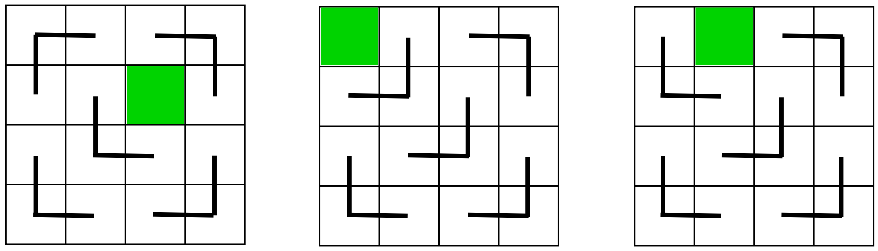
Soluciones de la Etapa Final Estatal de la
29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015

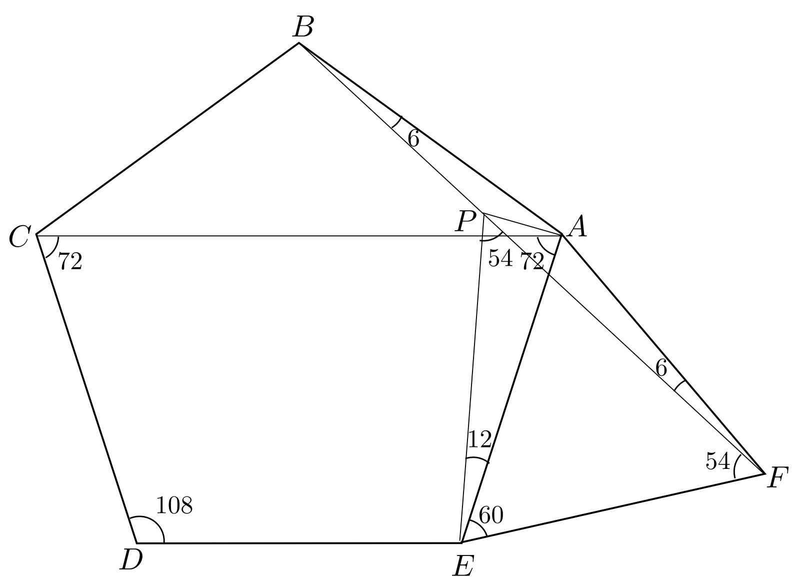
1. El menor número de niveles se logra cubriendo lo más posible la cuadrícula. Como cada ficha cubre 3 cuadritos, al menos siempre queda uno sin cubrir. Tenemos tres tipos de cuadritos en la cuadrícula: los centros, las esquinas y las orillas no esquina. En la figura siguiente se muestra cómo es posible que en un nivel cada uno de los tipos de cuadritos quede sin cubrirse (y los demás queden cubiertos).



centro esquina orilla

Entonces, al ir variando en cada nivel los cuadritos no cubiertos, en 16 niveles logramos cubrir 15 veces cada cuadrito. Como $15 \cdot 4 = 60$, necesitamos $16 \cdot 4 = 64$ niveles.

2. Sabemos que la suma de los ángulos internos de un pentágono es $3 \cdot 180^o = 540^o$, de manera que cada ángulo interno del pentágono mide 108^o y así, $\angle BAF = 108^o + 60^o = 168^o$. Pero $|AB| = |AE| = |AF|$, así que el triángulo ABF es isósceles y $\angle AFB = \frac{1}{2}(180^o - 168^o = 6^o$ y entonces, $\angle PFE = 60^o - 6^o = 54^o$. Por otro lado, por construcción, $\angle PEF = 12^o + 60^o = 72^o$, de donde $\angle EPF = 180^o - (72^o + 54^o) = 54^o$ y de aquí tenemos que el triángulo PEF es isósceles con $|PE| = |EF|$, pero $|EF| = |AE|$, así que también el triángulo PEA es isósceles y $\angle PAE = \frac{1}{2}(180^o - 12^o = 84^o$. Ahora observemos que en el cuadrilátero $CADE$ la suma de los ángulos internos es 360^o y, como $\angle A = \angle C$ y $\angle D = \angle E = 108^o$, tenemos que $\angle A = 72^o$. Finalmente, $\angle CAP = 84^o - 72^o = 12^o$.



3. *Primera forma.* Observemos primero que la factorización en primos de 2015 es $2015 = 5 \times 13 \times 31$, así que las posibles formas de escribir a 2015 como producto de enteros mayores que 1 son:

$$\begin{aligned} 2015 &= 2015 \\ &= 65 \times 31 \\ &= 5 \times 403 \\ &= 13 \times 155 \\ &= 5 \times 13 \times 31. \end{aligned}$$

Analizaremos los distintos casos en que aparezcan los números indicados arriba como sumandos o sus negativos, agregando suficientes $1'$s y $-1'$s para que la suma total sea 2015.

Observemos primero que la suma de los números distintos de 1 y -1 no puede ser negativa, pues no alcanzarían los $1'$s para que la suma fuera 2015.

(a) Cuando el único factor distinto de 1 o -1 es 2015, para que la suma siga siendo 2015, se deberían agregar la misma cantidad de $1'$s que de $-1'$s, o sea, 1007 de cada uno, pero entonces el producto sería negativo.

(b) Si dos de los sumandos son 65 y 31. Como $65+31 = 96$, falta sumar $2015-96 = 1919$ y esto debe hacerse con 2013 $1'$s y $-1'$s (pues se quiere que en total sean 2015 sumandos). Entonces debe haber 1919 $1'$s y después debe haber la misma cantidad de $1'$s que de $-1'$s. Eso haría que hubiera 47 $1'$s más y también 47 $-1'$s y así el producto sería negativo.

El procedimiento que seguiremos es el mismo en los siguientes casos:

(c) Si un sumando es 65 y el otro es -31 (su suma es 34). Otra vez, en 2013 sumandos debe sumarse lo que falta: $2015 - 34 = 1981$ y eso debe lograrse con 1981 $1'$s. Hasta aquí se lleva la suma correcta, así que debe completarse con la misma cantidad de $1'$s que de $-1'$s, pero $\frac{2015-1983}{2} = 16$, de manera que el número de $-1'$s sería par, pero con el signo negativo del -31 el producto total sería negativo.

(d) Si un sumando es 403 y el otro es 5. Como en los casos anteriores, veamos cuántos $-1'$s necesitamos para que la suma sea correcta:

$$2015 - (403 + 5) = 1607,$$
$$\frac{2015-(2+1607)}{2} = 203,$$

que es impar, y por tanto, el producto es negativo.

(e) Si un sumando es 403 y el otro es -5. Aquí:

$$2015 - (403 - 5) = 1617,$$
$$\frac{2015-(2+1617)}{2} = 198,$$

que es par y entonces el producto es negativo.

(f) Si un sumando es 155 y el otro es 13. Aquí:

$$2015-(155+13)=1847,$$
$$\tfrac{2015-(2+1847)}{2}=83,$$

que es impar, y por tanto, el producto es negativo.

(g) Si un sumando es 155 y el otro es -13. Aquí:

$$2015-(155-13)=1873,$$
$$\tfrac{2015-(2+1873)}{2}=70,$$

que es par, y por tanto, el producto es negativo.

(h) Si aparecen los números 5, 13 y 31 como sumandos. Aquí

$$2015-(5+13+31)=1966$$
$$\tfrac{2015-(3+1966)}{2}=23$$

que es impar, y por tanto, el producto es negativo.

(i) Si aparecen los números -5, 13 y 31 como sumandos. Aquí

$$2015-(-5+13+31)=1976$$
$$\tfrac{2015-(3+1976)}{2}=18$$

que es par, y por tanto, con el negativo del 5 se obtiene producto negativo.

(j) Si aparecen los números 5, -13 y 31 como sumandos. Aquí

$$2015-(5-13+31)=1992$$
$$\tfrac{2015-(3+1992)}{2}=10$$

que es par, y por tanto, con el negativo del 13 se obtiene producto negativo.

(k) Si aparecen los números -5, -13 y 31 como sumandos. Aquí

$$2015-(-5-13+31)=2002$$
$$\tfrac{2015-(3+2002)}{2}=5$$

que es impar, y, otra vez, el producto es negativo.

Hemos analizado todas las posibilidades de que la suma sea 2015 y en todas, el producto de los sumandos resulta ser -2015 así que esto concluye la prueba.

Segunda forma. Supongamos que existen los números. Como queremos que el producto sea 2015, necesitamos que todos los números sean impares. Supongamos que hay x enteros que son congruentes con 1 módulo 4 y y enteros que son congruentes con 3 módulo 4. Por un lado, como en total son 2015 enteros, tenemos que

$$x + y = 2015 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$x + 3y \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} \equiv 2015 \equiv 3 \pmod{4}.$$

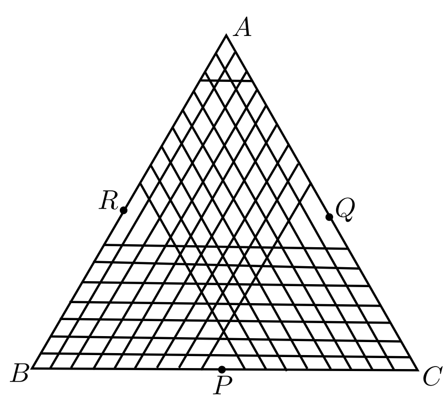
Restando la primera congruencia de la segunda tenemos que $2y \equiv 0 \pmod{4}$ y por lo tanto y es par.

Sin embargo, usando el producto tenemos que

$$3^y \equiv 1^x \cdot 3^y \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2015} \equiv 2015 \equiv 3 \pmod{4}.$$

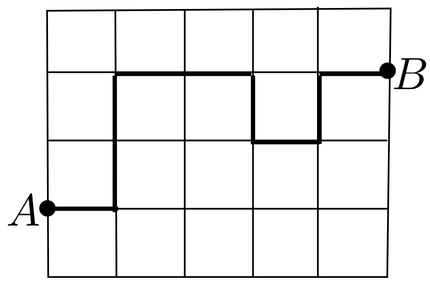
Esto requiere que y sea impar y entonces tenemos una contradicción.

4. La respuesta es 8. Con 7 o menos no se puede porque $3 \cdot 7^2 < 180$. Sean P, Q y R los respectivos puntos medios de BC, AC y AB. Pongamos 8 puntos sobre el lado AC que dividan a AQ en 9 partes iguales y hagamos lo mismo en los segmentos AR, BP y PC. Usando los puntos construidos tracemos rectas paralelas a AC y a AB (ver la figura). En este caso, todas las rectas no paralelas se intersectan entre sí (ellas producen $8 \times 8 = 64$ puntos de intersección). Ahora pongamos pongamos 7 rectas paralelas a BC suficientemente cercanas a BC para que intersecten a todas las rectas paralelas a los otros lados, pero que no pasen por los puntos de intersección de las anteriores. Así, llevaremos otros $7 \times 16 = 112$ puntos de intersección, para un total de $64 + 112 = 176$. Para lograr los 4 puntos de intersección faltantes, basta poner la otra recta paralela a BC cercana a A, de manera que intersecte sólo a 4 rectas.



5. Un camino está determinado por el sentido que toma en cada vértice de la cuadrícula. Llamemos S al movimiento de subida, B al de bajada, I al que se dirige hacia la izquierda y D al que se va hacia la derecha. Observemos que la distancia horizontal de A a B es de 5, y la distancia vertical es de 2 y, como queremos que los caminos tengan longitud 9, en

algún momento hay que regresar. Por ejemplo, el camino que se muestra en la figura está determinado por la sucesión: $D, S, S, D, D, B, D, S, D$



Tenemos, entonces dos tipos de caminos, dependiendo si se insertan movimientos verticales (una subida y una bajada) o se insertan movimientos horizontales (una derecha y una izquierda):

Tipo 1. Los que van 5 veces a la derecha, 3 de subida y 1 de bajada. En este tipo de caminos no se puede subir y bajar en movimientos consecutivos. Hay dos posibilidades; la primera es que B esté en la orilla; en este caso hay que elegir las 3 $S's$ en cualesquiera de las 7 posiciones no pegadas a esa orilla. En total, en este caso hay $2 \cdot \binom{7}{3} = 70$ caminos. Cuando B está en cualquiera de las posiciones no en la orilla (hay 7 de ellas), entonces las 3 $S's$ se pueden elegir de $\binom{6}{3}$ formas. El número total de caminos de este tipo es

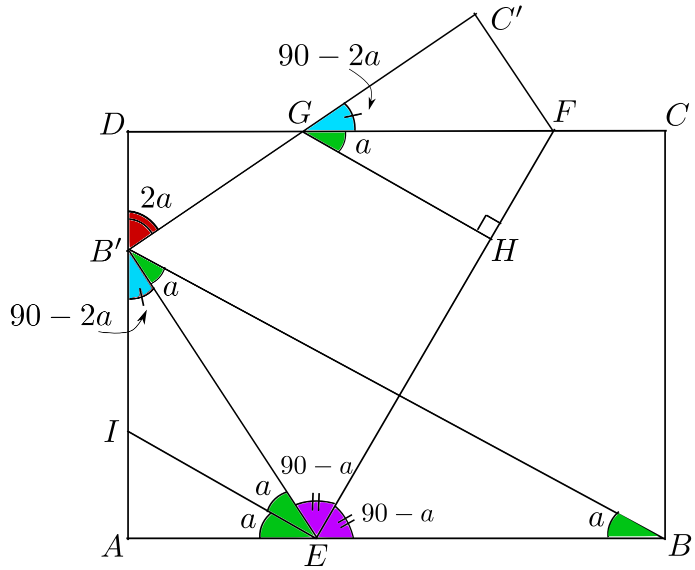
$$2 \cdot \binom{7}{3} + 7 \cdot \binom{6}{3} = 2 \cdot 35 + 7 \cdot 20 = 210.$$

Tipo 2. Los que van 6 veces a la derecha, 1 a la izquierda y 2 de subida. En este caso no se puede empezar ni terminar con I; además, no pueden ir juntas I y D, de manera que a ambos lados de I deben ir las dos S's. Entonces hay 5 posibilidades de este tipo: $DSISDDDDD$, $DDSISDDDD$, $DDDSISDDD$, $DDDDSISDD$, $DDDDDSISD$.

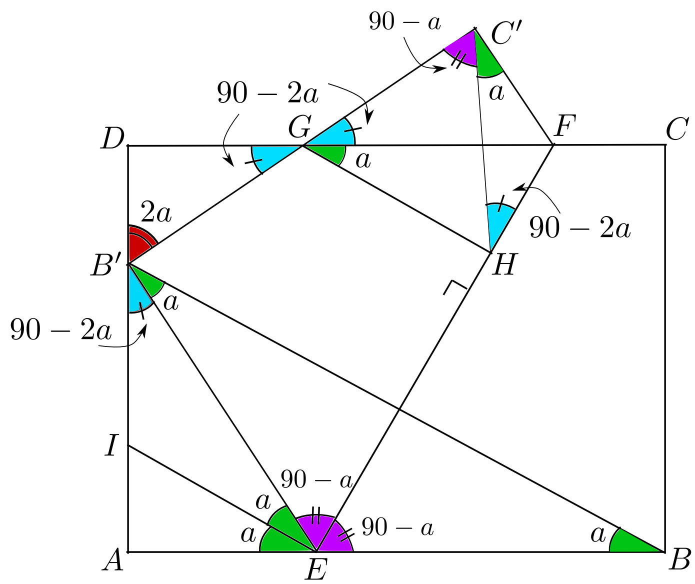
El número total de caminos es 215.

6. Obsérvese primero que $C'F = CF$ y que $BE = B'E$. De la última igualdad tenemos que el triángulo BEB' es isósceles. Sea $a = \angle EBB' = \angle EB'B$. Por la construcción, se tiene que $\angle B'EF = \angle BEF$, y cada uno de éstos mide $90^{\text{o}} - a$. El $\angle B'EA = 2a$ y, por ser EI su bisectriz, $\angle B'EI = \angle IEA = a$. De las igualdades $C'F = CF$ y $BE = B'E$, es claro que es suficiente demostrar que $\frac{GH}{C'F} = \frac{EB'}{EI}$.

Ahora, las rectas GH y EI son perpendiculares a FE, de donde $GH||EI$. Como además $GF||EA$, se tiene que $\angle AB'E = 90^{\text{o}} - 2a$, y como $\angle C'B'E = \angle CBE = 90^{\text{o}}$, entonces $\angle GB'D = 2a$. También, por suma de ángulos en el triángulo $B'DG$, tenemos que $\angle B'GD = 90^{\text{o}} - 2a$ y, por ser opuestos por el vértice, $\angle FGC' = \angle DGB' = 90^{\text{o}} - 2a$.



Ahora trabajemos sobre el cuadrilátero $GHFC'$. Dicho cuadrilátero es cíclico ya que un par de ángulos opuestos son rectos (el ángulo en C' y el ángulo en H). Entonces $\angle HC'F = \angle HGF = a$. Además $\angle C'HF = \angle C'GF = 90^{\text{o}} - 2a$. Como $\angle GC'F$ es recto, se deduce que $\angle GC'H = 90^{\text{o}} - a$. Por otro lado, los ángulos en C' y en G del triángulo $C'HG$ son iguales, por lo que ese triángulo es isósceles con $C'H = HG$. De lo anterior, es suficiente probar que $\frac{C'H}{C'F} = \frac{EB'}{EI}$.



Por último, los triángulos $C'FH$ y EIB' son semejantes por criterio AAA con $\angle FC'H = \angle IEB'$ y $\angle FHC' = \angle IB'E$. De esta semejanza se deduce que $\frac{C'H}{C'F} = \frac{EB'}{EI}$, como queríamos probar.