de Pitágoras, que $BC = \sqrt{2}$ y así $BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Por ley de cosenos en el triángulo ABD

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos(45^o),$$

de donde $AD = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



Sea J el punto medio de BD. Por ser $\angle(BED)$ recto, J es el centro del círcuncírculo de BED, de donde $JE = \frac{\sqrt{2}}{3}$ y, además, por simetría, $AJ = AD$. Entonces los triángulos isósceles AJD y JED son semejantes (comparten el ángulo en D). Tenemos $\frac{ED}{JD} = \frac{JD}{AD}$ lo cual implica que $ED = \frac{2}{3\sqrt{5}}$. Ahora, $\cos(\angle EDJ) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ y, por lo tanto, $\text{sen}(\angle EDJ) = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Otra vez, por ley de cosenos, $CE = \sqrt{\frac{2}{5}}$ y entonces, por ley de senos, el ángulo que se pide es $\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^o$.

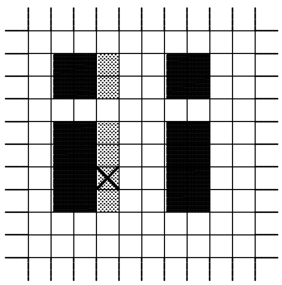
8. Una observación esencial que debemos hacer es que después de cada operación hay algunos renglones y algunas columnas en que los cuadros negros son exactamente los que están en el cruce de esos renglones con esas columnas. De esta manera se forman rectángulos negros por franjas.

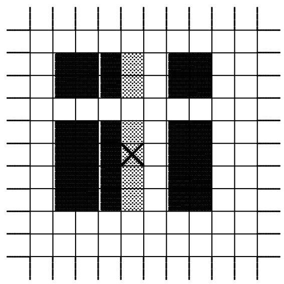
Vamos a probar que el segundo jugador tiene estrategia ganadora. Para esto describiremos cómo el segundo jugador siempre puede lograr que todos los rectángulos negros que se formen tengan todos sus lados de longitud par, mientras que el primer jugador siempre deja rectángulos con algún lado impar. Si probamos esto ya es claro que el segundo jugador asegura ganar pues 100 es un número par.

Después de la primera jugada hay un cuadro de 1×1 pintado; el segundo jugador puede lograr que quede pintado un tablero de 2×2 escogiendo un cuadro pegado por una esquina al cuadro que ya es negro.

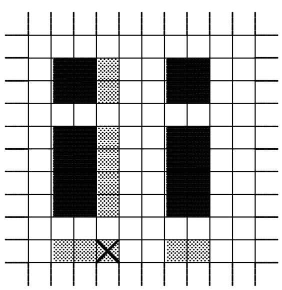
Si en determinada jugada, el primer jugador encuentra todos los rectángulos negros con sus lados pares, sin importar como juegue, producirá nuevos rectángulos negros o alterará los rectángulos negros existentes de acuerdo a las siguientes posibilidades:

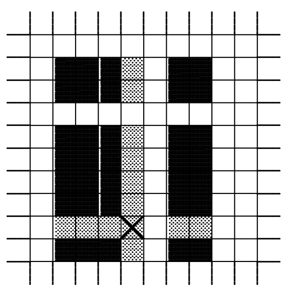
∗ Si el primer jugador escoge un cuadro en una horizontal o vertical donde ya hay cuadros negros, entonces alterará toda una franja en la dirección opuesta, es decir, si por ejemplo, escoge un cuadro en donde ya hay cuadros negros en el mismo renglón, entonces, en la columna del cuadro escogido aumentará en 1 la longitud de todos los rectángulos pegados al cuadro escogido (si no hay ninguno pegado, entonces producirá rectángulos con un lado igual a 1), mientras que en todos los rectángulos alterados continuarán teniendo su lado vertical de longitud par. El segundo jugador podrá escoger cualquier cuadrado pegado al lado par de cualquiera de los rectángulos con ese lado impar (esto es posible porque 100 es par, así que seguro sobran cuadros con estas características); con esto dejará, otra vez, todos los rectángulos con todos sus lados pares.


primer jugador


segundo jugador

∗ Si el primer jugador escoge un cuadro en una horizontal y en una vertical donde no hay nigún cuadro negro, entonces producirá exactamente un rectángulo con ambos lados impares, alterando también las franjas donde está ese rectángulo en las que los rectángulos quedan con un lado par y el otro lado impar. En la siguiente jugada el segundo jugador puede lograr que todos los lados de los rectángulos negros tengan longitud par escogiendo un cuadro blanco pegado a una esquina del rectángulo negro que tiene sus dos lados impares (también aquí usamos que 100 es par así que seguro sobran cuadros para escoger con estas condiciones).


primer jugador


segundo jugador

Con esto concluye la demostración.