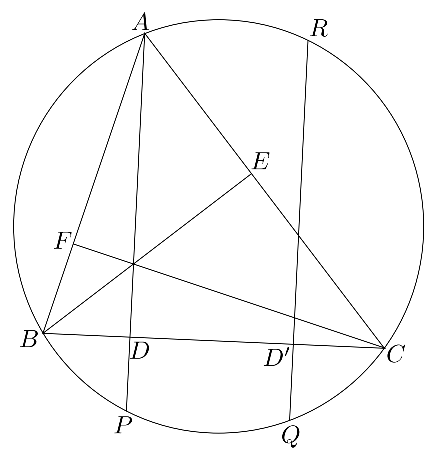
Soluciones de la Etapa Final Estatal de la
28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014

1. Observemos que

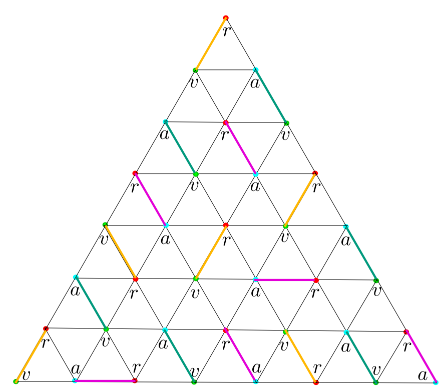
$$\begin{aligned}(3n+1)!+(3n+2)! &= (3n)!(3n+1+(3n+1)(3n+2)\\ &= (3n)!(3n+1)(3n+3)\\ &= 3(3n)!(3n+1)(n+1)\end{aligned}$$

Como p divide al primer miembro de la igualdad, también divide al último, pero, por ser primo, debe dividir a alguno de los 4 factores. Sin embargo, por hipótesis p no divide a $(3n)!$, así que no puede dividir tampoco a 3 ni a $n+1$, pues estos dos factores están en $(3n)!$. Entonces debe dividir a $3n+1$. Por lo tanto, $3n+1$ es el primer número divisible entre p, y entonces es p, de donde $p-1=3n$ y esto prueba que $p-1$ es múltiplo de 3.

2. Construyamos el circuncírculo de ABC y prolonguemos las perpendiculares del enunciado y las alturas hasta que toquen el circuncírculo. Por ejemplo, en la figura se muestran las prolongaciones de AD y de la perpendicular a BC en D', y los puntos en que éstas encuentran al circuncírculo son P, Q y R, como se indica. Entonces, las cuerdas AP y QR son paralelas y de la misma longitud, puesto que ambas son perpendiculares a BC y $|BD|=|D'C|$, es decir, QR se obtiene reflejando AP a través del centro. Esto mismo ocurre con las otras perpendiculares con respecto a las alturas correspondientes. Como que las alturas concurren, entonces también concurren las perpendiculares (y lo hacen en el reflejado del ortocentro con respecto al centro del circuncírculo).



3. *Primera forma.* Observemos que el número de vértices es $1+2+3+\cdots+8=36$, y que hay 12 vértices de cada color. El número de segmentos elegidos es $\frac{36}{2}=18$. Veamos que hay 6 segmentos rojo-azul, 6 segmentos rojo-verde y 6 segmentos azul-verde. Si esto es falso, entonces de alguno de éstos, digamos rojo-azul, hay al menos 7. Pero entonces quedan apareados al menos 7 vértices rojos y 7 azules, por lo que sobran, a lo más, 5 de cada uno de estos colores, es decir, a lo más 10 vértices para aparear con los 12 vértices verdes, lo cual es un absurdo.



Segunda forma. Coloreemos los triángulitos con dos colores, digamos negro y blanco, de manera que a triángulos adyacentes les toque distinto color y al triángulo con vértice en A le toque el color negro. De esta manera, cada segmento pertenece a un único segmento negro. Cada uno de estos triángulos tiene exactamente un segmento rojo-verde y un segmento rojo-azul (esto es poque la condición del problema dice que cada triangulito tiene los tres colores en sus vértices). De esta manera, es posible aparear éstos y son el mismo número.

4. *Primera forma.* Sabemos que si x y y son reales, entonces $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, de donde $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Aplicamos esta desigualdad varias veces en lo que sigue:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 2b^4 + c^8 + d^8 &\geq 4a^2 + 2b^4 + 2c^4d^4 \\ &\geq 4a^2 + 4b^2c^2d^2 \\ &\geq 8abcd \end{aligned}$$

Segunda forma. La desigualdad entre media aritmética y media geométrica nos dice que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son reales positivos, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Aplicamos esta desigualdad:

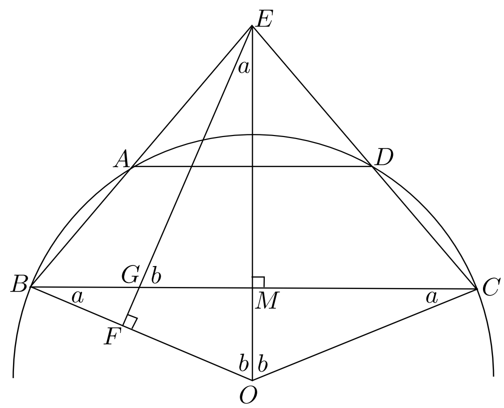
$$\begin{aligned} 4a^2 + 2b^4 + c^8 + d^8 &= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + b^4 + b^4 + c^8 + d^8 \\ &\geq 8\sqrt[8]{a^2a^2a^2a^2b^4b^4c^8d^8} \\ &\geq 8\sqrt[8]{a^8b^8c^8d^8} \\ &\geq 8abcd. \end{aligned}$$

5. Observemos que si marca un vértice impar, entonces su siguiente marca será en el 160 y el juego terminará porque volverá a llegar al 160.

Ahora supongamos que escoge el vértice con número 2. Entonces marcará los 8 vértices siguientes: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 y 96, puesto que $256-160 = 96$ y $96 \cdot 2 - 160 = 192 - 160 = 32$.

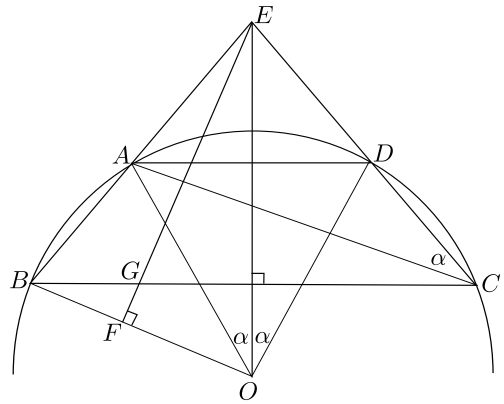
Veamos ahora que es imposible que marque más de 8. Supongamos que escoge el vértice $2a$ (con $a \leq 80$). Los vértices que, si no repitiera, iría marcando serían los residuos de la división entre 160 de los números: $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, $32a$, $64a$. $128a$, $96a$ y su siquiente paso sería al $32a$, que ya habría estado marcado.

6. Tenemos que $ABCD$ es un trapecio isósceles y que $|AB| = |CD|$). Los triángulos EBC y OBC son isósceles y EO es mediatriz de BC (y bisectriz de los triángulos EBC y OBC en E y O, respectivamente).



Sean $a = \angle CBO = \angle OCB$ y $b = \angle BOE = \angle EOC$. Sea M la intersección de EO con BC. Como los triángulos BMO, EFO y EGM son rectángulos, tenemos que $a+b = 90^\circ$, $\angle FEO = a$ y $\angle EGM = b$. Pero entonces $\angle EGC = b = \angle EOC$, así que ya tenemos que $EGOC$ es cíclico.

Ahora veamos que A es cíclico con O, C y E. Tenemos que OE mediatriz de BC, así que $\angle AOE = \angle EOD = \alpha$. Pero O es el centro del circuncírculo de ACD, de donde $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD = \alpha$. Esto nos dice que $\angle ACE = \angle AOE$ y así tenemos que $AOCE$ es cíclico y esto concluye la demostración.



Nota. También se podría probar que A es cíclico con E, G y O como sigue:

Sean $c = \angle EBC = \angle ECB$ y $d = \angle BEO = \angle OEC$. Por ser $EGOC$ cíclico tenemos que $\angle OGC = \angle OEC = d$, y por ser EBM un triángulo rectángulo, deducimos que $c + d = 90^{\text{o}}$.

Ahora, $|BO| = |OA|$, así que $\angle BAO = a + c$. También, $|AO| = |OC|$ implica que $\angle OAC = a + e$, donde $e = \angle BCA$. Entonces, en el triángulo EOC tenemos que

$$d + b + a + c = 180^{\text{o}}. \tag{1}$$

Sea $f = \angle EAC$. Entonces en A tenemos

$$a + c + a + e + f = 180^{\text{o}}. \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

$$d + b = a + e + f,$$

y entonces $\angle OGE = \angle OAE$ y así $EAGO$ es cíclico como queríamos.