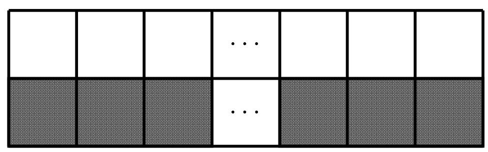
Soluciones de los problemas

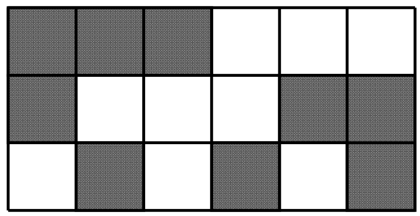
Solución del problema 1. Veamos que es más grande el segundo número. Tenemos que $3^{303} > 2^{303}$, $4^{404} = (2^2)^{404} = 2^{808}$ y $5^{505} > 4^{505} = (2^2)^{505} = 2^{1010}$, por lo que

$$3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505} > 2^{303} \cdot 2^{808} \cdot 2^{1010} = 2^{2121} > 2^{2016}.$$

Solución del problema 2. Para $m = 2$, n puede tomar cualquier valor entero positivo. Para ello, basta colorear la primera fila de blanco y la segunda de negro (hay muchas opciones para este ejemplo).

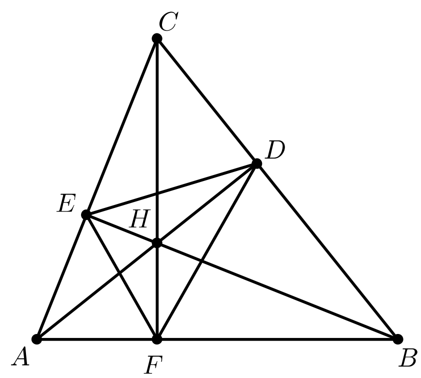


Para $m = 3$, primero veamos que $n = 7$ no es posible, lo cual inmediatamente descartará todos los valores con $n > 7$. Cada fila tiene 7 casillas, por lo que, para cada fila, habrá un color que aparece al menos 4 veces. Sin pérdida de generalidad, digamos que en la primera fila aparece el color negro en al menos 4 casillas. Consideremos 4 de esas casillas (si hay más que 4, no importa, solo tomamos 4).
Tomemos las cuatro columnas que estas cuatro casillas determinan. Si tres de ellas tuvieran otra casilla negra, necesariamente dos de estas quedarían en la misma fila y se formará un rectángulo con cuatro esquinas negras, lo cual es una contradicción. Luego, a lo más dos de estas columnas tienen otra casilla negra, por lo que debe haber al menos dos de estas columnas que no tienen otra casilla negra. Pero esto también es una contradicción pues se forma un rectángulo con sus esquinas blancas. Por lo tanto $n \leq 6$.
El siguiente ejemplo muestra que $n = 6$ es posible (hay muchas opciones para este ejemplo).



Para los valores $n < 6$, bastará quitar columnas a este ejemplo. Luego, podemos concluir que $1 \leq n \leq 6$.

Solución del problema 3. Digamos que el triángulo es ABC; los pies de sus alturas son D, E y F; y H es su ortocentro, como se muestra en la siguiente figura.



Además, sean α, β y γ los ángulos en A, B y C del triángulo original. Como el triángulo AFC es un triángulo rectángulo, tenemos que $\angle ACF = 90° - \angle FAC = 90° - \alpha$. Por otro lado, como los ángulos $\angle CDH$ y $\angle HEC$ son rectos, tenemos que el cuadrilátero $HDCE$ es cíclico y se tiene que $\angle EDH = \angle ECH = \angle ACF = 90° - \alpha$. De una manera similar se tiene que $\angle HDF = 90° - \alpha$, por lo que $\angle EDF = 180° - 2\alpha$.
De la misma manera, vemos que los otros ángulos internos del triángulo DEF son $180° - 2\beta$ y $180° - 2\gamma$. Luego, para que el problema sea cierto, necesitamos que los ángulos (α, β, γ) sean iguales a los ángulos $(180° - 2\alpha, 180° - 2\beta, 180° - 2\gamma)$, en algún orden. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, de donde $180° - 2\gamma \leq 180° - 2\beta \leq 180° - 2\alpha$, por lo que se tienen que dar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 180^\circ - 2\gamma, \\
\beta &= 180^\circ - 2\beta, \\
\gamma &= 180^\circ - 2\alpha.
\end{aligned}$$

La segunda ecuación nos dice que $\beta = 60^\circ$, mientras que las otras dos nos dicen que $\alpha + 2\gamma = \gamma + 2\alpha = 180^\circ$. De aquí, $\alpha = \gamma$ y sustituyendo, concluimos que $\alpha = \gamma = 60^\circ$. Por lo tanto, el único triángulo que cumple es el equilátero, cuyos ángulos valen todos 60°.

Nota. Si se permite que el triángulo original sea obtusángulo, se encuentra otra solución, la cual corresponde al triángulo cuyos ángulos internos valen $\frac{1}{7}(180^\circ)$, $\frac{2}{7}(180^\circ)$ y $\frac{4}{7}(180^\circ)$.

Solución del problema 4. Para el problema con 2016, podemos considerar números de 4 dígitos y dándole valores al último dígito. Si el último dígito es 1, el original debería ser el 2016, lo cual no es posible. Si el último dígito es 2, el original debería ser el $2(2016) = 4032$, lo cual sí es posible.

Para 2015, digamos que el número formado por los tres primeros dígitos es a y el que queda después de quitarlos es b. Tenemos que el número original es igual a $10^k a + b$, donde k es el número de dígitos de b. Luego, queremos que

$$10^k a + b = 2015b$$

de donde $a = \frac{2014b}{10^k}$. Como la factorización en primos de 2014 es $2 \cdot 19 \cdot 53$ y los factores primos del denominador son 2 y 5, no será posible eliminar los factores 19 y 53 del denominador, por lo que a será múltiplo de $19 \cdot 53 = 1007$, lo cual es imposible al ser a un número de tres dígitos. Luego, no existe el número buscado.

Solución del problema 5. Digamos que a es la primera página perdida y el número de hojas perdidas es n. Luego, las páginas que se perdieron fueron a, $a+1$, $a+2, \ldots$, $a+2n-1$. Por la suma de Gauss, la suma de estas es

$$2na + \frac{(2n-1)(2n)}{2} = 2na + n(2n-1) = n(2a+2n-1) = 452$$

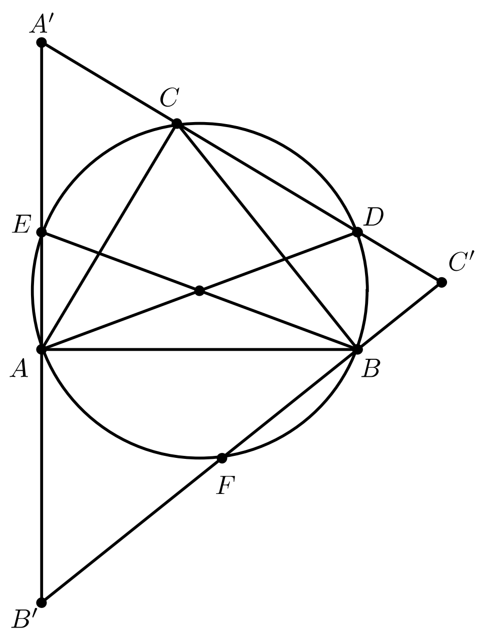
como $2a+2n-1$ es un número impar mayor que 1 (pues tanto a como n son enteros positivos) y la factorización en primos de 452 es $2^2 \cdot 113$, la única opción es que $2a+2n-1 = 113$ y $n = 4$, de donde $a = 53$. Luego, las páginas perdidas son desde la 53 hasta la 60.

Solución del problema 6. Digamos que s_n es el número de maneras de acomodar a n niñas siguiendo la condición del problema. Claramente $s_1 = 1$.

Digamos que sabemos el valor de s_n y tratemos de encontrar el valor de s_{n+1} a partir de él. Si tenemos $n+1$ niñas, notamos que la mayor de ellas debe ir o al inicio o al final de la fila, pues si estuviera en una posición donde tuviera

niñas tanto a su derecha como a su izquierda, no se cumpliría la condición del problema.
Además, si no consideramos a esta niña, las n niñas restantes acomodadas de la manera justo en la que están, cumplen la condición del problema. Luego, como hay s_n maneras de acomodarlas y para cada una de estas hay 2 maneras de acomodar a la más alta, tenemos que $s_{n+1} = 2s_n$. Como esta relación se cumple para todos los valores de n, tenemos que $s_{13} = 2^{12}s_1 = 2^{12} = 4096$.
Segunda Solución. Consideremos a la niña de menor estatura. Notamos que, para que la condición se cumpla, a la derecha de ella las niñas tienen que estar acomodadas de manera creciente. A la izquierda tienen que estar de manera decreciente.
Más aún, para determinar un acomodo, basta definir qué niñas estárán a la izquierda de la más baja y quiénes a la derecha. Como quitando a la niña más baja quedan 12 niñas y cada una de ellas puede estar a la derecha o a la izquierda, tennemos un total de $2^{12} = 4096$ maneras de acomodarlas.

Solución del problema 7. Digamos que A', B' y C' son las intersecciones como se muestra en la figura. Como BE y AD son diámetros, los ángulos $\angle BAA'$ y $\angle ACA'$ son rectos. Luego, $\angle BAC + \angle CAA' = 90° = \angle AA'C + \angle CAA'$. Esto implica que $\angle BAC = \angle AA'C$. De una manera similar obtenemos que $\angle CBA = \angle BB'A$ y $\angle ACB = \angle CC'B$, por lo que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.



Solución del problema 8. Tenemos que $x^2 + y^2 \geq 2xy > xy$, por lo que $n < 2016$ para que pueda darse la igualdad.
Sea d el máximo común divisor de x e y. Luego, existen enteros positivos a y b tales que $x = da$, $y = db$ y $(a, b) = 1$. Sustituyendo en la ecuación tenemos que

$$d^{2n}(a^2 + b^2)^n = d^{4032}(ab)^{2016}.$$

Como $n < 2016$, se tiene que $2n < 4032$. Luego, podemos dividir entre d^{2n} en ambos lados para obtener

$$(a^2 + b^2)^n = d^{4032-2n}(ab)^{2016}.$$

Tenemos que el lado derecho es divisible entre b, por lo que el lado izquierdo también tiene que serlo. Considerando el binomio de Newton $(a^2+b^2)^n$, notamos que todos los términos, salvo quizás el primero, son múltiplos de b. Luego, b tiene que dividir al primer término, el cual es $(a^2)^n = a^{2n}$. Pero como a y b son primos relativos, la única opción para que esto pase es que b sea igual a 1. Análogamente obtenemos que $a = 1$ y concluimos que $x = d = y$.
Nota. Otra versión de este problema es encontrar todos los posibles valores de n, la cual es fácil a partir de que se tiene que $x = y$, pero claro, eso se tendría que conjeturar primero.