Problemas para la $\mathbf{19^a}$

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

(Problemas Avanzados)

Editado por:

Carlos Jacob Rubio Barrios

Gerardo Ruiz Sánchez

2005

Carlos Jacob Rubio Barrios
Delegado de la Olimpiada de Matemáticas en San Luis Potosí, IICO - UASLP.

Gerardo Ruiz Sánchez
Estudiante de Economía y Matemáticas Aplicadas en el ITAM.

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 19^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores del certamen formarán las selecciones que participarán en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2006: la XVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico que se llevará a cabo en el mes de marzo en México y los exámenes se corregirán en Corea, 47^{a} Olimpiada Internacional se llevará a cabo en Slovenia durante el mes de julio, la XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre en Ecuador y la VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se celebrará en Panamá en el mes de julio.

En la 19^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^{o} de agosto de 1986. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2005-2006 y, para el 1^{o} de julio de 2006, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

La intención de esta publicación es que sirva como guía para los alumnos que desean preparárse para el Concurso Nacionale de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela, son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos

a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.
Este folleto incluye problemas de las olimpiadas estatales de matemáticas de Morelos, Nuevo León, Puebla y San Luis Potosí. También incluye problemas del cuarto concurso intercampus de matemáticas olímpicas (San Luis Potosí 2002) y del cuarto encuentro interestatal de la zona centro (en la que participaron el Distrito Federal, Estado de México, Hidalgo, Morelos y Puebla). Finalmente, incluye problemas de la etapa final de los Concursos Estatales del año 2003 y 2004.

Etapas de la Olimpiada

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Campeche, Campeche, del 6 al 12 de noviembre de 2005. En él, se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2006. También, se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato e Ixtapan de la Sal.

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en las Olimpiadas Internacionales, Iberoamericanas y Centroamericanas han sido los siguientes:

Resultados de México en las Internacionales

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Internacionales, Iberoamericanas y de Centroamérica y el Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwán	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37

La 45^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Atenas, Grecia, del 4 al 18 de julio de 2004. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora), Héctor Daniel García Lara (Chihuahua), Rosemberg Toalá Enríquez (Chiapas), Gonzálo Arturo Montalván Gámez (Puebla), Carlos Vargas Obieta (Jalisco), Cristos Alberto Ruiz Toscano (Jalisco). Se obtuvieron 3 medallas de bronce (Marco Antonio, Héctor Daniel y Carlos) y una mención honorífica (Cristos Alberto). México ocupó el lugar 37 de 84 países participantes.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5

La XIX Olimpiada Iberoamericana se llevó a cabo en Valencia, España, del 19 al 25 de septiembre de 2004. Los alumnos que concursaron fueron: Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora), Héctor Daniel García Lara (Chihuahua), Gonzálo Arturo Montalván Gámez (Puebla), Cristos Alberto Ruiz Toscano (Jalisco). Se obtuvieron, una medalla de oro (Marco Antonio), dos de plata (Cristos Alberto y Héctor Daniel) y una de bronce (Gonzálo Arturo). México ocupó el quinto lugar de 22 países que participaron.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1

Entre el 7 y el 11 de junio, se celebró en Managua, Nicaragua, la VI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Pablo Soberón Bravo (Morelos) y David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato). Los alumnos obtuvieron 3 medallas de oro y México ocupó la posición número uno de doce países participantes.

En total, en las olimpiadas internacionales se han obtenido tres medallas de plata, veinticuatro medallas de bronce y dieciocho menciones honoríficas. En las olimpiadas iberoamericanas se han obtenido once medallas de oro, veinticuatro medallas de plata, veintidós medallas de bronce y tres menciones honoríficas. En las olimpiadas centroamericanas se han obtenido diez medallas de oro, seis medallas de plata y dos de bronce.

Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico. No existe un registro estadístico sobre la participación de México.
El año pasado México participó también en esta olimpiada que se llevó a cabo en marzo. Esta olimpiada se realiza por correo y los exámenes son calificados por el país sede, el cual elabora también el exámen. En 2004 el país organizador fue Canadá. Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora) obtuvo medalla de oro, Héctor Daniel García Lara (Chihuahua), Rosemberg Toála Enríquez (Chiapas) y Luis Alberto Martínez Chigo (Veracruz) obtuvieron medalla de bronce.

Resultados del Concurso Nacional de la 18^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2004 se llevó a cabo en Ixtapan de la Sal, Edo. de México, el Concurso Nacional de la 18^{o} Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Iván Joshua Hernández Maynez (Coahuila)
Pablo Soberón Bravo (Morelos)
David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato)
Gonzalo Arturo Montalván Gámez (Puebla)
Guevara Manuel Ángel Guevara López (Zacatecas)
Héctor Daniel García Lara (Chihuahua)
Juan Carlos Ramírez Prado (Baja California)
Diego Torres Patiño (Distrito Federal)
Francisco Javier Ibarra Goycoolea (Baja California)
Galo Higuera Rojo (Morelos)
Isaac Buenrostro Morales (Jalisco)
José Trinidad Barajas (Michoacán)
Mario Alejandro Huicochea Mason (Distrito Federal)
Mariana Gómez Schiavon (Morelos)
Jonathan Allan Chávez Casillas (Distrito Federal)
Rodrigo Díaz Martín (Jalisco).

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Isaac Buenrostro Morales (Jalisco)
Juan Carlos Ramírez Prado (Baja California)
Jorge Chavira Olivas (Chihuahua)
Jan Marte Contreras Ortiz (Jalisco)
Paul Iván Gallegos Bernal (Jalisco).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 18° Concurso Nacional.

1. Morelos
2. Jalisco
3. Distrito Federal
4. Chihuahua
5. Baja California
6. Guanajuato
6. Yucatán
7. Nuevo León
7. Puebla
7. Sonora

Los números repetidos indican que esos estados obtuvieron la misma puntuación.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó "Árbol de la Vida"y fue ganado por el Zacatecas. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Aguascalientes y Guerrero.

Agradecimientos

Agradecemos a todos los estados que colaboraron con los problemas que aparecen en este folleto, así como a todas las personas que participaron en la elaboración del mismo. También quisiéramos agradecer a Teresa Valerio por la última lectura.

Información sobre la Olimpiada

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

http://erdos.fciencias.unam.mx/omm

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Febrero de 2005

Capítulo 1

Enunciados de los Problemas

Presentamos aquí algunos problemas para mostrar el tipo de matemáticas que se manejan en la fase estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Al final encontrarás las soluciones.

1.1. Problemas de Práctica

Problema 1. Sean a y b enteros tales que $a + 5b$ y $5a - b$ son ambos divisibles por 2002. Prueba que $a^2 + b^2$ también es divisible por 2002.

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con $AB \parallel CD$ y donde $DC = 2AB$. Sean O el punto de intersección de sus diagonales y S la circunferencia con centro en O que pasa por A y B. Si S es tangente a DC, encuentra los ángulos del trapecio y demuestra que S es también tangente a los lados AD y BC.

Problema 3. Queremos ubicar los enteros positivos del 1 al 16 en las casillas de una tabla de 4×4 (uno en cada casilla), de manera que la suma en cada columna y cada renglón de la tabla sea impar. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

Problema 4. Sean p y q enteros mayores o iguales que cero. Prueba que el número $2^{2p} + 2^{2q}$ no puede ser el cuadrado de ningún entero.

Problema 5. Los doce números de un reloj se desprendieron y al colocarlos de nuevo, se cometieron algunos errores. Demuestra que en la nueva colocación hay un número que al sumarle los dos números que quedaron a sus lados, se obtiene un resultado mayor o igual a 20.

Problema 6. Sea ABC un triángulo y P un punto en su interior tal que:

$$\angle PBC = \angle PCA < \angle PAB.$$

Supongamos que el segmento PB intersecta al circuncírculo del triángulo ABC en el punto E, y que el segmento CE intersecta al circuncírculo del triángulo APE en el punto F. Prueba que las áreas de los triángulos APE y AEC son iguales, y que se verifica la igualdad:

$$\frac{\text{Area}(APEF)}{\text{Area}(ABP)} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2.$$

Problema 7. Sea $n \geq 3$ un entero. Una circunferencia está dividida en $2n$ arcos por $2n$ puntos. Cada arco mide una de tres posibles longitudes y no hay dos arcos adyacentes con la misma longitud. Los $2n$ puntos se pintan alternadamente de rojo y azul. Demuestra que el n-ágono con vértices rojos y el n-ágono con vértices azules tienen el mismo perímetro y la misma área.

Problema 8. Sea $ABCD$ un cuadrado (con los vértices en el sentido horario) y P un punto en el lado BC distinto de B y de C. Considera el cuadrado $APRS$ (con los vértices en el sentido horario). Prueba que la recta CR es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Problema 9. En el triángulo ABC, sean D y E puntos en los lados BC y AB respectivamente. Sea F un punto en el lado AC tal que $EF \parallel BC$ y sea G un punto en el lado BC tal que $EG \parallel AD$. Si M y N son los puntos medios de AD y BC, demuestra que:

$$\frac{EF}{BC} + \frac{EG}{AD} = 1,$$

y que M, N y el punto medio de FG son colineales.

Problema 10. Sea n un entero positivo y sean $a < b < c < d$ los cuatro divisores positivos más pequeños de n. Encuentra todos los enteros n tales que:

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Problema 11. ¿Es posible cubrir una cuadrícula de 2003×2003 con rectángulos de 1×2 colocados horizontalmente y con rectángulos de 1×3 colocados verticalmente?

Problema 12. Encuentra todos los números primos p y q tales que:

$$\frac{2^p + 2^q}{pq}$$

sea un número entero.

Problema 13. Sean A y B dos puntos fijos en el plano y sea $\mathcal{L}$ una recta que pasa por A pero no por B. Para P y Q puntos de $\mathcal{L}$ (distintos de A) sean O_P y O_Q los centros de las circunferencias circunscritas a APB y AQB, respectivamente. Muestra que los ángulos $\angle O_P PB$ y $\angle O_Q QB$ son iguales.

Problema 14. Alrededor de una mesa redonda se encuentran sentadas n personas, a quienes se les reparten $2n$ tarjetas (numeradas del 1 al $2n$) de manera que una persona tiene las tarjetas $(1, 2)$, la persona a su derecha las tarjetas $(3, 4)$, a la derecha quedan $(5, 6)$, etc. De manera simultánea, cada persona toma la tarjeta con el número menor (de las dos que tiene) y la pasa a quien esté sentado a su derecha. Este paso se repite una infinidad de veces.
(a) Demuestra que a partir de cierto momento, hay n tarjetas que ya no se mueven.
(b) ¿Cuántos pasos son necesarios para alcanzar el momento mencionado en el inciso a?

Problema 15. ¿Para qué enteros positivos n, se tiene que el mayor entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ es un número primo?

Problema 16. Aquiles y la tortuga se encuentran en las esquinas opuestas de un tablero de ajedrez de 5×5. Entre ellos se desarrolla un juego con las siguientes reglas:
(i) Cada uno puede moverse de una casilla a otra casilla adyacente (en diagonal no) y en cada jugada, Aquiles hace 3 movimientos consecutivos y la tortuga dos movimientos. Por ejemplo, la tortuga puede moverse a una casilla y regresar, finalizando su jugada donde la empezó.
(ii) Gana aquel que al final de su jugada llegue justo a la casilla que ocupa su

adversario.
Si la tortuga hace la primera jugada y ambos juegan simultáneamente, ¿quién puede asegurar la victoria?

Problema 17. En cierto juego hay varios montones de piedras que pueden modificarse de acuerdo a las siguientes 2 reglas:
(1) Se pueden juntar dos de los montones en uno solo.
(2) Si un montón tiene un número par de piedras, se puede partir en dos montones con el mismo número de piedras cada uno.
Al principio hay tres montones, uno de ellos tiene 5 piedras, otro tiene 49 y el otro tiene 51. Determina si es posible lograr, con movimientos sucesivos, y siguiendo las reglas (1) y (2), que al final haya 105 montones, cada uno con una piedra.

Problema 18. Hay $2n+1$ duendes. Al principio cada duende tiene exactamente n amigos entre los demás duendes. Cada día cada duende se convierte en amigo de los amigos de sus amigos. Prueba que debe llegar un día en el que todos sean amigos entre sí.

Problema 19. Encuentra todos los números enteros n que satisfagan todas las condiciones siguientes: $n < 1000$, n es múltiplo de 3, n termina en 1 y n es suma de dos cuadrados.

Problema 20. En un triángulo ABC un punto D en el segmento BC es tal que $BD = 2DC$. Sea E el pie de la altura de ABC por B y sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por C y que es perpendicular a AC. Sea O el punto sobre $\mathcal{L}$ tal que $OB = OE$. Prueba que D, E y O están alineados.

Problema 21. Encuentra todas las parejas de enteros (x, p) con p primo y tales que:

$$xp^2 - 3 \cdot 2^p = x^3.$$

Problema 22. En un círculo están marcados en forma consecutiva (en el orden de las manecillas del reloj) los números del 1 al 2004. En cada número múltiplo de 6 hay una ficha marcada con el mismo número de su casilla. Cada segundo cada ficha se mueve en el sentido de las manecillas del reloj el mismo número de espacios de la ficha (por ejemplo, después de 4 segundos, la ficha 30 está en la casilla 150). ¿Cuántos segundos deben de transcurrir para que todas las fichas estén por primera vez juntas en una misma casilla?

Problema 23. Se dispone de colchones de hule espuma que se van a encimar unos sobre otros (uno a la vez) para formar una torre. Unos colchones pesan 1 Kg y miden 1 cm de alto; otros pesan 2 Kg y miden 2 cm de alto. Cada vez que se coloca un colchón de 1 Kg encima de los que ya están apilados, todos los de abajo disminuyen su altura a la mitad, y cada vez que se coloca un colchón de 2 Kg encima de los que ya están apilados, todos los de abajo disminuyen su altura a la cuarta parte. Prueba que es posible encimar colchones de manera que la torre al final mida más de 2.666 cm, pero que no es posible lograr una altura final de $\frac{8}{3}$ cm.

Problema 24. Sobre cada lado de un paralelogramo se dibuja un cuadrado (hacia el exterior del paralelogramo y de manera que el lado del cuadrado sea el lado respectivo del paralelogramo). Prueba que los centros de los cuatro cuadrados son los vértices de otro cuadrado.

Problema 25. En una ciudad hay dos ríos paralelos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ unidos por 10 calles y separados por otras 5 calles, de manera que las calles forman una cuadrícula. ¿Cuántas rutas de autobús se pueden diseñar del río $\mathcal{R}$ al río $\mathcal{S}$ si durante el recorrido total el autobús debe dar menos de 5 vueltas y no debe pasar dos veces por un mismo lugar?

Problema 26. Considera una región cuadrada del plano látice que mide 2004 puntos de lado. ¿Cuántos triángulos isósceles con vértices en los puntos de esa región se pueden formar si se quiere que el lado desigual sea vertical?

Problema 27. Se tienen 2004 fichas hexagonales con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 escritos uno en cada lado en sentido de las manecillas del reloj. Se va a formar una cadena con todas las fichas siguiendo las reglas del dominó; es decir, dos fichas se unen por uno o más lados si los números escritos en los lados que comparten son iguales en ambas fichas. Después de hacer la cadena se suman los números que quedan alrededor de la cadena (los que no son compartidos para unir dos fichas). ¿Cuál es el mayor valor que puede tener esa suma?

Problema 28. Dos personas A y B juegan en un tablero en forma de círculo. Por turnos alternados cada uno pone una ficha dentro del tablero sin mover ninguna de las que ya estaban puestas. Inicialmente hay una ficha en cualquier lugar del tablero y el primer movimiento lo hace A. Pierde el que ya no puede poner fichas. ¿Cuál jugador tiene una estrategia ganadora? Describe la estrategia.

Problema 29. Prueba que la suma de cualesquiera n números primos es mayor que n^2.

Problema 30. Cada entero del 1 al 100 (ambos inclusive) se colorea de rojo, azul, verde o amarillo. Demuestra que hay dos números del mismo color cuya diferencia es también de ese color.

Problema 31. Para cada número natural n, sea S_n la suma de los números enteros contenidos en el intervalo abierto $(2^n, 2^{n+1})$. Demuestra que S_n es múltiplo de 3, para toda n. (Por ejemplo, si $n = 3$, S_n es la suma de los enteros que están en el intervalo $(8, 16)$. Es decir, $S_n = 9+10+11+12+13+14+15$).

Problema 32. En un triángulo ABC, una recta que pasa por el baricentro de él, corta a los lados AB y AC en los puntos M y N, respectivamente. Demuestra que:

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1.$$

Problema 33. Sea n un número natural. Encuentra los valores de n para los que:

$$\frac{1 + 11n}{2n - 1}$$

es un entero.

Problema 34. La distancia entre dos ciudades A y B es de 9999 kilómetros. A lo largo de la carretera, que une a estas ciudades, hay *postes indicadores* de los kilómetros, en los que están escritas las distancias hasta A y hasta B. ¿Cuántos postes habrá, entre ellos, en los cuales sólo aparezcan 2 cifras distintas? (En el primer poste aparece $(0, 9999)$ y en el último poste, $(9999, 0)$.)

Problema 35. Sean A y B los puntos de intersección de las circunferencias C_1 y C_2 con centros O y Q, respectivamente. Sea $\mathcal{L}$ una tangente común a dichas circunferencias, M y N los puntos de contacto de $\mathcal{L}$ con C_1 y C_2, respectivamente. Demuestra que las bisectrices de los ángulos MOB, OBQ y BQN son concurrentes.

Problema 36. ¿Cuántas parejas de números naturales cumplen que su máximo común divisor es d y su mínimo común múltiplo es $dp^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$, donde p, q, r y s son primos distintos?

Problema 37. En un triángulo escaleno ABC, la mediana trazada a partir de A, la altura trazada a partir de B y la bisectriz trazada a partir de C, son concurrentes. ¿Qué relación existe entre las medidas de los lados del triángulo?

Problema 38. En el cuadrilátero $ABCD$, la circunferencia circunscrita al triángulo BCD corta a AC en el punto E y la circunferencia circunscrita al triángulo ACD corta a BC en el punto F.
Demuestra que $(AD)(DE)(BF)^2 = (BD)(DF)(AE)^2$.

Problema 39. Dado un número natural n, sea $P(n)$ el producto de todos los divisores positivos de n. Encuentra todos los valores de n, menores que 400, tales que n tiene sólo 2 divisores primos distintos y $P(n) = n^6$. (Por ejemplo: $P(12) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728$).

Problema 40. En una circunferencia se toman n puntos, cada uno de los cuales es etiquetado con a o b. Prueba que existen a lo más $\lfloor \frac{3}{2}n + 2 \rfloor$ cuerdas que unen puntos con etiquetas diferentes y que no se intersectan. (El símbolo $\lfloor x \rfloor$ se conoce como la parte entera de x y representa al mayor entero que es menor o igual que x. Por ejemplo, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$).

Problema 41. Considera la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC (con $AC = BC$). En el arco BC, opuesto al punto A, se elige un punto D. Sea E un punto en AD tal que CE y AD son perpendiculares. Demuestra que $AE = BD + DE$.

Problema 42. Si m es un número natural que termina en 5, muestra que $12^m + 9^m + 8^m + 6^m$ es un múltiplo de 1991.

Problema 43. En el triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A y la mediana trazada a partir de A cortan a BC en 2 puntos distintos D y E, respectivamente. Sea M el punto de intersección de AE y la perpendicular a AD trazada a partir de B. Prueba que AB y DM son paralelas.

Problema 44. Con una balanza y 5 pesas, quieres pesar objetos que varían en cantidades enteras entre 1 y 121 Kg. ¿De cuánto tienen que ser las pesas?

Problema 45. A cada vértice de un cubo se le asigna el valor $+1$ ó -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Problema 46. Prueba que si $a + b = 1$, donde a y b son números positivos, entonces:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Problema 47. Prueba que existen 10 enteros distintos tales que la suma de cualesquiera 9 de ellos es un cuadrado perfecto.

Problema 48. Supóngase que un hexágono regular $ABCDEF$ tiene área 2004. Trácense líneas uniendo los vértices alternadamente. Con las intersecciones de éstas se formará un hexágono en el interior. Calcula el área del nuevo hexágono.

Problema 49. ¿De cuántas maneras distintas se pueden llenar las casillas de un arreglo rectangular de $m \times n$ con los números 1 y -1 de tal manera que el producto de las entradas en cada renglón y en cada columna sea -1?

Problema 50. Sea ABC un triángulo acutángulo. Las bisectrices de los ángulos B y C intersectan los lados opuestos en los puntos L y M, respectivamente. Prueba que existe un punto K en el interior del lado BC tal que el triángulo KLM es equilátero si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Problema 51. Considera un tablero de ajedrez de 8×8. En cada casilla de 1×1 se dibuja una flecha con dirección hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda. La arista superior de la casilla de 1×1 en la esquina superior derecha del tablero es la salida del tablero de ajedrez. Una moneda se coloca en la casilla de 1×1 de la esquina inferior izquierda del tablero y después se mueve en una sucesión de turnos. En cada turno, la moneda se mueve una casilla en la dirección de la flecha, luego a la flecha que estaba en la casilla de donde se movió la moneda, se le aplica una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj. Si la dirección de la flecha de una casilla en la orilla del tablero es hacia afuera del tablero (y no hacia la salida del tablero), la moneda no se mueve y la flecha se rota 90° en el sentido de las manecillas del reloj. Prueba que tarde o temprano la moneda sale del tablero.

Problema 52. Sea M el conjunto que consiste de los siguientes 2004 números: $10^1+1, 10^2+1, \ldots, 10^{2004}+1$. Prueba que al menos $99\,\%$ de los elementos de M no son primos.

Problema 53. Sea M la intersección de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$. La bisectriz del ángulo $\angle ACD$ intersecta a BA en K. Si:

$$MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD,$$

prueba que $\angle BKC = \angle CDB$.

Problema 54. Un entero positivo es llamado monotónico si sus dígitos en base 10, de izquierda a derecha, están en orden no decreciente. Prueba que para cada entero positivo n, existe un número monotónico de n dígitos que es un cuadrado perfecto.

Problema 55. Sean A y B dos puntos situados en el mismo lado de una recta XY. Encuentra el punto M en la recta tal que la suma $AM + MB$ es mínima.

Problema 56. Sea ABC un triángulo. Si pintamos todos los puntos del plano de rojo y verde, prueba que existen dos puntos rojos con distancia 1 entre ellos o tres puntos verdes que forman un triángulo congruente al ABC.

Problema 57. ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ existen tales que la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos sea mayor o igual que 3?

Problema 58. Considera 2004 puntos rojos fijos en el espacio en posición general (no hay tres puntos colineales y no hay cuatro puntos coplanares). Para cualesquiera tres de esos puntos rojos se dibuja el plano que los contiene. Muestra que para cualquier elección de 2001 puntos cualesquiera en el espacio (algunos de los cuales pueden ser rojos), uno de los planos considerados anteriormente no contiene ninguno de estos 2001 puntos.

Problema 59. Toma 4 puntos del plano, tales que cualesquiera tres de ellos no son colineales. Para cada uno de estos puntos se trazan las perpendiculares a las rectas que determinan los otros tres. Considera que no hay dos de esas perpendiculares que coincidan. Encuentra el máximo número de puntos de intersección determinados por estas rectas perpendiculares.

Problema 60. (a) Encuentra todos los enteros positivos k para los cuales es posible encontrar dos enteros a y b mayores que k tales que $(a - k)$, $(b - k)$ y $(ab - k)$ son cuadrados perfectos.
(b) Encuentra todos los enteros positivos k para los cuales es posible encontrar dos enteros a y b mayores que k tales que $(a - k)$, $(b - k)$ y $(a + b - k)$ son cuadrados perfectos.

1.2. Problemas de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Problema 1. (16a OMM) En una cuadrícula de 32×32 se escriben los números del 1 al 1024 de izquierda a derecha, con los números del 1 al 32 en el primer renglón, los del 33 al 64 en el segundo, etc.

La cuadrícula se divide en cuatro cuadrículas de 16×16 que se cambian de lugar entre ellas como sigue:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline d & c \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline d & c \\ \hline\end{array}$$

Después, cada cuadrícula de 16×16 se divide en cuatro cuadrículas de 8×8 que se cambian de lugar del mismo modo; a su vez cada una de esas se divide y así sucesivamente hasta llegar a cuadrículas de 2×2 que se dividen en cuadros de 1×1, los cuales se cambian de lugar del mismo modo.
Al terminar estas operaciones, ¿qué números quedan en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha en la cuadrícula de 32×32?

Problema 2. (16a OMM) Sean $ABCD$ un paralelogramo y $\mathcal{K}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABD. Sean E y F las intersecciones de $\mathcal{K}$ con los lados (o sus prolongaciones) BC y CD respectivamente (E distinto de B y F distinto de D). Demuestra que el circuncentro del triángulo CEF está sobre $\mathcal{K}$.

Problema 3. (16a OMM) Sean n un entero positivo. ¿Tiene n^2 más divisores positivos de la forma $4k+1$ o de la forma $4k-1$?

Problema 4. (16a OMM) Una ficha de dominó tiene dos números (no necesariamente diferentes) entre 0 y 6. Las fichas se pueden voltear, es decir, $\boxed{4|5}$ es la misma ficha que $\boxed{5|4}$. Se quiere formar una hilera de fichas de dominó distintas de manera que en cada momento de la construcción de la hilera, la suma de todos los números de las fichas puestas hasta ese momento sea impar. Las fichas se pueden agregar de la manera usual a ambos extremos de la hilera, es decir, de manera que en cualesquiera dos fichas consecutivas aparezca el mismo número en los extremos que se juntan. Por ejemplo, se podría hacer la hilera: $\boxed{1|3}\ \boxed{3|4}\ \boxed{4|4}$, en la que se colocó primero la ficha del centro y luego la de la izquierda. Después de poner la primera ficha, la suma de todos los números es 7; después de poner la segunda, 11; después de la tercera, 19.
¿Cuál es la mayor cantidad de fichas que se pueden colocar en una hilera?
¿Cuántas hileras de esa longitud máxima se pueden construir?

Problema 5. (16a OMM) Tres enteros distintos forman una terna *compatible* si alguno de ellos, digamos n, cumple que cada uno de los otros dos es, o bien divisor, o bien múltiplo de n. Para cada terna compatible de números entre 1

y 2002 se calcula la suma de los tres números de la terna. ¿Cuál es la mayor suma obtenida? ¿Cuáles son las ternas en las que se obtiene la suma máxima?

Problema 6. (16a OMM) Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y tal que el ángulo CMD es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo AKB es recto y que

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

Problema 7. (17a OMM) Dado un número k de dos o más cifras, se forma otro entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k.

Problema 8. (17a OMM) Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea $\mathcal{Y}$ una circunferencia tangente a AC en B, y sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ las circunferencias de diámetros AB y BC, respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Supón que la recta PQ corta a $\mathcal{X}$ en un punto R distinto de P, y que esa misma recta PQ corta a $\mathcal{Z}$ en un punto S ditinto de Q. Demuestra que concurren AR, CS y la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ por B.

Problema 9. (17a OMM) En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan a muchachos y que a cada muchacho le gustan b muchachas. ¿Para qué valores de a y b es correcto afirmar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Problema 10. (17a OMM) Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC. Se toman puntos P y Q sobre AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB. Pruebe que la longitud de MN depende sólo de las longitudes de AB y DC, y calcula su valor.

Problema 11. (17a OMM) Se escriben en tarjetas todas las parejas de enteros (a, b) con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue: cada jugador en su turno elige (a, b) (que se retira del juego) y escribe el producto $a \cdot b$ en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta ese momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?)

Problema 12. (17a OMM) Dado un entero n un *cambio sensato* consiste en sustituir n por $2n+1$ ó $3n+2$. Dos enteros positivos a y b se llaman *compatibles* si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de a, como a partir de b. Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.

Problema 13. (18a OMM) Encuentra todos los números primos p, q y r con $p < q < r$, que cumplan con $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

Problema 14. (18a OMM) ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos a y b (con $a \neq b$) cumplan que,

$$|a - b| \geq \frac{ab}{100}?$$

Problema 15. (18a OMM) Sean Z y Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB y CA, respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado de BC, corta a CA en N. Sea L el punto sobre CA tal que $NL = AB$ (y L del mismo lado de N que A). La recta ML corta a AB en K. Muestra que $KA = NC$.

Problema 16. (18a OMM) Al final de un torneo de fútbol en el que cada par de equipos jugaron entre si exactamente una vez y donde no hubo empates, se observó que para cualesquiera tres equipos A, B y C, si A le ganó a B y B le ganó a C entonces A le ganó a C.
Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser 5000. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo? Encuentra todas las respuestas posibles.

Problema 17. (18a OMM) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos circunferencias tales que el centro O de $\mathcal{B}$ esté sobre $\mathcal{A}$. Sean C y D los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto A sobre $\mathcal{A}$ y un punto B sobre $\mathcal{B}$ tales que AC es tangente a $\mathcal{B}$ en C y BC es tangente a $\mathcal{A}$ en el mismo punto C. El segmento AB corta de nuevo a $\mathcal{B}$ en E y ese mismo segmento corta de nuevo a $\mathcal{A}$ en F. La recta CE vuelve a cortar a $\mathcal{A}$ en G y la recta CF corta a la recta GD en H. Prueba que el punto de intersección de GO y EH es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo DEF.

Problema 18. (18a OMM) ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de 2004×2004 casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?

Capítulo 2

Olimpiadas Internacionales en las que participa México

2.1. XVI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Problema 1. Determinar todos los conjuntos finitos no vacíos S de enteros positivos que satisfacen:

$$\frac{i+j}{(i,j)} \qquad \text{es un elemento de } S \text{ para todo } i,j \text{ en } S,$$

donde (i,j) es el máximo común divisor de i y j.

Problema 2. Sean O el circuncentro y H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. Probar que el área de uno de los triángulos AOH, BOH y COH es igual a la suma de las áreas de los otros dos.

Problema 3. Sea S un conjunto de 2004 puntos en el plano tales que tres cualesquiera de ellos no son colineales. Denotemos con $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las rectas (extendidas indefinidamente en ambas direcciones) determinadas por pares de puntos del conjunto. Demostrar que es posible colorear los puntos de S con a lo más dos colores, tal que para cualquier par de puntos p,q de S, el número de rectas en $\mathcal{L}$ que separan p de q es impar si y sólo si p y q tienen el mismo color.

Nota: Una recta l *separa* dos puntos p y q si p y q están situados en lados opuestos de l, con ninguno de ellos sobre l.

Problema 4. Para un número real x, sea $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero que es menor o igual a x. Probar que:

$$\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor$$

es par para todo entero positivo n.

Problema 5. Probar que:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

para todos los números reales $a, b, c > 0$.

2.2. VI Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe

Problema 1. En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero.
Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.
Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar como juegue su rival.

Problema 2. Se define una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$, de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$. Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Problema 4. Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

Problema 5. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90°$.
b) Sea Q el punto medio de BC y R el punto de corte de la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.

Problema 6. Con perlas de diversos colores se forman collares. Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre sí. Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.
Nota: Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

2.3. XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problema 1. Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el mínimo número de casillas que se deben colorear.

Problema 2. Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

Problema 3. Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que mcd$(a, n) =$ mcd$(b, n) = 1$ y $k = a + b$.

Problema 4. Determinar todas las parejas (a, b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a + b$ y $201a + b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

Problema 5. Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente. Sean: A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA', B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB', C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'. Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

Problema 6. Para un conjunto $\mathcal{H}$ de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un *punto de corte* de $\mathcal{H}$ si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en $\mathcal{H}$ tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.
Dado un conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$ de la siguiente manera: para cualquier $j \geq 0$, $\mathcal{A}_{j+1}$ es la unión de $\mathcal{A}_j$ con el conjunto de todos los puntos de corte de $\mathcal{A}_j$.
Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier $j \geq 1$ se tiene que $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

2.4. 45^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

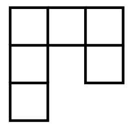
Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. La circunferencia de diámetro BC corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio de BC. Las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle MON$ se cortan en R. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos BMR y CNR tienen un punto común que pertenece al lado BC.

Problema 2. Encontrar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad:

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

para todos los números reales a, b, c tales que $ab+bc+ca=0$.

Problema 3. Un *gancho* es una figura formada por seis cuadrados unitarios como se muestra en el diagrama



o cualquiera de las figuras que se obtienen de ésta rotándola o reflejándola. Determinar todos los rectángulos $m \times n$ que pueden cubrirse con ganchos de modo que:
• el rectángulo se cubre sin huecos y sin superposiciones;
• ninguna parte de ningún gancho sobresale del rectángulo.

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un entero. Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números reales positivos tales que:

$$n^2+1>(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Demostrar que t_i, t_j, t_k son las medidas de los lados de un triángulo para todos los i, j, k con $1 \leq i < j < k \leq n$.

Problema 5. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no es la bisectriz ni del ángulo ABC ni del ángulo CDA. Un punto P en el interior de $ABCD$ verifica:

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ y } \angle PDC = \angle BDA.$$

Demostrar que los vértices del cuadrilátero $ABCD$ pertenecen a una misma circunferencia si y sólo si $AP = CP$.

Problema 6. Un entero positivo es *alternante* si en su representación decimal en toda pareja de dígitos consecutivos uno es par y el otro es impar.
Encontrar todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo que es alternante.

Capítulo 3

Soluciones de los Problemas

3.1. Soluciones de los Problemas de Práctica

Solución del problema 1. Notemos que $a+5b \equiv 0$ (mod 2002) $\Rightarrow a^2+5ab \equiv 0$ (mod 2002) y $5a-b \equiv 0$ (mod 2002) $\Rightarrow -5ab+b^2 \equiv 0$ (mod 2002). Por lo tanto, $(a^2+5ab)+(-5ab+b^2) = a^2+b^2 \equiv 0$ (mod 2002), es decir a^2+b^2 es divisible por 2002.

Solución alternativa: Tenemos que $a+5b \equiv 0 \pmod{2002} \Rightarrow (a+5b)^2 \equiv 0 \pmod{2002^2}$ y $5a-b \equiv 0 \pmod{2002} \Rightarrow (5a-b)^2 \equiv 0 \pmod{2002^2}$, de donde $(a+5b)^2+(5a-b)^2 \equiv 0 \pmod{2002^2}$. De aquí se sigue que $26(a^2+b^2) \equiv 0 \pmod{2002^2}$, y en consecuencia $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{77 \cdot 2002}$. Se sigue finalmente que a^2+b^2 es divisible por 2002.

Solución del problema 2. Sean r el radio de S y Q el punto de tangencia de S en el lado CD. Los triángulos AOB y DOC son semejantes, luego $\frac{CO}{AO} = \frac{CD}{AB} = 2$. Como $ABCD$ es un trapecio isósceles, $DO = CO$ y por lo tanto $DO = 2AO = 2r$. El triángulo DOQ es rectángulo y $DO = 2r = 2OQ$, por lo tanto $\angle QDO = 30°$. De la misma forma $\angle QCO = 30°$, luego $\angle AOD = \angle QDO + \angle QCO = 60°$. Como $DO = 2AO$, el ángulo DAO debe ser recto, así como también lo será el ángulo CBO, de donde S es tangente a AD y a BC. De lo anterior podemos deducir que $\angle A = \angle B = 90° + 30° = 120°$ y que $\angle C = \angle D = 30° + 30° = 60°$.

Solución del problema 3. Para que la suma de los números escritos en cada renglón sea impar, cada una debe tener un número impar de impares. Luego hay uno o tres impares en cada renglón. En total hay 8 impares, entonces necesariamente hay dos renglones con tres impares y dos con un impar cada uno. Lo mismo podemos decir sobre las columnas.
Primero vamos a calcular el número de formas en que se pueden escoger las casillas donde hay impares. Los dos renglones donde hay tres impares se pueden escoger de $\binom{4}{2} = 6$ maneras. Observemos ahora las columnas. Como hay dos columnas con exactamente un impar, las otras dos columnas deben de tener impares exactamente en los renglones escogidos anteriormente. Éstas dos columnas se pueden escoger de $\binom{4}{2}$ maneras.
En cada uno de los dos renglones donde hay tres impares falta escoger una casilla donde hay un impar, y como no pueden estar en la misma columna, hay 2 formas de escoger estas dos casillas.
Las otras dos casillas donde hay impares deben estar en las columnas donde hay ya dos casillas con impares, como no pueden estar en el mismo renglón entonces hay 2 maneras de escoger estas dos casillas. En total hay $\binom{4}{2}^2 \times 2 \times 2 = 144$ maneras de escoger las ocho casillas donde hay impares. En esas casillas hay $8!$ formas de colocar los impares y en las casillas restantes hay $8!$ formas de colocar los pares. Por lo tanto, la respuesta es $144 \times (8!)^2$.

Solución del problema 4. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p \geq q$. Entonces $2^{2p} + 2^{2q} = 4^q(4^{p-q} + 1)$. Siendo 4^q un cuadrado, es suficiente demostrar que $4^{p-q} + 1$ no puede ser un cuadrado. Para ver esto, notemos que la diferencia más pequeña entre cualquier par de cuadrados perfectos es $4 - 1 = 3$. Luego, ya que 4^{p-q} es un cuadrado y la diferencia entre $4^{p-q} + 1$ y 4^{p-q} es 1, se sigue que $4^{p-q} + 1$ no puede ser un cuadrado.

Solución alternativa: Notemos que $2^{2p} + 2^{2q} = 4^p + 4^q \equiv 1^p + 1^q = 2 \pmod 3$ para cualesquiera enteros no negativos p y q. Como todo cuadrado es congruente con 0 o con 1 módulo 3, se sigue que $2^{2p} + 2^{2q}$ no es el cuadrado de ningún entero.

Solución del problema 5. Denotemos por a_i al número que quedó en la posición i con $1 \leq i \leq 12$. Consideremos las doce sumas S_i de ternas de números ocupando posiciones consecutivas, esto es:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3, S_2 = a_2 + a_3 + a_4, \ldots, S_{12} = a_{12} + a_1 + a_2.$$

Es claro que cada número entre 1 y 12 aparece como sumando en exactamente tres de estas sumas (por ejemplo, a_2 aparece en S_1, S_2 y S_{12}). Por lo tanto, si sumamos todos los S_i, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{12} S_i = 3(1 + 2 + \cdots + 12) = \frac{3(12)(13)}{2} = 234.$$

Dividiendo 234 por 12, vemos que el cociente es 19 y el resto es 6. Luego, por el principio de las casillas, algún sumando S_k debe valer por lo menos 20, como queríamos probar.

Solución del problema 6. Notemos primero que la condición $\angle PCA < \angle PAB$ asegura que F no esté entre C y E. Ahora, ya que $\angle PCA = \angle PBC = \angle EBC$ y $\angle EBC = \angle EAC$ (esto último por ser ángulos sobre el mismo arco), tenemos que $\angle EAC = \angle PCA$ y por lo tanto AE y CP son paralelas. Luego, los triángulos APE y ACE tienen áreas iguales.
Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Area}(APEF) &= \text{Area}(AEF) + \text{Area}(APE) \qquad (3.1)\\ &= \text{Area}(AEF) + \text{Area}(ACE) \\ &= \text{Area}(ACF). \end{aligned}$$

Ahora, por ser $APEF$ cíclico y B, P y E colineales, tenemos que $\angle APE + \angle AFE = 180° = \angle APE + \angle APB$, de donde $\angle AFE = \angle APB$. Como los ángulos ACE y ABE están sobre el mismo arco, tenemos también que $\angle ACE = \angle ABE$. Por lo tanto, los triángulos ACF y ABP son semejantes, lo cual implica que:

$$\frac{\text{Area}(ACF)}{\text{Area}(ABP)} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2. \qquad (3.2)$$

De (3.1) y (3.2) se sigue el resultado.

Solución del problema 7. Sean a, b y c las longitudes de los 3 arcos. Supongamos que hay x arcos de longitud a, y arcos de longitud b y z arcos de longitud

c. Entonces $x+y+z=2n$. Cada lado del n-ágono con vértices rojos está subtendido por un arco de longitud $b+c$, $c+a$ ó $a+b$. De estos n arcos, x de ellos contienen un arco de longitud a, así que el número de arcos de longitud $b+c$ es $n-x$. Análogamente, el número de arcos de longitud $c+a$ es $n-y$ y el número de arcos de longitud $a+b$ es $n-z$. Exactamente lo mismo sucede con el n-ágono con vértices azules. De aquí que los dos polígonos tienen el mismo perímetro.
Por la misma razón, el área de la parte del círculo afuera del n-ágono con vértices rojos es igual a la del n-ágono con vértices azules. En consecuencia, los dos polígonos tienen también la misma área.

Solución del problema 8. El triángulo ABC es rectángulo, y por lo tanto el centro de su circunferencia circunscrita es el punto medio de su hipotenusa AC. Sea M el punto medio de AC. Como $ABCD$ es un cuadrado, tenemos que $AM=BM=MC=MD$. Sea $\angle BAP=\alpha$ y $\angle BPA=\beta$. Como el triángulo ABP es rectángulo, tenemos que $\alpha+\beta=90°$. Es fácil ver que $\angle RPC=180°-90°-\beta$, de donde $\angle RPC=\alpha$. En el triángulo rectángulo isósceles ABC, tenemos que $\angle BAC=45°$. Luego, $\angle PAC=\angle BAC-\angle BAP=45°-\alpha$. Y en el triángulo rectángulo isósceles APR tenemos que $\angle PAR=\angle PRA=45°$. Luego, $\angle RAC=\angle PAR-\angle PAC=45°-(45°-\alpha)=\alpha$, de donde $\angle RAC=\angle RPC$. Luego, el cuadrilátero $APCR$ es cíclico, de modo que $\angle APR=\angle ACR=90°$. De aquí que CR y AC son perpendiculares. Como AC es diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC, se sigue que CR es tangente.

Solución del problema 9. Ya que $EF\parallel BC$, tenemos que $\triangle AEF\sim\triangle ABC$ y $\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}$. Análogamente, ya que $EG\parallel AD$ resulta que $\triangle BEG\sim\triangle BAD$ y $\frac{EG}{AD}=\frac{EB}{AB}$. Luego:

$$\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=\frac{AE+EB}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

Sea P el punto de intersección de AN y EF, y Q el punto sobre BC tal que $PQ\parallel AD$. Ya que $BC\parallel EF$ y N es el punto medio de BC, resulta que P es el punto medio de EF. Luego, $EP=PF=GQ$, de donde $PFQG$ es un paralelogramo. Así que el punto medio X de FG debe ser también el punto medio de PQ. Ya que M es el punto medio de AD y $AD\parallel PQ$, se sigue que los puntos M,X,N son colineales.

Solución del problema 10. Notemos que $x^2\equiv 0 \pmod 4$ cuando x es par y $x^2\equiv 1 \pmod 4$ cuando x es impar. Si n es impar, entonces a,b,c y d son todos impares y $n \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 4$, lo cual es una contradicción. Luego, n es par. Ahora, si $4|n$ entonces $a = 1$ y $b = 2$, y $n \equiv 1 + 0 + c^2 + d^2 \not\equiv 0 \pmod 4$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $4 \nmid n$. Luego $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, p, q\}$ o $\{1, 2, p, 2p\}$ para algunos primos impares p y q. En el primer caso, $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + q^2 \equiv 1 + 0 + 1 + 1 = 3 \pmod 4$ lo cual es una contradicción porque n es par. Entonces debemos tener que $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + 4p^2 = 5(1 + p^2)$, de donde $5|n$. Luego, $p = c = 5$ y $d = 2p = 10$. Por lo tanto, la única solución es $n = 130$.

Solución del problema 11. No es posible. En efecto, pintemos las columnas del tablero de blanco y negro alternadamente, comenzando con el color negro. Tenemos entonces que cada rectángulo de 1×2 cubre un cuadrito blanco y un cuadrito negro, mientras que cada rectángulo de 1×3 cubre tres cuadritos del mismo color. Supongamos que sí se puede cubrir la cuadrícula. Sea n el número de rectángulos de 1×2. Entonces el número de rectángulos negros de 1×3 es igual a $\frac{2003 \cdot 1002 - n}{3}$ y el número de rectángulos blancos de 1×3 es igual a $\frac{2003 \cdot 1001 - n}{3}$. Como estos dos números deben ser enteros, la diferencia de ellos igual a $\frac{2003}{3}$ también deber ser un entero, lo que es una contradicción.

Solución del problema 12. Primero demostraremos que *si $k > 1$, entonces k no divide a* $2^{k-1} + 1$. En efecto, supongamos que $k > 1$ divide a $2^{k-1} + 1$. Es claro que k debe ser impar. Sea $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son primos impares distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ son enteros positivos y $r \geq 1$. Sea $p_i - 1 = 2^{m_i} t_i$, donde los t_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, son enteros impares. Sea m_1 el menor de los números $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Como $p_i \equiv 1 \pmod{p_i - 1}$, tenemos que $p_i \equiv 1 \pmod{2^{m_i}}$ y $p_i^{\alpha_i} \equiv 1 \pmod{2^{m_i}}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. Luego, $k \equiv 1 \pmod{2^{m_1}}$, de donde $k - 1 = 2^{m_1} u$ para algún entero u. Como $2^{k-1} \equiv -1 \pmod k$, tenemos que:

$$2^{(p_1 - 1)u} = 2^{(2^{m_1} t_1)(\frac{k-1}{2^{m_1}})} = 2^{(k-1)t_1} = (2^{k-1})^{t_1} \equiv (-1)^{t_1} = -1 \pmod k,$$

ya que t_1 es impar. En particular, $2^{(p_1-1)u} \equiv -1 \pmod{p_1}$. Pero $2^{p_1 - 1} \equiv 1 \pmod{p_1}$ según el Pequeño Teorema de Fermat. Luego, $1 \equiv -1 \pmod{p_1}$ que es una contradicción.

Supogamos ahora que $2^p + 2^q$ es divisible por pq. Consideremos los siguientes casos:

1). p y q son primos impares distintos. Entonces $2^p + 2^q \equiv 0 \pmod p$ y como $2^p \equiv 2 \pmod p$ por el Pequeño Teorema de Fermat, tenemos que $2^q \equiv -2 \pmod p$ y $2^{pq} \equiv (-2)^p \equiv -2 \pmod p$, donde la última congruencia se sigue por el Pequeño Teorema de Fermat. De manera análoga tenemos que

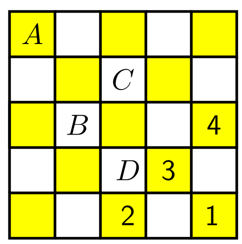
$2^{pq} \equiv -2 \pmod{q}$. Luego, $2^{pq} \equiv -2 \pmod{pq}$ ya que p y q son primos relativos. Se sigue entonces que $2^{pq-1} \equiv -1 \pmod{pq}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.
2). $p = 2$ y $q > 2$. Entonces $4 + 2^q \equiv 0 \pmod{q}$, y como $2^q \equiv 2 \pmod{q}$, tenemos que $6 \equiv 0 \pmod{q}$, de donde $q = 3$. Luego, en este caso la única solución es $p = 2$ y $q = 3$.
3). Es fácil ver que $p = q = 2$ es solución.
En consecuencia, las únicas soluciones son $p = q = 2$; $p = 2$, $q = 3$; y $p = 3$, $q = 2$.

Solución del problema 13. Dado que las distancias BO_P y PO_P son iguales tenemos que el triángulo BO_PP es isósceles, $\angle O_PPB = \angle O_PBP$, y, por lo tanto, $\angle O_PPB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle PO_PB)$. Recordando que O_P es el centro de la circunferencia circunscrita es fácil ver que $\frac{1}{2}\angle PO_PB = \angle PAB$ (si O_P cae dentro de APB) o que $\frac{1}{2}\angle PO_PB = 180^\circ - \angle PAB$ (si O_P está fuera de APB). En cualquier caso, $\angle PO_PB$ es igual a la mitad del menor ángulo que forman BA y $\mathcal{L}$. Como este ángulo no depende de P entonces $\angle PO_PB$ es constante y $\angle O_PPB$ también.

Solución del problema 14. (a) Observemos la suma de las tarjetas que se mueven en cada paso. Es claro que si una tarjeta que se mueve en cierta ocasión no se mueve en el paso siguiente es porque se mueve una tarjeta con un número menor y, en tal caso, la suma desciende. Como la suma no puede descender infinitamente entonces tenemos que a partir de cierto paso debe estabilizarse y hay n cartas que se mueven y las otras n se quedan estables.
(b) Las tarjetas que van a quedarse en su lugar son las numeradas del $n+1$ al $2n$ y a las que llamaremos "grandes". Una vez que cada persona tenga una de estas cartas habremos alcanzado el momento buscado. Veamos que pasa con estas cartas cuando n es par (el caso impar es análogo). Para esto, llamemos a las personas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comenzando con la que tenía el 1 y continuando hacia su derecha. Antes de iniciar los movimientos, $\frac{n}{2}$ personas ($\{A_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, A_n\}$) tienen todas las cartas grandes. En el siguiente movimiento A_1 y $A_{\frac{n}{2}+1}$ tienen una carta grande y $\{A_{\frac{n}{2}+2}, \ldots, A_n\}$ tienen dos. El siguiente movimiento no cambia la gente que tiene cartas grandes, pero ahora, los que tienen dos son $\{A_{\frac{n}{2}+3}, \ldots, A_n, A_1\}$, así que en el siguiente paso A_2 recibirá una carta grande. Este mecanismo se irá repitiendo y el resultado es que A_1 recibe una carta grande en el primer paso, A_2 la recibe en dos pasos al igual que $A_3, A_4, \ldots, A_{\frac{n}{2}}$. Se necesitan $1 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = n - 1$ pasos.
En el caso n impar los que empiezan con cartas grandes son $\{A_{\frac{n+1}{2}}, \ldots, A_n\}$ y se requieren $1 + 2\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = n - 2$ movimientos.

Solución del problema 15. El mayor entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ puede ser $\frac{n^2}{3}$ (cuando la división es exacta), ó $\frac{n^2-1}{3}$ ó $\frac{n^2-2}{3}$. Para resolver el problema, basta considerar los posibles casos:
1. Si $n^2 = 3p$ entonces p tendría que ser 3 y $n = 3$.
2. Cuando $n^2 - 1 = 3p$ entonces p y 3 deben ser los factores de $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$. La única solución es que $3 = n - 1$ y $p = n + 1$ con lo que obtenemos $n = 4$ también es solución.
3. El tercer caso, $n^2 - 2 = 3p$ no puede ocurrir pues entonces el residuo de dividir n^2 entre 3 sería 2 y los únicos residuos posibles para un cuadrado son 0 y 1 cuando se divide entre 3.

Solución del problema 16. Supongamos que ambos comienzan a jugar en esquinas grises (en lugar de negro). La tortuga siempre finaliza sus jugadas en casillas grises, mientras que Aquiles siempre alterna el color donde finaliza sus jugadas. De esta manera, si Aquiles finaliza una jugada en un cuadro blanco, la tortuga no podrá ganar en su siguiente jugada, sin importar que tan cerca esté. Analicemos las posibilidades usando el siguiente tablero donde A es la posición inicial de Aquiles y 1 la posición inicial de la tortuga.



En su jugada inicial, la tortuga termina en alguna de las casillas marcadas 1 a 4. Aquiles debe moverse a B o C buscando acercarse lo más posible. La tortuga debe regresar a 1 buscando alejarse lo más posible. Cualquier otra posición hace que Aquiles gane. Si entonces Aquiles se mueve a la casilla D, ganará en su siguiente turno.

Solución del problema 17. En el primer movimiento tenemos que juntar dos de los tres montones de piedras pues ninguno tiene una cantidad par. Si en el primer movimiento juntamos los montones de 51 y 49, en el siguiente paso la cantidad de piedras en cada montón será múltiplo de 5. Como las operaciones posibles son sumar dos montones o dividir uno entre 2, las cantidades de los montones en los siguientes pasos serán nuevamente todos múltiplos de 5; de esta manera será imposible conseguir montones de una sola piedra haciendo estas operaciones. En las otras dos posibilidades para el primer movimiento los montones que resultan son, o ambos múltiplos de 3, o ambos múltiplos de 7, así que, por el mismo argumento, no es posible llegar a montones con una piedra.

Solución del problema 18. Consideremos la gráfica de amistades, es decir, pongamos un punto por cada duende y una línea uniendo dos puntos si los duendes correspondientes son amigos. Es claro que basta fijarse en un duende cualquiera y probar que llega un momento en que él es amigo de todos los demás; para esto también es claro que basta ver que hay un camino formado por las líneas de la gráfica que une a ese duende con todos los demás (es decir, que la gráfica es conexa). Como al principio cada duende es amigo de n duendes, con ellos ya está conectado, de manera que un bloque conexo de la gráfica tiene por lo menos $n+1$ elementos. Si hubiera un duende no conectado con ese bloque, él mismo pertenecería a un bloque de $n+1$ duendes separado del primero. Pero sólo hay $2n+1$ duendes, así que eso no es posible.

Solución del problema 19. Escribamos $n = a^2+b^2$ con a y b enteros positivos. Módulo 10 los residuos de los cuadrados son $0, 1, 4, 9, 6$ y 5. Al considerar todas las sumas de éstos por parejas observamos que las únicas posibilidades en las que el resultado tiene residuo 1 son $5+6$ y $0+1$ (esto se puede analizar rápidamente formando una tabla). Por otro lado, módulo 3 los residuos de los cuadrados son 0 y 1 y, como $1+1 = 2$ no es múltiplo de 3, tenemos que a y b deben ser ambos múltiplos de 3.
1er caso. Uno de los cuadrados, digamos a^2, tiene residuo 5 módulo 10 y el otro, digamos b^2, tiene residuo 6. En este caso, las posibilidades de los residuos de a y b son, por parejas, $(5, 4)$ y $(5, 6)$. Como además sabemos que a y b son múltiplos de 3, tenemos que $a = 15, 45, \ldots$ y $b = 6, 24, \ldots$. Usando ahora que $n < 1000$ observamos que las únicas posibilidades en este caso son $(a, b) = (15, 6)$ y $(a, b) = (15, 24)$, de donde las posibilidades para n son $225 + 36 = 291$ y $225 + 576 = 801$.
2o caso. Uno de los cuadrados, digamos a^2, tiene residuo 0 múdulo 10 y el otro, digamos b^2, tiene residuo 1. En este caso, las posibilidades de los residuos de a y b son, por parejas $(0, 1)$ y $(0, 9)$. Aquí también, usando que a y b son múltiplos de 3, tenemos que $a = 30, 60, \ldots$ y $b = 9, 21, 39, 51, \ldots$, pero como $n < 1000$ la única posibilidad en este caso es $(a, b) = (30, 9)$, de donde $n = 900+81 = 981$.

Solución del problema 20. Sea $\mathcal{K}$ el círculo con centro O y radio OB. Sea F la intersección de CE con $\mathcal{K}$. Como OC es perpendicular a EF, entonces $CE = CF$. Además BF es diámetro de $\mathcal{K}$ (pues $\angle BEF$ es recto), así que O es punto medio de BF. Entonces en el triángulo BEF se tiene que BC y EO son medianas y, como $BD = 2DC$, entonces D es baricentro y así tenemos que EO pasa por D.

Solución del problema 21. Observemos primero que para $n \geq 5$ se tiene que:

$$2^n > n^2. \tag{3.3}$$

(Esto puede probarse formalmente por inducción como sigue: Para $n = 5$, $2^n = 32$ y $n^2 = 25$ así que el resultado es obvio; suponiendo que también lo es para cierta $n \geq 5$, probémoslo para $n+1$: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ que, aplicando la hipótesis de inducción es mayor que $2n^2 = n^2 + n^2$, el cual es mayor que $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ puesto que $n > 2 + \frac{1}{n}$ y entonces $n^2 > 2n + 1$).
Usaremos este resultado varias veces en lo que sigue. Escribamos la ecuación del problema como:

$$x(p^2 - x^2) = 3 \cdot 2^p.$$

1er caso. $x = 1$. Aquí $p^2 - 1 = 3 \cdot 2^p$. Es claro que $p = 2$ y $p = 3$ no satisfacen la ecuación. Para $p \geq 5$ tenemos que $p^2 - 1 < p^2 \leq 2^p < 3 \cdot 2^p$, así que este caso es imposible.
2o caso. $x = 3$. Aquí $p^2 - 9 = 2^p$. También es claro que $p = 2$ y $p = 3$ no satisfacen la ecuación y que, para $p \geq 5$, (3.3) también aplica para decir que no hay solución.
3er caso. $x = 3 \cdot 2^r$, para cierta $r \geq 1$. Entonces $p^2 - 9 \cdot 4^r = 3 \cdot 2^{p-r}$. Como $r \geq 1$, tenemos que $9 \cdot 4^r$ es par. El caso $p = 2$ es claramente imposible, así que p^2 debe ser impar, de donde la única posibilidad es $p = r$ (para que $2^{p-r} = 1$). La ecuación entonces es $p^2 = 9 \cdot 4^p + 1$. Es claro que $p = 3$ no satisface la ecuación y, otra vez, cuando $p \geq 5$, (3.3) nos dice que el lado derecho de la nueva ecuación es siempre mayor que el izquierdo, por lo que tampoco en este caso hay solución.
Entonces no hay ninguna pareja de enteros que satisfaga la ecuación.

Solución del problema 22. La ficha 2004 va siempre a la casilla 2004, así que el único lugar donde pueden encontrarse todas las fichas es en la casilla 2004. Como $2004 = 6 \times 334$, la ficha 6 llega por primera vez a la casilla 2004 después de 333 segundos. Por otro lado, si a es un múltiplo cualquiera de 6, entonces $a + 333a = 334a$ es múltiplo de 2004. Así que la respuesta es 333 segundos.

Solución del problema 23. Llamemos h_n a la altura a la que llegan los colchones después de haber colocado el n-ésimo colchón. Como h_1 es 1 o 2, entonces $h_1 < \frac{8}{3}$. Supongamos, por hipótesis de inducción, que hasta un cierto n se tiene que $h_n < \frac{8}{3}$, y probemos también que $h_{n+1} < \frac{8}{3}$. En el caso en el que el $(n+1)$-ésimo colchón pese 2 Kg, tenemos que $h_{n+1} = 2 + \frac{h_n}{4} < 2 + \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$. En el caso en el que el $(n+1)$-ésimo colchón pese 1 Kg, tenemos que $h_{n+1} = 1 + \frac{h_n}{2} < 1 + \frac{8}{3 \cdot 2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} < \frac{8}{3}$. De esta forma vemos que la altura $\frac{8}{3}$

no puede alcanzarse.
Veamos que con colchones de 2 Kg, en algún momento superamos 2.666 cm. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
h_1 &= 2,\\
h_2 &= 2+\frac{2}{4}=2\left(1+\frac{1}{4}\right),\\
h_3 &= 2+\frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)=2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right),\\
&\vdots\\
h_n &= 2\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)=2\left(\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).
\end{aligned}$$

De aquí ya es claro que podemos lograr $h_n > 2.666$ (al despejar vemos que basta que 4^n sea mayor que $\frac{1}{0.00025} = 4000$, lo cual es cierto para $n \geq 6$).

Solución del problema 24. Digamos que el paralelogramo tiene vértices A, B, C y D, en ese orden. Sean P, Q y R los centros de los cuadrados con bases DA, AB y BC, respectivamente. Por simetría, bastará probar que $PQ = QR$ y que estos dos segmentos forman un ángulo recto. Llamemos a al ángulo $\angle DAB$. Tenemos que a y $\angle ABC$ suman $180°$, así que el ángulo exterior en B (formado por los lados de los cuadrados) es igual a a. Por otro lado, como $AD = BC$, entonces $AP = BR$. También tenemos que $AQ = QB$ y que $\angle PAQ = 45° + \alpha + 45° = \angle BQR$. De aquí que los triángulos APQ y BRQ son congruentes y así $PQ = QR$. Además $\angle AQP = \angle BQR$, por lo que $\angle PQR = \angle AQB = 90°$, como queríamos probar.

Solución del problema 25. Pongamos el río $\mathcal{R}$ en la parte inferior de la cuadrícula. Entonces el recorrido debe empezar verticalmente hacia arriba y terminar también verticalmente hacia arriba. Como cada vuelta cambia el sentido, observamos que el número de vueltas debe ser par.
1er caso. 0 vueltas. En este caso hay 10 caminos.
2o caso. 2 vueltas. La elección de dos calles verticales en orden y la elección de una calle horizontal determinan el camino y esta elección puede hacerse de $5 \times 10 \times 9 = 450$ formas.
3er caso. 4 vueltas. Un camino así está formado por dos recorridos horizontales y tres verticales; sin embargo, el orden de los caminos horizontales elegidos limita las posibilidades para los verticales pues el recorrido no debe autointersectarse. Tenemos entonces dos posibilidades: La primera es escoger las dos

calles horizontales de manera que la primera que recorra el autobús esté más abajo que la segunda (las posibilidades de elección son $\binom{5}{2} = 10$); en este caso cualquier orden de las tres calles verticales es posible y esto puede hacerse de $10 \times 9 \times 9 = 810$ formas. La segunda posibilidad es que la primera calle horizontal elegida esté más arriba que la segunda (esto pasa en $\binom{5}{2} = 10$ casos); aquí las 3 calles verticales deben escogerse de izquierda a derecha o de derecha a izquierda para que el recorrido no se autointersecte, lo cual puede hacerse de $2\binom{10}{3} = 240$ formas. Entonces en el caso de 4 vueltas tenemos $810+240 = 1050$ recorridos.
El total de recorridos es $10 + 450 + 1050 = 1510.$

Solución del problema 26. Observemos una columna de la que escogeremos 2 puntos para formar la base. Los dos puntos que tomemos deben tener una cantidad impar de puntos entre ellos, de otro modo, el punto medio del lado no sería punto látice y el tercer vértice tampoco. Si numeramos los puntos (de arriba a abajo, por ejemplo) nos quedan 1002 con etiqueta par y 1002 con etiqueta impar. Debemos escoger 2 con etiqueta par ó 2 con etiqueta impar para que el tercer vértice exista. Eso se puede hacer de $2 \cdot \binom{1002}{2}$ formas. Por cada pareja de puntos para la base, cualquier punto que se encuentre en el renglón del punto medio puede ser el tercer vértice del triángulo (excepto el mismo punto medio), así que hay 2003 formas de elegir el tercer vértice una vez escogida la base. Finalmente, como para elegir la base hay 2004 columnas, en total tenemos $2 \cdot \binom{1002}{2} \cdot 2003 \cdot 2004$ triángulos con las características pedidas.

Solución del problema 27. Para que la suma sea máxima debemos tener una cadena en que cada ficha esté pegada por la menor cantidad de lados y que éstos tengan los menores números posibles. Así, la cadena debe tener 2002 fichas con dos lados compartidos y 2 fichas (las de los extremos) con un lado compartido. Si se comparten los dos números más pequeños (el 1 y el 2) la primer y segunda ficha deberían estar pegadas por el 1, y la segunda y tercera ficha deberían estar pegadas por el 2; pero es imposible porque la primera y tercera ficha estarían pegadas, compartiendo la primera el lado con 3 y la tercera el lado con 6 y se rompen las reglas del dominó. De modo que los lados que se deben compartir son los que tienen los números 1 y 3. De ese modo, las 2002 fichas de en medio contribuyen con 17 cada una a la suma final, y las de los extremos con 20. Así la suma final es $(2002 \cdot 17) + (2 \cdot 20) = 34,074.$

Solución del problema 28. (Cuando se hable de "simetría" nos referiremos a simetría respecto al centro del tablero). Hay dos opciones para la ficha original (la que esta puesta inicialmente en el tablero): que esté en el centro o que no lo esté.

Caso 1. La ficha original está en el centro. Lo que debe hacer B es jugar con simetría a los movimientos de A. Si A tiene un lugar donde poner la ficha, entonces se asegura que B lo tendrá. De ese modo gana B.

Si la ficha no está en el centro, hay 3 opciones para el primer movimiento de A: que ponga en el centro, que ponga simétrico a la ficha original o que ponga en cualquier otro lado.

Caso 2-(i). La ficha original no está en el centro y A empieza poniendo en el centro. Lo que debe hacer B es poner simétrico a la ficha original y luego jugar simétrico a los movimientos de A. De ese modo gana B como en el caso 1.

Caso 2-(ii). La ficha original no está en el centro y A empieza poniendo simétrico a la original. Si B pone en el centro y luego juega como en el caso 1, ganará.

Caso 2-(iii). La ficha original no está en el centro y A empieza poniendo en cualquier lado. B debe poner en el centro y luego jugar con simetría como en el caso 1. Si A pone simétrico a la original (o a su primer ficha) entonces B pone simétrico a la primer ficha de A (o a la original). De ese modo gana B como en el caso 1.

Solución del problema 29. Sean $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ números primos. Tenemos que:

$$p_1+p_2+\cdots+p_n \geq 2+3+5+\cdots+(2n-1) > 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

Solución del problema 30. Como son 100 números y se usan 4 colores, entonces hay un color que se usa en por lo menos 25 números. Supongamos que es el color rojo y llamemos $r_1, r_2, \ldots, r_{25}$ a esos números. Consideremos las siguientes 24 diferencias: $(r_{25} - r_1), (r_{25} - r_2), \ldots, (r_{25} - r_{24})$. Supongamos que estos 24 números están pintados de verde, amarillo y azul. Alguno de los colores debe ser usado en por lo menos 8 números. Supongamos que fue el verde y que los 8 números son $v_1, v_2, \ldots, v_8$. Consideremos las siguientes 7 diferencias: $(v_8 - v_7), (v_8 - v_6), \ldots, (v_8 - v_1)$. Observemos que cualquiera de estos números es también la diferencia de dos números rojos, y por lo tanto deben estar pintados de amarillo o azul. Alguno de estos dos colores debió haberse usado en por lo menos 4 números. Supongamos que se usó el amarillo y a los 4 números los llamaremos a_1, a_2, a_3 y a_4. Consideremos ahora los 3 números $(a_4 - a_3), (a_4 - a_2)$ y $(a_4 - a_1)$ donde cada uno de ellos es la diferencia de dos amarillos y por lo tanto son también diferencia de dos verdes y por lo tanto también de dos rojos. Entonces los 3 números están pintados de azul. Llamémosles

b_1, b_2 y b_3. Ahora bien, los números $(b_3 - b_1)$ y $(b_3 - b_2)$ son la diferencia de dos azules y por lo tanto son diferencia de dos amarillos (y por tanto de dos verdes y también de dos rojos).

Solución del problema 31. Fijémonos en los residuos que dejan los números que vamos a sumar al dividirse entre 3. Las potencias de 2 que son múltiplos de 3, y por lo tanto, dejan residuo 1 ó 2. Observemos que $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \cdot 2^n = (1+2)2^n = 3 \cdot 2^n$ es siempre un múltiplo de 3. Esto nos dice que si 2^n deja residuo 1 entonces 2^{n+1} deja residuo 2 y viceversa. Si 2^n deja residuo 1 y 2^{n+1} deja residuo 2, los números que tenemos que sumar dejan residuos $2, 0, 1, 2, \ldots, 0, 1$. Éstos pueden agruparse de 3 en 3, y la suma de los números en cada grupo (que dejan residuos 2, 0 y 1) es un múltiplo de 3. Entonces S_n resulta ser múltiplo de 3. Si 2^n deja residuo 2 y 2^{n+1} deja residuo 1, los números que tenemos que sumar dejan residuos $0, 1, 2, 0, 1, \ldots, 2, 0$. Éstos pueden agruparse de 3 en 3 y sobra un múltiplo de 3 al final. De nuevo, la suma en cada grupo es un múltiplo de 3 y S_n también en este caso es múltiplo de 3.

Solución alternativa. Sea k el número de sumandos que tiene S_n. Éstos forman una progresión aritmética cuyo primer término es $2^n + 1$ y cuyo último término es $2^{n+1} - 1$. Luego, $S_n = \frac{1}{2}((2^n + 1) + (2^{n+1} - 1))k = \frac{1}{2}(2^n + 2^{n+1})k = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^n \cdot k = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot k$, que claramente es un múltiplo de 3. (Aquí utilizamos que $2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n$, como en la primer solución).

Solución del problema 32. Sea L el punto de intersección de la paralela a MN por B con AC, y sea E el punto medio de AC. Por ser G gravicentro (o baricentro) del triángulo ABC, se sigue que B, G y E son colineales. Por el Teorema de Thales, $\frac{BM}{MA} = \frac{LN}{NA}$ y $\frac{LN}{NE} = \frac{BG}{GE} = 2$, esto último por la razón en que el gravicentro G divide a la mediana BE. De aquí, $LN = 2NE$ y $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{LN}{NA} + \frac{CN}{NA} = \frac{LN+CN}{NA} = \frac{2NE+CN}{NA} = \frac{NE+CE}{NA} = \frac{NE+EA}{NA} = \frac{NA}{NA} = 1$.

Solución alternativa. Con Geometría Analítica. Utilicemos un sistema de coordenadas oblicuo con origen en A en el que $B = (1, 0)$ y $C = (0, 1)$. Entonces $M = (m, 0)$ y $N = (0, n)$ para algunos números m y n. La ecuación de la recta por M y N es $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. El gravicentro G del triángulo tiene coordenadas $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y como pertenece a esta recta, satisface su ecuación, es decir, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3$. Por último, observemos que $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{1-m}{m} + \frac{1-n}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2 = 1$.

Solución del problema 33. Si $\frac{1+11n}{2n-1}$ es un entero, $2n - 1$ divide a $1 + 11n$ y por lo tanto divide a $2(1 + 11n) - 11(2n - 1) = 13$. Sólo hay 2 posibilidades para $2n-1$ (que es un entero positivo): ser igual a 1 ó 13. Entonces $n=1$ y $n=7$ son los únicos valores posibles para n. Es fácil ver que estos dos valores hacen a la fracción original un entero.

Solución del problema 34. Observemos que cuando la cifra a aparece en alguno de los números de un poste, la cifra $9-a$ (distinta de a) debe aparecer en la posición correspondiente en el otro número del poste. Por ello, las únicas combinaciones de cifras que podemos usar son: 9 con 0, 8 con 1, 7 con 2, 6 con 3 y 5 con 4. Para cada una de estas 5 opciones, el número que indica la distancia a A puede construirse de $2^4=16$ maneras, porque cada una de sus cifras tiene 2 opciones. El número del poste que indica la distancia a B queda determinado, por la observación que hicimos al principio. Por lo tanto, hay $5\times 16=80$ postes en los que sólo aparecen dos cifras distintas.

Solución del problema 35. Como O es el centro de C_1, la bisectriz de $\angle MOB$ es la mediatriz de la cuerda MB. Análogamente, la bisectriz de $\angle BQN$ es la mediatriz de la cuerda NB. Así, el punto P de intersección de la bisectriz de $\angle MOB$ y la bisectriz de $\angle BQN$ es el circuncentro del triángulo MBN. Probaremos que BP es la bisectriz de $\angle OBQ$.

Primera forma: OM y QN son perpendiculares a $\mathcal{L}$ porque M y N son puntos de tangencia. $PM=PN$ porque P es el circuncentro del triángulo MBN. Luego $\angle NMP=\angle PNM$ y, por tanto, $\angle OMP=\angle PNQ$. Por ser OP mediatriz de MB, se sigue que B y M son simétricos respecto a OP. En consecuencia, $\angle OMP=\angle OBP$. Análogamente tenemos que $\angle PNQ=\angle PBQ$. Entonces $\angle OBP=\angle PBQ$, como queríamos.
Segunda forma. $PM=PN$ porque P es el circuncentro del triángulo MBN. MN es perpendicular a las rectas paralelas OM y QN, de modo que P equidista de las rectas OM y QN. Por otra parte, P equidista de las rectas OM y OB porque está en la bisectriz de $\angle MOB$. Análogamente, P equidista de las rectas QN y QB. Por lo tanto, P equidista de las rectas OB y QB, es decir, está en la bisectriz de $\angle OBQ$.

Solución del problema 36. Sea d el máximo común divisor de los números a y b. Tenemos que $a=du$ y $b=dv$ con u y v primos entre sí. Como $dp^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}$ es múltiplo de a y b, los únicos primos que dividen u y v son p,q,r y s. Supongamos que p divide a u. Como p no divide a v (u y v son primos entre sí), p debe aparecer en la factorización de u exactamente α veces. De lo contrario, el mínimo común múltiplo de a y b no sería $dp^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}$. Entonces basta ver de cuántas formas se pueden repartir p,q,r y s entre u y v. Hay $2^4=16$

subconjuntos de $\{p, q, r, s\}$ y podemos pensar que cada vez que elegimos un subconjunto de $\{p, q, r, s\}$ ponemos sus elementos en u y a los elementos de su complemento en v. Pero queremos contar parejas no ordenadas, de modo que debemos dividir entre 2. La respuesta es 8.

Solución del problema 37. Sean AD, BE y CF, mediana, altura y bisectriz del triángulo ABC respectivamente. Hagamos $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Como AD, BE y CF son concurrentes, tenemos por el Teorema de Ceva, que:

$$1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b}{a} \cdot 1 \cdot \frac{CE}{EA},$$

donde la segunda igualdad se sigue del Teorema de la bisectriz y de que D es punto medio de BC. Tenemos entonces que E divide al segmento AC en razón $\frac{b}{a}$. Por lo tanto, $AE = \frac{bc}{a+b}$ y $EC = \frac{ac}{a+b}$. El Teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos rectángulos ABE y CBE nos permite encontrar dos expresiones equivalentes para BE^2:

$$c^2 - \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{ac}{a+b}\right)^2.$$

Ésta igualdad, que relaciona los lados del triángulo ABC, puede escribirse de manera más compacta como:

$$(a^2 - b^2)c^2 = (a + b)^2(a^2 - c^2).$$

Solución del problema 38. Tenemos que $\angle CAD = \angle CFD$ por ángulos en el circuncírculo del triángulo ACD y $\angle CBD = \angle CED$ por ángulos en el circuncírculo del triángulo BCD. Entonces sus suplementos, $\angle DBF$ y $\angle DEA$ son iguales. Luego, los triángulos ADE y FDB son semejantes y para algún número k ocurre que $AD = k \cdot FD$, $DE = k \cdot DB$ y $EA = k \cdot BF$. Entonces $(AD)(DE)(BF)^2 = (k \cdot FD)(k \cdot DB)(BF)^2 = (FD)(DB)(k \cdot BF)^2 = (BD)(DF)(AE)^2$.

Solución del problema 39. Sea $n = p^\alpha q^\beta$, con p y q primos distintos. Sabemos que $P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$, donde $d(n)$ es el número de divisores positivos de n. Pero $d(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1)$, de modo que $P(n) = n^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2}}$. Entonces debemos buscar que $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 12$. Buscando entre los factores de 12 y tomando en cuenta que α y β deben ser positivos, encontramos que hay únicamente dos posibilidades para α y β: ser 1 y 5 (en algún orden), o ser 2 y 3 (en algún orden). Consideremos la primera posibilidad. Si el primo que lleva exponente 5 es 2, el otro primo debe ser menor que $\frac{400}{2^5} = \frac{25}{2} < 13$ para que n sea menor que 400. Tenemos las soluciones $2^5 \times 3$, $2^5 \times 5$, $2^5 \times 7$ y $2^5 \times 11$. Si el primo que lleva exponente 5 es mayor o igual que 3, el otro primo debe ser menor que $\frac{400}{3^5} = \frac{400}{243} < 2$, lo cual no es posible. Consideremos ahora la segunda posibilidad. Si el primo que lleva exponente 3 es 2, el cuadrado del otro primo debe ser menor que $\frac{400}{2^3} = 50$. Tenemos las soluciones $2^3 \times 3^2$, $2^3 \times 5^2$ y $2^3 \times 7^2$. Si el primo que lleva exponente 3 es 3, el cuadrado del otro primo debe ser menor que $\frac{400}{3^3} = \frac{400}{27} < 15$. Tenemos la solución $3^3 \times 2^2$. Si el primo que lleva exponente 3 es mayor o igual que 5, el cuadrado del otro primo debe ser menor que $\frac{400}{5^3} = \frac{16}{5} < 4$, lo cual no es posible. Hemos hallado todos los valores posibles para n.

Solución del problema 40. Bastará probar que el número de cuerdas es a lo más $\frac{3}{2}n + 2$. Como el número de cuerdas es entero, se seguirá que hay a lo más $\lfloor \frac{3}{2}n + 2 \rfloor$ cuerdas. Si se intenta probar el resultado por inducción se verá que la hipótesis de inducción es insuficiente para concluir el paso inductivo. Muchos ejemplos particulares sugieren que a lo más hay $\frac{3}{2}n - 2$ cuerdas, así que probaremos por inducción este resultado más fuerte.

Es claro que para $n = 2$ se puede trazar a lo más $\frac{3}{2} \cdot 2 - 2 = 1$ cuerda. Dados 3 puntos en la circunferencia, por lo menos 2 de ellos tienen la misma etiqueta y no se puede trazar una cuerda entre ellos. Por lo tanto, hay a lo más 2 cuerdas para $n = 3$. Verifiquemos: $\frac{3}{2} \cdot 3 - 2 = \frac{5}{2} > 2$.

Sea $n \geq 4$ y supongamos que el resultado es válido para cualquier número de puntos menor que n. Tomemos n puntos etiquetados en la circunferencia y N cuerdas que cumplan las condiciones del problema. Estos n puntos determinan un polígono convexo de n lados. Si ninguna de las cuerdas trazadas es una diagonal de dicho polígono, entonces $N \leq n \leq \frac{3}{2}n - 2$ (la segunda desigualdad se cumple porque $n \geq 4$). Si este no es el caso, alguna de las cuerdas trazadas es una diagonal AB del polígono. Supongamos que del lado izquierdo de AB quedan j de los n puntos (sin contar ni a A ni a B) y que del lado derecho quedan k puntos (también sin contar ni a A ni a B). Ninguna de las cuerdas trazadas une puntos de lados opuestos de AB porque las cuerdas trazadas no se cortan. Como $k \geq 1$, podemos aplicar la hipótesis de inducción a los j puntos que quedan a la izquierda de AB junto con A y B para obtener que del lado izquierdo de AB hay a lo más $\frac{3}{2}(j+2) - 2$ cuerdas trazadas (contando a AB). Análogamente, del lado derecho de AB hay a lo más $\frac{3}{2}(k+2) - 2$ cuerdas trazadas (contando a AB). Por lo tanto, $N \leq \left(\frac{3}{2}(j+2) - 2\right) + \left(\frac{3}{2}(k+2) - 2\right) - 1 = \frac{3}{2}(j+k+2) - 2 = \frac{3}{2}n - 2$, lo cual completa la demostración.

Solución alternativa. Tracemos con color rojo más cuerdas (aunque unan puntos con la misma etiqueta) de manera que el polígono convexo de n lados determinado por los n puntos quede triangulado. Esto siempre puede hacerse (por ejemplo, pintando de rojo todos los lados del polígono que todavía no están trazados, y luego triangulando por separado cada uno de los subpolígonos en los que queda dividido el polígono grande por las cuerdas que ya estaban).
No es difícil probar por inducción que cuando se triangula un polígono de n lados resultan $n-2$ triángulos. Por cada triángulo en que se ha dividido el polígono escribamos sus 3 lados en una lista y al final agreguemos a la lista los n lados del polígono. Se pondrá cada cuerda trazada (incluyendo a las rojas) exactamente 2 veces en la lista, de manera que el número total A de cuerdas trazadas está dado por $A = \frac{1}{2}\left(3(n-2)+n\right) = 2n-3$.
Alternativamente, se puede considerar la gráfica formada por los n puntos dados y las cuerdas trazadas (incluyendo a las rojas). Como las cuerdas no se cortan, la gráfica es plana y el Teorema de Euler nos dice que $V - A + C = 2$, donde V es el número de vértices (por lo tanto $V = n$), A es el número de aristas (que coincide con el número de cuerdas trazadas) y C es el número de caras (que son los triángulos más la cara exterior). Por otra parte, el mismo razonamiento empleado en el párrafo anterior nos dice que $2A = 3(C-1)+n$. Tenemos pues, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde se sigue que $A = 2n-3$ y $C = n-1$.
Sea A^- el número de cuerdas rojas. Antes de trazar las cuerdas rojas había $A - A^-$ cuerdas en la figura. Cualquiera de los triángulos en que hemos dividido al polígono tiene por lo menos un lado rojo. En efecto, por lo menos 2 de sus 3 vértices tienen la misma etiqueta. Para cada uno de estos triángulos escribamos su lado rojo (o alguno de sus lados rojos) en una lista. Al final, en la lista aparecerá cada cuerda roja a lo más 2 veces. Por lo tanto, $A^- \geq \frac{1}{2}(n-2)$ y $A - A^- \leq 2n - 3 - \frac{1}{2}(n-2) = \frac{3}{2}n - 2$.

Solución del problema 41. Sea F el pie de la perpendicular a BD desde C. $\angle CAD = \angle CBD$ (por ángulos inscritos), luego los triángulos rectángulos AEC y BFC son semejantes. De hecho son congruentes, pues $AC = BC$. Entonces $AE = BF$ y $CE = CF$. Del Teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos rectángulos CED y CFD se sigue que $DE = DF$. Por lo tanto, $AE = BF = BD + DF = BD + DE$.

Solución alternativa. Sea H en la prolongación de AD tal que $DH = DB$. Queremos demostrar que E es punto medio de AH. Como el triángulo BDH es isósceles, $\angle DBH = \frac{1}{2}\angle ADB$. **Primera forma:** $\frac{1}{2}\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$. Como el triángulo ABC es isósceles, $\frac{1}{2}\angle ACB + \angle BAC = 90°$. Pero $\angle CDB$ es el suplemento de $\angle BAC$ (porque el cuadrilátero $ABDC$ es cíclico), luego la prolongación de CD cortará a BH formando un ángulo recto. De $DB = DH$ se sigue que CD es mediatriz de BH. Luego, $CH = CB = CA$ y la altura CE del triángulo isósceles AHC también es mediana. **Segunda forma:** Sea G en la circunferencia tal que CG pasa por E. $\angle CGA = \angle CBA = \angle BAC = \angle BGC$, por ángulos inscritos. Como $AGBD$ es cíclico, $90^\circ = \frac{1}{2}\angle ADB + \frac{1}{2}\angle BGA = \angle DBH + \angle CBA$. Por otra parte, en el triángulo rectángulo AEC, $90^\circ = \angle DAC + \angle ACE = \angle DBC + \angle ABG$ (por ángulos inscritos). Entonces los ángulos en B suman 180°. Por lo tanto, G, B y H son colineales y en el triángulo AGH la altura GE es también bisectriz, luego también es mediana.

Solución del problema 42. Observemos que $1991 = 11 \times 181$ y que $12^m + 9^m + 8^m + 6^m = (4^m + 3^m)(3^m + 2^m)$. Como m termina en 5, $m = 5k$ con k impar. Si se factoriza $4^m + 3^m$, el número $4^5 + 3^5 = 1267 = 181 \times 7$ será un factor, y si se factoriza $3^m + 2^m$, el número $3^5 + 2^5 = 275 = 11 \times 25$ será un factor. Esto concluye la prueba.

Solución del problema 43. Sean J y K los puntos de intersección de BM con AD y AC, respectivamente. En el triángulo ABK, la altura AJ es también bisectriz, luego también es mediana y J es punto medio de BK. Por el Teorema de Thales, JE es paralela a KC. Sea L el punto de intersección de EJ con AB. Como LE es paralela a AC, L es punto medio de AB. El Teorema de Ceva en el triángulo ABE y las cevianas BM, EL y AD (concurrentes en J) nos dice que $1 = \frac{EM}{MA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BD}{DE} = \frac{EM}{MA} \cdot \frac{BD}{DE}$, de donde $\frac{EM}{MA} = \frac{ED}{DB}$ y, por el Teorema de Thales, AB y DM son paralelas.

Solución alternativa. Sea F el punto tal que $ABFC$ es paralelogramo. Como las diagonales de un paralelogramo se cortan por la mitad, AF pasa por E. Además $\angle BAC + \angle FBA = 180^\circ$ porque $ABFC$ es un paralelogramo y $\frac{1}{2}\angle BAC + \angle MBA = 90^\circ$ porque AD es perpendicular a BM. Por lo tanto, $\angle MBA = \frac{1}{2}\angle FBA$ y BM es bisectriz de $\angle FBA$. Utilizando el Teorema de la bisectriz en los triángulos ABF y ABC, tenemos que $\frac{AM}{MF} = \frac{BA}{BF} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DC}$. Pero AB y CF son paralelas. Entonces, por el Teorema de Thales se sigue que DM es paralela a AB y CF.

Solución del problema 44. Sean a, b, c, d y e las pesas, tales que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Convenimos que el lado izquierdo de la balanza es negativo y el lado derecho positivo. Entonces un objeto se va a poder pesar cuando su peso, P, lo escribamos como la diferencia de los pesos colocados de cada lado de la balanza, es decir:

$$P = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d \cdot w + e \cdot u, \tag{3.4}$$

donde x, y, z, w y u son $0, 1$ ó -1, y $P \in \{-121, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 121\}$. Ahora bien, todos los números enteros se pueden escribir en cualquier otra base, por ejemplo, 121 escrito en base 2 es 1111001, es decir, si tuviéramos pesas cuyos pesos fueran las siguientes potencias de 2: $2^0, 2^3, 2^4, 2^5$ y 2^6, podríamos pesar 121 Kg y 120 Kg. Sin embargo, ya no podríamos pesar 119 Kg pues necesitaríamos tener la pesa de 2^2 Kg, es decir, necesitaríamos 6 pesas para pesar 119, 120 y 121 Kg. Veamos que sucede si escribimos a 121 en base 3. Si transformamos 121 a base 3 tenemos que es igual a 11111, esto es, necesitamos las pesas de $1, 3, 9, 27$ y 81 Kg. Observemos, que cualquier otro peso menor que 121 se puede conseguir con estas 5 pesas. Como P varía entre -121 y 121, podemos pensar en un número $N = 121 + P$ con $0 < N < 243 = 3^5$. La representación de N en base 3, es $N = n_0 + 3n_1 + 3^2 n_2 + 3^4 n_4$ donde $n_i = 0, 1$ ó 2. Como $N = 121 + P = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + P$, entonces $P = N - (1+3+9+27+81) = (n_0 - 1) + 3(n_1 - 1) + 3^2(n_2 - 1) + 3^4(n_4 - 1)$ donde $n_i - 1 = -1, 0$ ó 1. Luego, para pesar cualquier objeto de peso $P \leq 121$ Kg, expresamos a P como combinación lineal de estas pesas, es decir, lo escribimos como en la ecuación (3.4).

Solución del problema 45. Si en un vértice está el número a, entonces dicho número aparece como factor en los productos de las tres caras que lo contienen como vértice. Luego, el producto de los 14 números es una cuarta potencia e igual a 1. De los 14 números hay un número par de -1's, digamos I y un número impar de 1's, digamos P. Si S es la suma de los 14 números tenemos que $P + I = 14$ y $P - I = S$, de donde $S = 2P - 14$. Como P es par, resulta que los valores posibles de S serían: $-14, -10, -6, -2, 2, 6, 10$ y 14. El -14 no se logra, ya que no pueden ser negativos todos los números. El 10 no se obtiene, ya que entonces debe haber 12 números positivos y 2 negativos lo cual no es posible. Si un vértice es negativo, $S = 6$, y si sólo hay un vértice positivo, $S = -6$. Si dos vértices son negativos $S = -2, 2$ ó 6, y si dos vértices son positivos, $S = -10$ ó -6. Por lo tanto, los posibles valores son: $-10, -6, -2, 2, 6$ y 14.

Solución del problema 46. Consideremos la desigualdad $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right] \geq \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2.$$

Pero:

$$\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right]\geq\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$

Luego, $\frac{1}{ab}$ es mínimo cuando ab es máximo. Como $0\leq(a-b)^2$, entonces $4ab\leq a^2+2ab+b^2$, de donde $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. De aquí que $\frac{1}{ab}\geq 4$ y $1+\frac{1}{ab}\geq 5$. Por lo que:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\geq\frac{1}{2}\cdot 5^2=\frac{25}{2}.$$

Solución del problema 47. Sea $S=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$, y consideremos el sistema de ecuaciones:

$$S-a_1=9\cdot 1^2, S-a_2=9\cdot 2^2,\ldots,S-a_{10}=9\cdot 10^2.$$

Sumando miembro a miembro todas estas ecuaciones tenemos que $9S=9\cdot(1^2+2^2+\cdot+10^2)$, de donde $a_k=S-9k^2=1^2+2^2+\cdots+10^2-9k^2$. Es fácil ver que los a_i son enteros distintos, y cualesquiera nueve suman un cuadrado perfecto.

Solución del problema 48. Sea O el centro del hexágono $ABCDEF$ y sea $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ el hexágono en el interior. Tracemos los segmentos OA_i, con $1\leq i\leq 6$. Estos dividen el hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ en seis triángulos congruentes. Además, el triángulo formado con dos vértices consecutivos de $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ y el vértice sobre ellos de $ABCDEF$ (por ejemplo el triángulo A_1A_2B) es congruente también a estos seis triángulos. Ahora, notemos que el triángulo AA_1B tiene la misma área que el triángulo A_1BA_2, ya que A_1 es el punto medio de AA_2. Entonces $(ABCDEF)=18(A_1OA_2)$, de donde $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)=\frac{2004}{3}=668$.

Solución del problema 49. Sean a_{ij} los números en el arreglo rectangular. Para $1\leq i\leq m-1$ y $1\leq j\leq n-1$, podemos tomar $a_{ij}=\pm 1$ de manera arbitraria. Esto puede hacerse de $2^{(m-1)(n-1)}$ maneras. Los valores para a_{mj} con $1\leq j\leq n-1$ y para a_{in} con $1\leq i\leq m-1$ están determinados únicamente por la condición de que el producto de las entradas en cada renglón y en cada columna sea -1. El valor de a_{mn} también está determinado únicamente pero es necesario que $\prod_{j=1}^{n-1} a_{mj} = \prod_{i=1}^{m-1} a_{in}$. Si hacemos $P = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{ij}$, vemos que $P(\prod_{j=1}^{n-1} a_{mj}) = (-1)^{n-1}$ y $P(\prod_{i=1}^{m-1} a_{in}) = (-1)^{m-1}$, de donde m y n deben tener la misma paridad.

Solución del problema 50. Primero observemos que si M es un punto en la bisectriz del ángulo $\angle XOY$, y si P es un punto en OX y Q es un punto en OY, con $MP = MQ$, entonces $\angle OPM = \angle OQM$ ó $\angle OPM + \angle OQM = 180°$. Supongamos que el punto K existe. Entonces, M está en la bisectriz de $\angle ACB$ y $ML = MK$; por la observación $\angle ALM = \angle BKM$ ó $\angle ALM + \angle BKM = 180°$. Pero en este último caso, se sigue que $MKCL$ es cíclico, de modo que $\angle C = 180° - \angle KML = 120°$, lo cual es una contradicción ya que el triángulo ABC es acutángulo. Luego, $\angle ALM = \angle BKM$, del mismo modo $\angle LKC = \angle LMA$. En el triángulo AML, tenemos que $\angle AML + \angle ALM + \angle A = 180°$. Por otra parte $\angle BKM + \angle LKC + \angle MKL = 180°$, lo que implica que $\angle A = \angle MKL = 60°$. Recíprocamente, si $\angle A = 60°$, sea K en BC tal que MK es perpendicular a BL. Como BL es bisectriz del ángulo B, se sigue que BL es la mediatriz de MK, y así $LM = LK$. Sea I el incentro del triángulo ABC. Entonces $\angle MLI = 120°$, de donde $AMIL$ es cíclico. Entonces $\angle MLI = \angle MAI = 30°$, de modo que $\angle KLM = 60°$. Luego, el triángulo KLM es isósceles con un ángulo de $60°$, por lo que es equilátero.

Solución del problema 51. Supongamos que la moneda nunca sale del tablero. Como solo hay un número finito de casillas, la moneda visita al menos una casilla un número infinito de veces. La flecha en esta casilla debe de rotar $90°$ un número infinito de veces, por lo que la moneda visita las casillas adyacentes a esta, un número infinito de veces también. Se sigue que la moneda visita todas las casillas infinitas veces. En particular, la moneda visita la casilla en la esquina superior derecha del tablero al menos 4 veces. Entonces, en algún momento la dirección de la flecha será hacia la salida del tablero. Cuando la moneda vuelva a visitar esta casilla, esta saldrá, lo cual es una contradicción.

Solución del problema 52. El primer número $10^1 + 1$ es primo, y como $10^{2k+1} \equiv 1 \pmod{11}$ para todo entero positivo k, se sigue que todos los números $10^3 + 1, 10^5 + 1, \ldots, 10^{2003} + 1$ no son primos. Similarmente, como $10^{4k+2} \equiv 1 \pmod{101}$ para todo entero positivo k, los números $10^6 + 1, 10^{10} + 1, \ldots, 10^{2002} + 1$ no son primos. Continuando de esta forma obtenemos que al menos:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\left\lfloor\frac{2004}{2^i}\right\rfloor-1\right)=1987$$

elementos de M no son primos, donde $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x. Por lo tanto, al menos el $99\,\%$ de los elementos de M no son primos.

Solución del problema 53. Sea C' la intersección de CK y la diagonal BD. Por el Teorema de la bisectriz tenemos que $\frac{MC}{MC'}=\frac{DC}{DC'}$. Ahora:

$$\begin{aligned}
MB\cdot DM &= MA(MC+CD)=MA\left(\frac{MC'\cdot CD}{DC'}+CD\right)\\
&= MA\left(\frac{MC'}{DC'}+1\right)CD=MA\cdot CD\left(\frac{MC'+DC'}{DC'}\right)\\
&= MA\cdot CD\left(\frac{MD}{DC'}\right),
\end{aligned}$$

de donde $\frac{MA}{MB}=\frac{DC'}{DC}=\frac{MC'}{MC}$. Por lo tanto los triángulos MAB y $MC'C$ son semejantes, por lo que $\angle MBA=\angle MCC'$. Esto implica que los triángulos $DC'C$ y $KC'B$ sean semejantes, por lo que $\angle BKC=\angle CDB$.

Solución del problema 54. Para n par consideremos los números de $\frac{n}{2}$ cifras $333\ldots334$. Así, $n=(333\ldots334)^2=11\ldots155\ldots556$ es un número monotónico de n cifras. Nótese que también los números de la forma $666\ldots667$ funcionan para n par. Ahora, para $n=2k-1$ impar, consideremos los números de la forma $166\ldots667$ de k cifras. Entonces $n=(166\ldots667)^2=277\ldots788\ldots889$ es un número monotónico de $2k-1$ cifras.

Solución del problema 55. Sea B' la reflexión de B en la recta XY. Sea M la intersección de AB' y XY. Sea M' un punto diferente de M en XY. Como B' es el reflejado de B, $MB'=MB$ y $M'B'=M'B$, de donde:

$$AM'+M'B=AM'+M'B'>AB'=AM+MB'=AM+MB.$$

Luego, M es el punto buscado.

Solución del problema 56. Llamaremos un polígono verde (respectivamente rojo) si sus vértices son todos verdes (respectivamente rojos); y diremos que un segmento es verde (respectivamente rojo) si sus puntos extremos son verdes (respectivamente rojos). Supongamos que no existen puntos rojos o verdes como en el problema, y sean a, b y c los lados del triángulo ABC. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a \leq b, c$. Si XY fuera un segmento rojo de longitud a, entonces los círculos unitarios con centro en X y Y deben ser completamente verdes. Ahora, sea Z un punto en el plano tal que los triángulos XYZ y ABC son congruentes. El círculo unitario con centro en Z debe ser rojo o se formaría un triángulo ilegal con los correspondientes puntos alrededor de X y Y. En este círculo unitario podemos encontrar un segmento rojo de longitud uno, lo que es una contradicción. Luego, no hay segmentos rojos de longitud a. Ahora, como todo el plano no puede ser verde, existe un punto rojo P. El círculo w con centro en P y radio a debe ser verde. Entonces tomemos dos puntos D y E en w con $DE = a$. Como $a \leq b, c$, podemos construir F fuera de w de tal forma que los triángulos DEF y ABC sean congruentes. Nótese que F debe ser rojo. De aquí que si rotamos DE alrededor de P, F forma un círculo rojo de radio mayor que a, y en este círculo podemos encontrar dos puntos rojos con distancia a entre ellos, lo cual es imposible.

Solución del problema 57. Tales subconjuntos tienen a lo más 4 elementos y hay un sólo subconjunto con 4 elementos: $\{1, 4, 7, 10\}$.
Los subconjuntos con 3 elementos se pueden contar de la siguiente manera: los que empiezan con 1 y 4 son 4 (el tercer elemento puede ser 7, 8, 9 o 10), los que empiezan con 1 y 5 son 3, los que empiezan con 1 y 6 son 2, y hay uno que empieza con 1 y 7; los que empiezan con 2 y 5 son 3, los que empiezan con 2 y 6 son 2 y hay 1 que empieza con 2 y 7; los que empiezan con 3 y 6 son 2 y hay 1 que empieza con 3 y 7; por último hay 1 que empieza con 4 y 7. En total, hay $(4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 20$ de estos subconjuntos.
Por otra parte, hay $\binom{10}{2} = 45$ subconjuntos de 2 elementos de $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ (no necesariamente con la propiedad deseada). De ellos, hay 9 que tienen elementos consecutivos y hay 8 que tienen elementos con diferencia 2. Entonces hay $45 - 9 - 8 = 28$ subconjuntos de $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ con la propiedad deseada. Los 10 subconjuntos de 1 elemento y el subconjunto vacío también cumplen la condición. En total, hay $1+20+28+10+1 = 60$ subconjuntos con la propiedad mencionada.

Solución del problema 58. Digamos que los 2001 puntos elegidos son negros (puede haber puntos que sean tanto rojos como negros). Supongamos que lo que se pide demostrar es falso, es decir: para cualesquiera tres puntos rojos, el plano que determinan contiene por lo menos un punto negro.
Fijemos dos puntos rojos A y B y, para cada uno de los otros 2002 puntos rojos, consideremos el plano que pasa por A, B y el punto considerado. En cada uno de estos 2002 planos hay un punto negro, pero como únicamente hay 2001 puntos

negros, alguno de ellos aparece en 2 de los planos considerados. Como los puntos rojos están en posición general, estos 2 planos son distintos y se cortan en la recta AB. La única manera de que un punto negro pertenezca a ambos es que pertenezca a la recta AB. Este argumento muestra que para cualesquiera dos puntos rojos distintos hay un punto negro en la recta determinada por ellos.
Ahora fijemos un punto rojo X y, para cada uno de los otros 2003 puntos rojos, consideremos la recta que pasa por X y por el punto considerado. En cada una de estas 2003 rectas hay un punto negro, por lo que acabamos de probar. Pero como únicamente hay 2001 puntos negros, alguno de ellos aparece en 2 de las rectas consideradas. De nuevo, como los puntos rojos están en posición general, estas 2 rectas son distintas y se intersectan en X, de modo que la única manera de que un punto negro pertenezca a ambas rectas es que coincida con X.
El párrafo anterior demuestra que cualquier punto rojo debe coincidir con un punto negro. Esto es absurdo, pues hay más puntos rojos que negros. Entonces la suposición inicial es falsa.

Solución del problema 59. Llamemos a los 4 puntos originales puntos *azules*, y a las perpendiculares trazadas, rectas *rojas*. Desde cada uno de los 4 puntos azules se trazan 3 rectas rojas, de modo que en total se trazan $4\times 3 = 12$ rectas rojas. En principio, estas rectas determinan $\binom{12}{2} = 66$ puntos de intersección. Sin embargo, hay algunas parejas de rectas rojas paralelas (las cuales no tienen un punto de intersección) y algunas ternas de rectas rojas concurrentes (las cuales generan sólo un punto de intersección, en vez de tres).
Dos rectas rojas son paralelas si son perpendiculares a la misma recta determinada por dos puntos azules. Entonces, para cada par de puntos azules hay un par de rectas rojas paralelas: las perpendiculares a la recta determinada por los puntos azules considerados trazadas desde los otros dos puntos azules. Es decir, hay $\binom{4}{2} = 6$ parejas de rectas rojas paralelas. Por otro lado, las 3 rectas rojas trazadas desde cada uno de los puntos azules concurren en dicho punto azul. Además concurren las alturas de cada uno de los $\binom{4}{3} = 4$ triángulos determinados por los puntos azules. En total, pues, hay 8 ternas de rectas rojas concurrentes.
Por lo tanto, no hay más de $66 - 6 - 2\times 8 = 44$ puntos de intersección determinados por las rectas rojas. Es fácil convencerse de que hay ejemplos en los cuales no se pierden más puntos de intersección que los que hemos mencionado. Por lo tanto, 44 es el máximo buscado.

Solución altenativa. Dados dos puntos azules, las rectas rojas trazadas desde ellos determinan, en principio, $3\times 3 = 9$ puntos de intersección (sin contar los puntos azules). Pero dos de estas rectas rojas son paralelas, luego hay únicamente 8 puntos de intersección. Considerando cada pareja de puntos azules, obtenemos, en principio, $\binom{4}{2} \times 8 = 48$ puntos de intersección. Sin embargo, los 4 ortocentros se cuentan tres veces: una por cada dos de sus vértices. Además hay que incluir los puntos azules como puntos de intersección determinados por las rectas rojas. Por lo tanto, hay a lo más $48 - 2 \times 4 + 4 = 44$ puntos de intersección.

Solución del problema 60. Para cada entero positivo k consideremos la lista infinita de todos los números de la forma un cuadrado más k:

$$\mathcal{L}_k = 1 + k, 4 + k, 9 + k, 16 + k, 25 + k, ...$$

El inciso (a) nos pide encontrar todos los enteros positivos k para los cuales es posible encontrar dos números a y b en $\mathcal{L}_k$ cuyo producto ab también pertenezca a $\mathcal{L}_k$. El inciso (b) plantea la misma pregunta pero con la suma de a y b en vez del producto. Las listas $\mathcal{L}_k$ para los primeros valores de k comienzan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= 2, 5, 10, 17, 26, ...\\ \mathcal{L}_2 &= 3, 6, 11, 18, 27, ...\\ \mathcal{L}_3 &= 4, 7, 12, 19, 28, ...\end{aligned}$$

Al observar estas listas se puede conjeturar que el producto de los primeros dos números de cada lista aparece en esa misma lista. Esto es muy fácil de probar: $(1 + k)(4 + k) = 4 + 5k + k^2 = (2 + k)^2 + k$ en efecto aparece en $\mathcal{L}_k$. Por lo tanto la respuesta para el inciso (a) es: todos los enteros positivos k.

Por otra parte, es claro que en cada lista $\mathcal{L}_k$ las diferencias entre elementos consecutivos son $3, 5, 7, 9, 11, ...$ Entonces, si elegimos un número impar suficientemente grande a en $\mathcal{L}_k$, podremos encontrar dos números consecutivos b y c de $\mathcal{L}_k$ cuya diferencia sea a. Los números a y b tendrán, pues, la propiedad de que su suma, c, estará en $\mathcal{L}_k$. Por ejemplo, si escogemos el número impar 7 de $\mathcal{L}_3$, encontramos los números consecutivos 12 y 19 de $\mathcal{L}_3$ cuya diferencia es 7, lo cual nos da dos números de $\mathcal{L}_3$ (7 y 12) cuya suma (19) también está en $\mathcal{L}_3$. Como esto se puede hacer en todas las listas concluimos que la respuesta para el inciso (b) también es: todos los enteros positivos k.

3.2. Soluciones de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Solución del problema 1. Si uno hace las operaciones del problema en una cuadrícula de 4×4 es fácil conjeturar que al terminar todas las operaciones, la cuadrícula queda girada $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj. Probémoslo: si se empezara con una cuadrícula de 2×2, obviamente quedaría girada. Supongamos que si se empieza con una cuadrícula de $n \times n$ termina girada, donde n es alguna potencia de 2. Para una cuadrícula de $2n \times 2n$ la primer operación nos lleva de:

$a \rightarrow$	$b \rightarrow$
$d \rightarrow$	$c \rightarrow$

a

$d \rightarrow$	$a \rightarrow$
$c \rightarrow$	$b \rightarrow$

(donde las flechas indican que los números están en orden creciente de izquierda a derecha en cada renglón). El resto de los movimientos se hacen dentro de esas cuatro subcuadrículas de $n \times n$ y ya sabemos que el resultado de esas es girar cada cuadro $90°$, de modo que obtenemos:

$d \downarrow$	$a \downarrow$
$c \downarrow$	$b \downarrow$

(donde las flechas indican que los números están en orden creciente de arriba a abajo en cada columna). Esto es la cuadrícula de $2n \times 2n$ girada $90°$. Esto prueba (por inducción) que el resultado de aplicar las operaciones del problema en cualquier cuadrícula cuadrada cuyo lado es potencia de 2 es girar la cuadrícula $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj.
Por lo tanto, los números que quedan en la diagonal son $32, 63, 94, 125, ..., 993$ (aumentan de 31 en 31).

Solución del problema 2. Como AD es paralela a BE, los arcos AB y DE son iguales y por lo tanto, $DE = AB = DC$ y CDE es isósceles. Análogamente, CBF es isósceles. Sean M y N los puntos medios de CE y CF respectivamente. Por los triángulos isósceles, las rectas DM y BN son las mediatrices de los segmentos CE y CF, y entonces, su intersección K es el circuncentro. El cuadrilátero $MCNK$ es cíclico (por tener dos ángulos opuestos rectos) y por lo tanto, $\angle BKD = 180° - \angle ECF = 180° - \angle BCD = \angle ABC = \angle BED$. Por lo tanto el cuadrilátero $BKED$ es cíclico, es decir, K está sobre $\mathcal{K}$.
Segunda Solución. Sea K el circuncentro de CEF. Entonces, $\angle EKF =$

$2\angle ECF$. Como AD es paralela a BE, los arcos AB y DE son iguales y por lo tanto, $DE = AB = DC$ y CDE es isósceles, de donde $\angle EDC = 180° - 2\angle ECD$. Por lo tanto, $\angle EKF + \angle EDC = 180°$, así que $EKFD$ es cíclico y K está sobre $\mathcal{K}$.

Solución del problema 3. Tiene más de la forma $4k+1$. En efecto, si n no es divisible por primos de la forma $4k-1$, todos sus divisores impares son de la forma $4k+1$. ¿Qué pasa cuando se "agrega" un primo de la forma $4k-1$?. Supongamos que n cumple que $r > s$ donde r y s son los números de divisores de n^2 de las formas $4k+1$ y $4k-1$ respectivamente. Sea q un primo de la forma $4k-1$ que no divide a n. Probaremos que $m = q^\alpha n$ también cumple la condición.
Cualquier divisor de m^2 es de la forma $q^\beta d$ donde d es divisor de n^2 y $0 \leq \beta \leq 2\alpha$. El divisor $q^\beta d$ es de la forma $4k+1$ si d lo es y β es par, o si d es de la forma $4k-1$ y β es impar. Por lo tanto, m^2 tiene $(\alpha+1)r + \alpha s = \alpha(r+s)+r$ divisores de la forma $4k+1$. Un razonamiento similar nos dice que m^2 tiene $\alpha(r+s)+s$ divisores de la forma $4k-1$. Entonces, m^2 tiene más divisores de la forma $4k+1$ que de la forma $4k-1$.
Esto prueba (por inducción) que n^2 siempre tiene más divisores de la forma $4k+1$.
Segunda Solución. Sea $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}...q_s^{\beta_s}$ la factorización de n como producto de potencias de primos distintos, donde los q_i son los primos de la forma $4k-1$ que dividen a n, y los p_i son los de la forma $4k+1$ y un p_i es 2 si n es par). Separamos todos los divisores de n^2 en dos clases: los que son divisibles por algún q_i y los que no son divisibles por ninguno. Dado un divisior $d = p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}...p_r^{\lambda_r}q_1^{\mu_1}q_1^{\mu_1}...q_s^{\mu_s}$ de la primera clase, buscamos la mínima i tal que $\mu_i \neq 0$ y a d le asociamos el divisor $d' = p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}...p_r^{\lambda_r}q_1^{\mu_1}q_1^{\mu_1}...q_i^{\mu_i'}...p_s^{\mu_r}$ donde

$$\mu_i' = \begin{cases} \mu_i + 1 & \mu_i < 2\alpha_i \\ 1 & \mu_i < 2\alpha_i. \end{cases}$$

Si d es par, d' también lo es. Si d es de la forma $4k+1$, d' es de la forma $4k-1$ y viceversa.
Esto nos da una biyección, en los divisores de la primera clase, entre los divisores de la forma $4k-1$ y los de la forma $4k+1$. Los divisores de la segunda clase son todos pares o de la forma $4k+1$ (y hay al menos uno de la forma $4k+1$, a saber: 1), por lo que n^2 tiene más divisores de la forma $4k+1$ que de la forma $4k-1$.

Solución del problema 4. Para que la suma de los números en la primer ficha sea impar, uno de ellos debe ser par y el otro impar. Para que la suma siga impar, las siguientes fichas deben tener suma par, es decir, tener ambos números pares o ambos impares. Todas las fichas par-par deben quedar del lado par de la primera ficha y las impar-impar del lado impar.

Las mulas (fichas dobles) siempre pueden colocarse en una hilera que cumpla las condiciones de manera que se sigan cumpliendo, por lo tanto, en una hilera de longitud máxima se usan las siete. Encontremos la longitud máxima de una hilera sin mulas:

Del lado impar se pueden usar todas las fichas: $\boxed{1|3}$ $\boxed{3|5}$ $\boxed{5|1}$, por ejemplo. en cambio del lado par sólo se pueden usar 5 de las 6 fichas. En efecto, cuando las fichas se acomodan en hilera, cada número que no esté en un extremo aparece un número par de veces. Pero cada número par $(0, 2, 4, 6)$ aparece 3 veces en las fichas par-par y no pueden estar todos en los extremos. Por lo tanto debemos dejar sin usar al menos una de las fichas. Entonces la longitud máxima de la parte par es a lo más 5 y la longitud máxima de una hilera es a lo más $7 + 3 + 1 + 5 = 16$: 7 mulas, 3 impar-impar, 1 impar-par y 5 par-par. Que de hecho se pueden formar hileras de esa longitud se verá cuando las contemos.

¿De cuántas formas se puede formar el lado impar (sin mulas)? Una vez que se elige con que ficha empezar el resto tiene dos opciones, por ejemplo si empezamos con $\boxed{1|3}$, debe quedar $\boxed{1|3}$ $\boxed{3|5}$ $\boxed{5|1}$ o $\boxed{3|1}$ $\boxed{1|5}$ $\boxed{5|3}$. Así que hay 6 formas. Ahora con mulas: una vez puestas las otras fichas las mulas se pueden insertar de dos formas: la mula del número en los extremos se puede poner en cualquiera de los dos extremos y las otras dos están obligadas. Por lo tanto con todo y mulas hay $6 \cdot 2$ formas de hacer el lado impar.

¿Y el lado par (sin mulas)? Ya vimos que debe faltar una ficha, digamos $\boxed{0|6}$. En las demás fichas par-par, los números de la ficha faltante aparecen 2 veces, y los otros dos aparecen 3 veces. Estos últimos deben ser los extremos del lado par. Entonces los dos números de la ficha faltante obligan a poner algunas juntas, en el ejemplo, deben ir juntas $\boxed{2|0}$ $\boxed{0|4}$ y también $\boxed{2|6}$ $\boxed{6|4}$. Junto con la ficha $\boxed{2|4}$, tenemos 3 bloques con extremos 2 y 4. Para formar el lado par basta escoger el orden de los 3 bloques y si queremos empezar con 2 o con 4. Por lo tanto, sin mulas, hay $6 \cdot 3! \cdot 2$ (el primer factor es el número de formas de elegir la ficha faltante) formas de hacer el lado par. Las mulas de los números de los extremos pueden estar en dos posiciones y las mulas de los otros dos números sólo en una. Por lo tanto con todo y mulas hay $(6 \cdot 3! \cdot 2)(2 \cdot 2)$ formas de hacer el lado par.

El número total de formas de hacer la hilera de longitud máxima es el producto de las formas de hacer los dos lados (puesto que la ficha par-impar queda

determinada). Así que el número de formas buscado es $(6\cdot 2)(6\cdot 3!\cdot 2)(2\cdot 2) = 2^7 3^3$. Si una hilera y la que se obtiene al girarla $180°$ se consideran distintas el número es el doble.
Comentario. Una solución más directa se obtiene haciendo el árbol completo de los casos aprovechando la simetría para reducir el trabajo.

Solución del problema 5. Sean a, b y c tres enteros distintos que forman una terna compatible, y supongamos que a es el mayor de los tres. Notemos que a debe ser múltiplo o divisor de al menos uno de b y c, digamos de b. Como $a > b$, a debe ser múltiplo de b.
Si c también es divisor de a (o de b, lo cual lo vuelve divisor también de a) entonces b y c son a lo más $a/2$ y $a/3$ en algún orden, de modo que $a+b+c \leq \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)a = \frac{11}{6}a$.
Si c no es divisor de a, debe ser múltiplo de b. Si $a = kb$, entonces $c \leq (k-1)b$, porque $a > c$. entonces, $a+b+c \leq a+b+(k-1)b = a+kb = 2a$.
Entonces, en cualquier caso la suma es a lo más $2a$ y sólo llega a eso si la terna es de la forma kb, b, $(k-1)b$. Para las ternas formadas con números del 1 al 2002 la suma máxima es, entonces, 4004 y sólo ocurre para ternas de la forma antes mencionada cuando $kb = 2002$. Factorizando 2002 (es $2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$) encontramos sus divisores, los posibles valores de b. Las ternas son: $\{2002, 1, 2001\}$, $\{2002, 2, 2000\}$, $\{2002, 7, 1995\}$, $\{2002, 11, 1991\}$, $\{2002, 13, 1989\}$, $\{2002, 14, 1988\}$, $\{2002, 22, 1980\}$, $\{2002, 26, 1976\}$, $\{2002, 77, 1925\}$, $\{2002, 91, 1911\}$, $\{2002, 143, 1859\}$, $\{2002, 154, 1848\}$, $\{2002, 182, 1820\}$, $\{2002, 286, 1716\}$. (Nótese que tomar $b = 1001$ no resulta en una terna válida porque los tres números no son distintos).

Solución del problema 6. El cuadrilátero $BCKM$ es cíclico por tener ángulos opuestos rectos. Entonces, $\angle ABK = \angle MBK = \angle MCK = \angle MCD$. Análogamente, $\angle BAK = \angle MDC$, por lo que $\angle ABK + \angle BAK = \angle MCD + \angle MDC = 180° - \angle CMD = 90°$, de donde $\angle AKB$ es recto.
Como el triángulo AKB es rectángulo, el punto medio de AB, M, es el circuncentro de AKB y por lo tanto, $AM = MK$. Entonces, los triángulos rectángulos AMD y KMD tiene un cateto correspondiente igual y comparten la hipotenusa MD, lo cual los hace congruentes. análogamente MKC y MBC son congruentes. En particular, $AD = DK$ y $KC = BC$.
Usando esto hay muchas formas de terminar, aquí presentamos algunas:
Primera Forma. Como los triángulos AKC y ABC comparten el lado AC la razón de sus áreas es la razón de sus alturas sobre el lado AC. La razón de estas alturas es $\frac{KQ}{QB}$(trazando las alturas se forman triángulos semejantes). Por otra parte, los dos triángulos tienen un lado igual, a saber $BC = KC$,

por lo que la razón de sus áreas es la razón de las alturas a esos lados. Así que llamando R al pie de la perpendicular desde A a CD, $\frac{KQ}{QB} = \frac{AR}{AB}$. Análogamente, $\frac{KP}{PA} = \frac{BS}{AB}$, donde S es el pie de la perpendicular desde B a CD. como AR, MK y BS son perpendiculares a CD y M es el punto medio de AB, tenemos que $AR + BS = 2MK = AB$, por lo que las fracciones suman uno, como debíamos probar.

Segunda Forma. Sean E el punto de intersección de AC con BD y L el punto sobre la recta CD tal que AL es paralela a BD. Como AD y BC son paralelas, $\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AD}$. Por el teorema de Tales, $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DL}$. Entonces,

$$\frac{AD}{DL} = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{AD+BC}.$$

Otra vez por el teorema de Tales,

$$\frac{KP}{PA} = \frac{KD}{DL} = \frac{AD}{DL},$$

de donde

$$\frac{KP}{PA} = \frac{AD}{AD+BC}.$$

Análogamente

$$\frac{KQ}{QB} = \frac{BC}{AD+BC}$$

y las fos fracciones suman uno, como se pedía probar.

Tercera Forma. Sea E el punto de intersección de AC con BD. Por el teorema de Menelao aplicado al triángulo BKD con la recta EQC obtenemos:

$$\frac{KQ}{QB} \cdot \frac{BE}{ED} \cdot \frac{DC}{KC} = 1.$$

Como AD y BC son paralelas, $\frac{BE}{ED} = \frac{BC}{AD}$. Usando esto, que $KC = BC$ y que $CD = AD + BC$, obtenemos que

$$\frac{KQ}{QB} = \frac{BC}{AD+BC}.$$

Ahora terminamos como en la forma anterior.

Otra forma de empezar Finalmente, otra demostración de que AKB es recto y de que $AD = DK$ y $KC = BC$:

Como $\angle AMD + \angle BMC = 180^\circ - \angle CMD = 90^\circ$, los triángulos rectángulos AMD y BCM son semejantes. Ahora, tenemos que

$$\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AM} = \frac{BC}{MB},$$

por lo que el triángulo rectángulo MCD también es semejante a AMD y BCM. Como MK es altura de MCD, entonces KMD y KCM también son semejantes a estos triángulos. Como AMD y KMD comparten la hipotenusa, de hecho son congruentes y por lo tanto, $AD = DK$. Análogamente $KC = BC$. También, como AMD y KMD son congruentes, por simetría, AK es perpendicular a MD y análogamente BK es perpendicular a MC. Si llamamos R y S a las intersecciones de AK con MD y de MC con BK, tres de los ángulos del cuadrilátero $KRMS$ son rectos y por lo tanto el cuarto también.

Solución del problema 7. Supongamos que $m = kt$. Notemos que $10k$ y m coinciden salvo por los dígitos de las decenas y de las unidades. Específicamente, si el dígitos de las unidades de k es a, entonces m termina en $0a$ y $10k$ termina en $a0$. Si $a = 0$, entonces $10k = m$, de modo que todos los k que acaban en 0 cumplen la condición. Supongamos ahora que a no es cero. En este caso, $10k$ (que termina en $a0$) es mayor que m (que acaba en $0a$). Por lo tanto, t es cuando mucho 9. Por otra parte t debe ser mayor que 1 porque $m > k$ (tiene un dígito más, de hecho).

Para cada valor de t encontramos todas las posibilidades para k como sigue: a, el dígito de las unidades de k, debe ser tal que kt también tenga dígitos de las unidades a. Después, encontramos el dígito de las decenas usando que el dígito de las decenas de $m = kt$ es 0, de modo que t por el dígito de las decenas de k más lo que se lleva de calcular at debe terminar en 0. A partir de este momento, cada dígito de k debe ser tal que si se multiplica por t y al producto se le suma lo que se lleve de la posición anterior, el resultado termine en el dígito anterior de k.

Para $t = 2$, 4 y 8 no hay ninún valor de a tal que at termine en a.

Para $t = 6$, a puede ser 2, 4, 6 u 8. Con el procedimiento ya descrito obtenemos los números $X2$, $X34$, $X84$, $X18$ y $X68$, donde las X denotan dígitos para los cuales no queda ninguna posibilidad (o sea que para $t = 6$ la única solución es $k = 18$). Notemos que si después de 18 continuamos con el método, se obtiene $\ldots 00018$, por lo que $k = 18$ realmente es la única solución en este caso.

Para $t = 5$ se obtiene $X5$.

Para $t = 3$ se obtiene $\ldots 28571428571435$ donde el grupo de dígitos 285714 se repite una infinidad de veces. Por lo tanto, no hay solución con $t = 3$.

Para $t = 7$ se obtiene $\ldots 0015$ con el 0 repitiéndose, por lo que la única solución con $t = 7$ es $k = 15$.

Para $t = 9$ se obtiene $\ldots 0045$ con el 0 repitiéndose, por lo que la única solución con $t = 9$ es $k = 45$.

En resumen las soluciones son 15, 18, 45 y los números que terminen en 0.

Segunda Solución. Si b es el dígito de las unidades de k y a es el número formado por los demás dígitos, entonces $k = 10a+b$ y $m = 100a+b$. Supongamos que $m = kt$. Entonces, $100a + b = t(10a + b)$, o sea, $10(10 - t)a = (t - 1)b$. Como $t \geq 1$, el lado derecho es no negativo. Luego, el lado izquierdo también lo es, de donde $t \geq 10$. Si t fuera 1, tendríamos $a = 0$, lo cual es absurdo pues k tiene dos o más dígitos. Si $t = 10$, entonces $b = 0$ y todos estos valores de k cumplen.

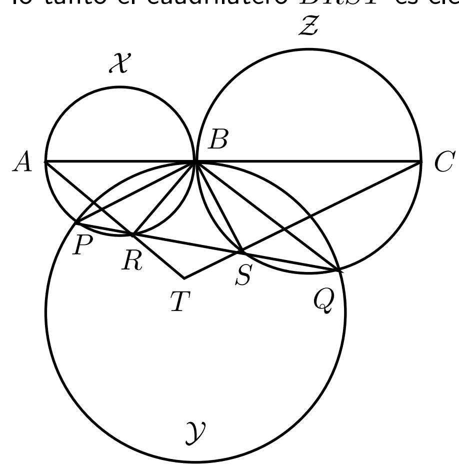
Ahora $(t - 1)b$ debe ser múltiplo de 10 y $t - 1$ no puede ser múltiplo de 10 (t está entre 2 y 9). Por lo tanto, b debe ser par, múltiplo de 5, o ambos. Si es ambos, $b = 0$ y esos valores ya los conocíamos.

Si $b = 5$, la ecuación se simplifica a $2(10-t)a = t-1$. Entonces, $2(10-t) \leq t-1$, o sea, $t \geq 7$. Como $t - 1$ es par, t debe ser 7 ó 9. Para $t = 7$ obtenemos $a = 1$ y la solución $k = 15$. Para $t = 9$ obtenemos $a = 4$ y la solución $k = 45$.

Si b es para (distinto de 0), $t-1$ debe ser múltiplo de 5. Por lo tanto, $t = 6$. La ecuación se simplifica a $8a = b$, como b es un dígito, la única solución es $a = 1$ y $b = 8$, o sea, $k = 18$.

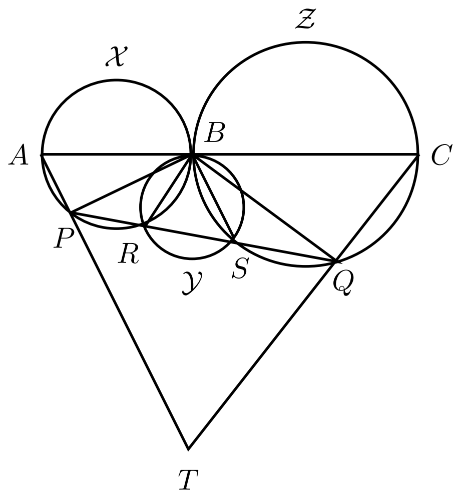
En resumen, las soluciones son los múltiplos de 10, y también los números 15, 45 y 18.

Solución del problema 8. Sea T la interseccion de AR con CS. Probaremos que T está sobre la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ probando que el ángulo ABT es recto. Como AB es diámetro de $\mathcal{X}$, $\angle BRT$ es recto. Como BC es diámetro de $\mathcal{Z}$, $\angle BST$ es recto. Por lo tanto el cuadrilátero $BRST$ es cíclico.

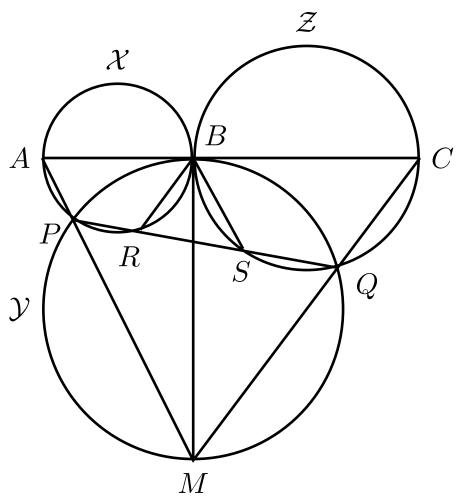


Si R y S están en P y Q, tenemos que $\angle RBT = \angle RST = \angle CSQ = \angle CBQ = \angle BPQ = \angle BAR$ (la primer igualdad ocurre porque $BRST$ es cíclico, la segunda porque los ángulos son opuestos por el vértice, la tercera porque $BSQC$

es cíclico, la cuarta porque BC es tangente a $\mathcal{Y}$, y la última porque $APBR$ es cíclico).
Si P y Q están en R y S es muy parecido: $\angle RBT = \angle RST = 180° - \angle CSQ = \angle CBQ = \angle BPQ = 180° - \angle BPR = \angle BAR$.
En cualquier caso, $\angle RBT = \angle BAR$. Como $\angle BAR + \angle ABR = 90°$, entonces $\angle RBT + \angle ABR = 90°$, o sea $\angle ABT = 90°$.



Segunda Solución. Sea M el punto diametralmente opuesto a B en $\mathcal{Y}$. Como AB es diámetro de $\mathcal{X}$, el ángulo APB es recto.



Como BM es diámetro de $\mathcal{Y}$, el ángulo BPM es recto. Por lo tanto, A, P y M son colineales. Análogamente, C, Q y M son colineales. Probaremos que AR, CS y la tangente común concurren viendo que son alturas del triángulo ACX.

Para ver que AR es perpendicular a CM bastaría ver que BR y CM son paralelas. Tenemos que $\angle ABR = \angle QPM = \angle QBM = \angle BCQ$ (la primera igualdad es porque $APRB$ es cíclico, la segunda porque $BPMQ$ lo es y la última porque BM es tangente a $\mathcal{Z}$). Por lo tanto, AR es altura de ACM. Análogamente, CS es altura del triángulo y claramente BM es altura. Por lo tanto, AR, CS y BM concurren.

Solución del problema 9. Son los valores de a y b que cumplen que $a+b > n$. Probemos primero que $a + b > n$, entonces forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente:
Primera Forma. Supondremos que no hay dos que se gustan mutuamente y demostraremos que $a + b \leq n$. A cada quien le preguntamos quienes le gustan y hacemos una lista de parejas en las que alguno de los dos le gusta al otro. Como no hay dos que se gusten mutuamente, al hacer así la lista no obtenemos parejas repetidas. Por lo tanto, obtenemos a lo más n^2 parejas en la lista. Por otra parte, por cada muchacha obtenemos a parejas y por cada muchacho b, de modo que obtenemos exactamente $an + bn = (a + b)n$ parejas. Entonces, $(a + b)n \leq n^2$ de donde $a + b \leq n$.
Segunda Forma. Este es realmente el mismo argumento que el anterior dicho de otro modo. Numeramos los muchachos y las muchachas con los números del 1 al n, y hacemos una tabla $n \times n$ en la que el cuadro en el renglón i y la columna j, lo pintamos de rojo si a la muchacha i le gusta el muchacho j, de azul si la muchacha i le gusta al muchacho j, y lo dejamos sin pintar en otro caso. Si no hay dos que se gusten mutuamente, ninguna casilla se pinta tanto de rojo como de azul. En cada renglón hay a casillas rojas y en cada columna hay b casillas azules, de modo que en total hay $(a + b)n$ casillas pintadas. Por lo tanto, $(a + b)n \leq n^2$, o sea, $a + b \leq n$.
Tercera forma. Supongamos que $a + b > n$. Como a cada muchacha le gustan a muchachos, en total hay an "gustos"de parte de las muchachas. Entonces, a algún muchacho le tocan al menos a "gustos", es decir, hay algún muchacho popular que le gusta a al menos a muchachas. Como al muchacho popular le gustan b muchachcas y $a+b > n$, no pueden ser todas distintas las a muchachas a las que le gusta y las b que le gustan a él. Por lo tanto, hay una muchacha que le gusta a y a quien le gusta el muchacho popular.

Ahora probaremos que si $a + b \leq n$ puede suceder que no haya una muchacha y un muchacho que se gusten mutuamente.
Primera Forma. Numeramos los muchachos y las muchachas con los números del 1 al n. Imaginemos que a la muchacha i le gustan los muchachos i, $i+1, \ldots,$ $i + a - 1$ (los números se toman módulo n) y que al muchacho j le gustan las

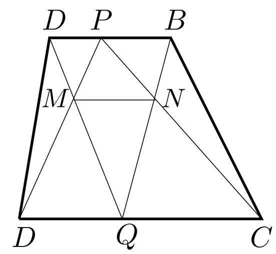
muchachas $j+1, j+2, \ldots, j+b$. En este caso no hay dos que se gusten mutuamente. En efecto, si a la muchacha i le gusta el muchacho j, j debe ser uno de i, $i+1, \ldots, i+a-1$, digamos $i+t$. Entonces, al muchacho j le gustan las muchachas $i+t+1, i+t+2, \ldots, i+t+b$. El primero de eso números es al menos $i+1$ y el último es a lo más $i+a+b-1 \leq i+n-1$, o sea que ninguno es i (o $i+n$).
Segunda Forma. Por lo que se vió en la segunda forma de la primera parte, basta pintar una cuadrícula de manera que haya a cuadros rojos en cada renglón y b azules en cada columna. Empezamos pintando los primeros a cuadros del primer renglón de rojo. El segundo renglón lo hacemos como el primero con los cuadros rojos recorridos un lugar a la derecha. El tercero es el segundo recorrido, etc. Cuando a la hora de recorrer un cuadro rojo se salga por el borde de la cuadrícula lo pasamos al principio de su renglón. Obtenemos una cuadrícula con a cuadros rojos en cada renglón y $n-a$ cuadros vacíos en cada columna. Como $n-a \geq b$ podemos simplemente elegir b cuadros de cada columna y pintarlos de azul.
Tercera Forma. Elegimos $a+b$ números distintos entre 1 y n, digamos $r_1, r_2, \ldots,$ r_a, $s_1, s_2, \ldots, s_b$. Imaginemos una fiesta donde a la muchacha i le gusta el muchacho j si $i-j$ es congruente módulo n con algún r_k, y al muchacho j le gusta la muchacha i si $i-j$ es congruente módulo n con un s_k. Así es fácil ver que a cada muchacha le gustan a muchachos: a la muchacha i le gustan los muchachos $i-r_1$, $i-r_2, \ldots, i-r_a$ (módulo n). Análogamente, a cada muchacho le gustan b muchachas. Además, no hay dos que se gusten mutuamente pues si $i-j$ es congruente con a lo más uno de los $a+b$ números $r_1, r_2, \ldots, r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b$.

Solución del problema 10. Primero probaremos que MN es paralela a AB y a DC. Los triángulos APM y QDM son semejantes, de donde $\frac{PM}{MD} = \frac{AP}{DQ}$. También son semejantes PBN y CQN, de donde $\frac{PN}{NC} = \frac{PB}{QC}$. Pero por hipótesis, $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$, así que $\frac{PM}{MD} = \frac{PN}{NC}$ y por el teorema de Thales, MN es paralela a DC.
Hay muchas formas de concluir, presentamos dos.
Entonces, los triángulos PMN y PDC son semejantes, de donde

$$\frac{DC}{MN} = \frac{DP}{MP} = 1 + \frac{DM}{MP} = 1 + \frac{DQ}{AP} = 1 + \frac{DC}{AB}.$$

Aquí, la última igualdad ocurre porque P divide al segmento AB en la misma razón que Q divide a DC. De aquí, despejamos

$$MN = \frac{AB \cdot DC}{AB + DC}.$$



Alternativamente, de la semejanza de los triángulos PMN y PDC obtenemos $\frac{MN}{DC} = \frac{PM}{PD}$ y de la semejanza de los triángulos QMN y QAB obtenemos que $\frac{MN}{AB} = \frac{MQ}{AQ}$. Por el teorema de Thales, $\frac{MQ}{AQ} = \frac{MD}{PD}$. Entonces, $\frac{MN}{DC} + \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{PD} + \frac{DM}{PD} = 1$, de donde podemos despejar otra vez MN.

Solución del problema 11. Si el primer jugador empieza eligiendo la tarjeta $(1, p)$ con p primo, pierde el jugador que no tome una tarjeta que incluya un múltiplo de p (pues en ese momento el máximo común divisor pasa de p a 1). Si la cantidad de tarjetas que incluyen un múltiplo de p es impar (incluyendo la tarjeta $(1, p)$), al primer jugador le toca la última de ellas y gana. Desafortunadamente, $p = 2$ no cumple: el número de tarjetas con al menos un número par es igual al total de parejas menos el número de parejas con ambos impares, esto es, $\binom{2003}{2} - \binom{1002}{2} = 2003 \cdot 1001 - 501 \cdot 1001$ que es par. Pero $p = 3$ si cumple: como hay 1336 números entre 1 y 2003 que no son múltiplos de 3, hay $\binom{2003}{2} - \binom{1336}{2} = 2003 \cdot 1001 - 668 \cdot 1335$ parejas, donde al menos uno de los números es múltiplo de 3, y ese número es impar.
Se puede verificar que esta estrategia funciona para los siguientes valores de p: 3, 7, 11, 13, 23, 37, 43, 47, 73, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 131, 137, 139, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Solución del problema 12. Primero veamos que no importa el orden en el que se efectúen los dos tipos de cambio sensato: en un orden tenemos $n \to 2n+1 \to 3(2n+1)+2 = 6n+5$, en el otro $n \to 3n+2 \to 2(3n+2)+1 = 6n+5$. Entonces, al hacer una serie de cambios sensatos, podemos hacer primero todos los del tipo $n \to 2n+1$ y después todos los del tipo $n \to 3n+2$.
¿Qué se obtiene si a n se le aplican k cambios sensatos del tipo $n \to 2n+1$?

Calculemos los primeros pasos: $n \to 2n+1 \to 4n+3 \to 8n+7 \to 16n+15 \to \ldots$. Después de k cambios se obiene $2^k n + 2^k - 1$.
Análogamente, si a n se le aplican k cambios sensatos del tipo $n \to 3n+2$ se obtiene $3^k n + 3^k - 1$.
Ahora, podemos determinar cuándo dos números a y b son compatibles: según lo anterior, si c se obtiene con cambios sensatos a partir de a, usando j del primer tipo y k del segundo, entonces $c = 3^k(2^j a + 2^j - 1) + 3^k - 1 = 2^j 3^k (a+1) - 1$. Análogamente, si c se obtiene a partir de b, c se puede escribir como $c = 2^r 3^s (b+1) - 1$. Igualando, $2^j 3^k (a+1) = 2^r 3^s (b+1)$. Recíprocamente, si existen números j, k, r y s que cumplan la última igualdad, a y b son compatibles (pues si a a le hacemos j cambios del tipo $n \to 2n+1$ y k del tipo $n \to 3n+2$ obtenemos el mismo resultado que si a b le hacemos r cambios del tipo $n \to 2n+1$ y s del tipo $n \to 3n+2$).
Así que para que a se compatible con 2003, debemos tener, para algunos números, j, k, r y s, que $2^j 3^k (a+1) = 2^{r+2} 3^{s+1} \cdot 167$, es decir, $a = 2^{r+2-j} 3^{s+1-k} \cdot 167 - 1$. Por lo tanto, los números buscados son los de la forma $a = 2^l 3^m \cdot 167 - 1$ que son menores que $2003 = 12 \cdot 167 - 1$. Los números de la forma $2^l 3^m$ menores que 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 9, por lo que los números buscados son 166, 333, 500, 667, 1001, 1335 y 1502.
Segunda Solución. Supongamos que c se obtiene a partir de a con cambios sensatos y escribamos la lista de los números intermedios que se obtienen con los cambios sensatos: $a \to x \to y \to \ldots \to c$, donde $x = 2a+1$ ó $3a+2$, $y = 2x+1$ ó $3x+2$, etc. Si le sumamos uno a cada número de la lista, obtenemos otra listas $a+1 \to x+1 \to y+1 \to \ldots \to c+1$, en la que $x+1 = (2a+1)+1 = 2(a+1)$ ó $(3a+2)+1 = 3(a+1)$, es decir, el segundo número es el doble o el triple del anterior. Consideremos ahora la factorización de $a+1$ como producto de potencias de primos distintos. La factorización de $c+1$ tiene las mismas potencias de los primos que no son ni 2, ni 3; y del 2 y el 3 puede tener cualquier potencia que sea mayor o igual que la que aparece en la factorización de $a+1$.
Por lo tanto, a y b con compatibles si y sólo si las factorizaciones de $a+1$ y $b+1$ tienen las mismas potencias de todos los primos que no son ni 2, ni 3. Como $2003 + 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, los compatibles con 2003 son los de la forma $2^l 3^m \cdot 167 - 1$. De éstos, los menores que 2003 son los que tienen $2^l 3^m < 12$. Los valores posibles son $2^l 3^m = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$, por lo que los números buscados son 166, 333, 500, 667, 1001, 1335 y 1502.

Solución del problema 13. Tenemos que $pqr + 1$ es cuadrado, por tanto $pqr = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$, para algún entero m.

Dividimos en dos casos:

(i) Si $p \mid m-1$,

(a) Si $m+1 = qr$, entonces $m-1 = p$ y $qr - p = 2$, lo cual no es posible ya

que $qr > p^2 \geq 2p \geq p+2$.

(b) Si $m+1 = q$, entonces $m-1 = pr$, luego $q > pr > r$, lo cual no es posible.

(c) Si $m+1 = r$, entonces $m-1 = pq$, luego $pq = r-2 = (2004 - 25pq) - 2$.

Tenemos entonces que,

$26pq = 2002 \implies pq = 7 \cdot 11 \implies p = 7$ y $q = 11$. Luego, $r = pq + 2 = 7 \cdot 11 + 2 = 79$.

(ii) Si $p \mid m+1$,

(a) Si $m-1 = qr$, entonces $m+1 = p$, pero entonces $p > qr > r$, lo cual no es

posible.

(b) Si $m-1 = q$, entonces $m+1 = pr$ y $pr - q = 2$, pero esto no es posible ya

que $pr > 2r > 2q > q+2$.

(c) Si $m-1 = r$, entonces $m+1 = pq$, luego $pq = r+2 = (2004 - 25pq) + 2$.

Por lo que $26pq = 2006$, y no hay solución ya que $\frac{2006}{26}$ no es entero.

Por tanto la única solución es $p = 7$, $q = 11$ y $r = 79$.

Segunda Solución. Tenemos que $pq = \frac{2004-r}{25} < \frac{2004}{25} < 81$

Luego, $p^2 < pq < 81 \Rightarrow p < 9$. Entonces tenemos cuatro casos:

(i) Si $p = 2 \Rightarrow 25pq + r$ es impar, por tanto no hay solución.

(ii) Si $p = 3$, entonces $r = 2004 - 25 \cdot 3 \cdot q = 3(668 - 25q) \Rightarrow 3$ divide a r, pero $r > 3$ y r es primo, por tanto no hay solución.

(iii) Si $p = 5$, entonces $5 < q < \frac{81}{5} < 17$ y tenemos los siguientes subcasos:

$a)$ Si $q = 7 \Rightarrow r = 2004 - 25 \cdot 5 \cdot 7 = 1129$ que es primo, pero $5 \cdot 7 \cdot 1129 + 1 \equiv 6(\text{mod} 9)$ y no puede ser un cuadrado porque es múltiplo de 3 pero no de 9.

$b)$ Si $q = 11 \Rightarrow r = 2004 - 25 \cdot 5 \cdot 11 = 629 = 17 \cdot 37$ que no es primo.

$c)$ Si $q = 13 \Rightarrow r = 2004 - 25 \cdot 5 \cdot 13 = 379$ que es primo, pero $5 \cdot 13 \cdot 379 + 1 \equiv 3(\text{mod} 9)$ y no puede ser un cuadrado.

(iv) Si $p = 7$, entonces $7 < q < \frac{81}{7} < 12$ de donde $q = 11$ y $r = 2004 - 25 \cdot 7 \cdot 11 = 79$ que es primo, y $7 \cdot 11 \cdot 79 + 1 = 77 \cdot 79 + 1 = 78^2$.

Por tanto la única solución es $p = 7$, $q = 11$ y $r = 79$.

Solución del problema 14. Supongamos que $a_1 < a_2 < ... < a_n$ es una colección con la mayor cantidad de enteros con la propiedad.
Es claro que $a_i \geq i$, para toda $i = 1, ..., n$.
Si a y b son dos enteros de la colección con $a > b$, como $|a - b| = a - b \geq \frac{ab}{100}$, tenemos que $a(1 - \frac{b}{100}) \geq b$, por lo que si $100 - b > 0$, entonces $a \geq \frac{100b}{100-b}$.
Notemos que no existen dos enteros a y b en la colección mayores que 100, en efecto si $a > b > 100$, entonces $a - b = |a - b| \geq \frac{ab}{100} > a$, lo cual es falso.
También tenemos que para enteros a y b menores que 100, se cumple que $\frac{100a}{100-a} \geq \frac{100b}{100-b} \iff 100a - ab \geq 100b - ab \iff a \geq b$.
Es claro que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ es una colección con la propiedad.
Ahora, $a_{11} \geq \frac{100a_{10}}{100-a_{10}} \geq \frac{100\cdot 10}{100-10} = \frac{100}{9} > 11$, lo que implica que $a_{11} \geq 12$.

$$
\begin{aligned}
a_{12} &\geq \frac{100a_{11}}{100 - a_{11}} \geq \frac{100 \cdot 12}{100 - 12} = \frac{1200}{88} > 13 \implies a_{12} \geq 14. \\
a_{13} &\geq \frac{100a_{12}}{100 - a_{12}} \geq \frac{100 \cdot 14}{100 - 14} = \frac{1400}{86} > 16 \implies a_{13} \geq 17. \\
a_{14} &\geq \frac{100a_{13}}{100 - a_{13}} \geq \frac{100 \cdot 17}{100 - 17} = \frac{1700}{83} > 20 \implies a_{14} \geq 21. \\
a_{15} &\geq \frac{100a_{14}}{100 - a_{14}} \geq \frac{100 \cdot 21}{100 - 21} = \frac{2100}{79} > 26 \implies a_{15} \geq 27. \\
a_{16} &\geq \frac{100a_{15}}{100 - a_{15}} \geq \frac{100 \cdot 27}{100 - 27} = \frac{2700}{73} > 36 \implies a_{16} \geq 37. \\
a_{17} &\geq \frac{100a_{16}}{100 - a_{16}} \geq \frac{100 \cdot 37}{100 - 37} = \frac{3700}{63} > 58 \implies a_{17} \geq 59. \\
a_{18} &\geq \frac{100a_{17}}{100 - a_{17}} \geq \frac{100 \cdot 59}{100 - 59} = \frac{5900}{41} > 143 \implies a_{18} \geq 144.
\end{aligned}
$$

Y como ya hemos observado que no hay dos enteros de la colección mayores que 100, la mayor cantidad es 18.
Una colección con 18 enteros que cumple la condición es,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 21, 27, 37, 59, 144\}.$$

Segunda Solución. Observemos que la condición es equivalente a $|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}| \geq \frac{1}{100}$.

Es fácil ver que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ es una colección con la propiedad y que el siguiente número que es posible agregar a esta colección de modo que siga cumpliendo la propiedad es el 12. Continuando de esta manera obtenemos una colección con 18 enteros que cumple la condición:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 21, 27, 37, 59, 144\}.$$

Para ver que no puede haber una con más elementos, partimos los enteros positivos mayores que 9 en los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{c} 10, 11 \\ 12, 13 \\ 14, 15, 16 \\ 17, 18, 19, 20 \\ 21, 22, \ldots, 26 \\ 27, 28, \ldots, 36 \\ 37, 38, \ldots, 58 \\ 59, 60, \ldots, 143 \\ 144, 145, \ldots \end{array}$$

Observemos que si a y b son el mínimo y el máximo de alguno de los primeros 8 renglones, $|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}| < \frac{1}{100}$. Por lo tanto, esto mismo sucede para cualesquiera a y b distintos que estén en el mismo renglón (de los primeros 8), puesto que los extremos son los números cuyos recíprocos están más alejados.

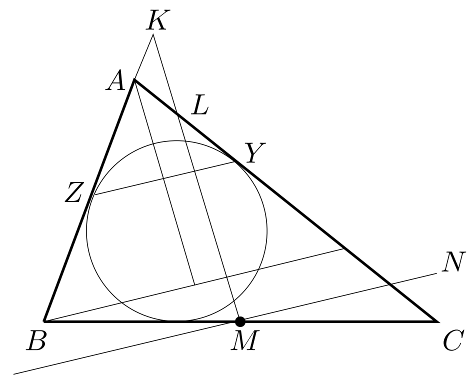
Por otro lado, si a y b son dos números distintos del último renglón, suponiendo sin pérdida de generalidad que $a < b$, entonces $|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}| = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{144} < \frac{1}{100}$.

Consideremos una colección de enteros que cumple la propiedad. Por lo anterior, ésta puede tener a lo más un número de cada uno de los nueve renglones. Entonces, puesto que los números del 1 al 9 son los únicos que no aparecen en la tabla, la colección tiene a lo más $9 + 9 = 18$ elementos, lo cual junto con el ejemplo ya dado muestra que el máximo buscado es 18.

Solución del problema 15. Como AZ y AY son tangentes al incírculo de ABC, se cumple que $AZ = AY$. Trazamos la paralela a YZ por B y llamamos N' al punto donde esta recta corta a CA. También trazamos la perpendicular a BN' por A y llamamos M' al punto donde ésta corta a BN'.

Como los triángulos AZY y ABN' son semejantes (tienen lados paralelos), se tiene que ABN' es isósceles, por lo que AM' es bisectriz del $\angle BAN'$ y M' es punto medio de BN'.

Los triángulos CMN y CBN' son semejantes (tienen lados paralelos) y como M es punto medio de BC, la razón de semejanza es $1 : 2$, por lo que $CN = NN'$ y $MN = M'N'$. También tenemos por ser MN y BN' paralelas que $\angle M'N'A = \angle MNL$, entonces, por el criterio LAL, los triángulos $M'N'A$ y MNL son semejantes. Por lo que LM y MN son perpendiculares.

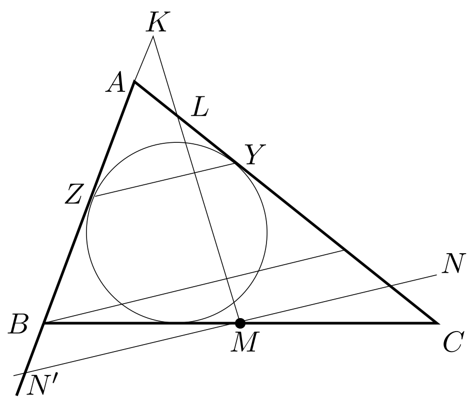


Ahora observemos que, $AL = AN - NL = AN - AB = AN - AN' = N'N = CN$.

Y también que, $\angle AKL = \angle BAM' = \angle M'AC = \angle ALK$ (ya que AM' y MK son paralelas y AM' es bisectriz).

Luego el triángulo ALK es isósceles con $AK = AL$ y por tanto $AK = CN$.

Segunda Solución. Sea N' la intersección de MN con AB. Como AZ y AY son tangentes al incírculo de ABC, entonces $AZ = AY$, y por ser $N'N$ paralela a ZY tenemos que $AN' = AN$.



Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ABC, con N', M y N colineales obtenemos que $\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$, y como $BM = MC \Rightarrow CN = BN'$.

Observemos que $AC = AN + NC = AN' + NC = (AB + BN') + NC = AB + 2NC$ y que $AC = AL + LN + NC = AL + AB + NC$, por tanto $AL = NC$.

Aplicando otra vez el Teorema de Menelao al triángulo ABC, pero ahora con K, M y L colineales obtenemos que $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA} = -1 \Rightarrow \frac{CL}{LA} = \frac{KB}{KA} \Rightarrow \frac{CL}{LA} - 1 = \frac{KB}{KA} - 1 \Rightarrow \frac{CL-LA}{LA} = \frac{KB-KA}{KA} \Rightarrow \frac{CL-CN}{LA} = \frac{AB}{KA} \Rightarrow \frac{NL}{LA} = \frac{AB}{KA}$,y como $NL = AB \Rightarrow LA = KA \Rightarrow KA = CN$.

Solución del problema 16. Sea n el número de equipos en el torneo, como cada equipo jugó contra todos los demás equipos exactamente una vez, entonces cada equipo jugó $n-1$ partidos.

Supongamos que dos equipos X y Y ganaron ambos k partidos, entonces si X le ganó a Y ocurre que X le ganó a todos los equipos que le ganó Y (por la hipótesis), y entonces X le ganó al menos a $k+1$ equipos, lo cual contradice que X y Y habían ganado el mismo número de partidos; el mismo argumento se usa para mostrar que Y no le pudo haber ganado a X. Por tanto, como no hay empates, no hay dos equipos con el mismo número de partidos ganados. Como a lo más hay n valores posibles para el número de partidos ganados, se tiene que los equipos ganaron $n-1$, $n-2, \ldots$, 1, 0 en algún orden.

Si un equipo ganó h partidos entonces perdió $n-1-h$ partidos, entonces su diferencia (positiva) entre el número de partidos ganados y perdidos es $|n-1-2h|$.

Sea D la suma de todas estas diferencias, entonces:

a) Si n es par, entonces $n=2m$ con m entero y

$D=(2m-1)+(2m-3)+\ldots+1+1+\ldots+(2m-3)+(2m-1)=2[(2m-1)+(2m-3)+\ldots+1]=2m^2$.

b) Si n es impar, entonces $n=2m+1$ con m entero y

$D=2m+(2m-2)+\ldots+2+0+2+\ldots+(2m-2)+2m=2[2m+(2m-2)+\ldots+2]=4[m+(m-1)+\ldots+1]=4\frac{m(m+1)}{2}=2m(m+1)$

Como $D=5000$, entonces:

a) $2m^2=D=5000 \Rightarrow m=50 \Rightarrow n=2m=100$.

b) $2m(m+1)=D=5000 \Rightarrow m(m+1)=2500$, pero $49\cdot 50<2500<50\cdot 51$, por tanto no hay solución en este caso.

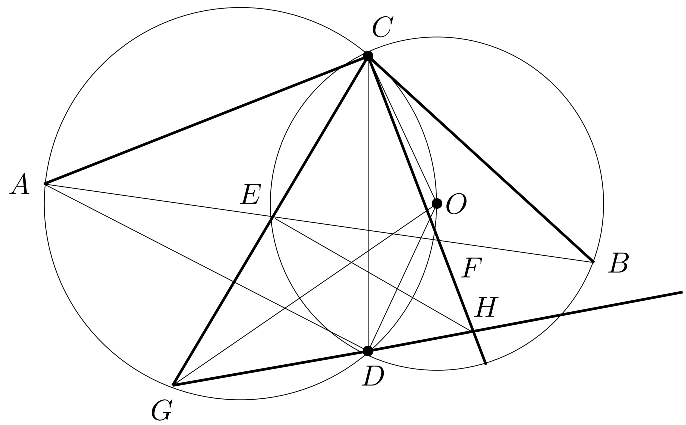
Por tanto la única respuesta posible es $n=100$.

Segunda Solución. Sea n el número de equipos que participaron en el torneo. Supongamos que A es el equipo que más partidos ganó y digamos que ganó k. Entonces $k=n-1$, es decir, A derrotó a todos los demás equipos. En efecto, si un equipo Q le hubiera ganado a A, por la condición del problema, Q también le habría ganado a los k equipos que A derrotó, de modo que Q habría ganado al menos $k+1$ partidos (lo cual contradice que k es el máximo).

Análogamente, de los equipos restantes, el que más partidos ganó, digamos B, debe haberle ganado a todos los equipos salvo A. Luego, C, el equipo que después de A y B ganó más partidos, debe haberle ganado a todos los equipos salvo A y B, y así sucesivamente.

Por lo tanto, si ordenamos los equipos del que más partidos ganó al que menos, entonces el k-ésimo equipo en la lista ganó $n-k$ partidos. Concluimos como en la primer solución.

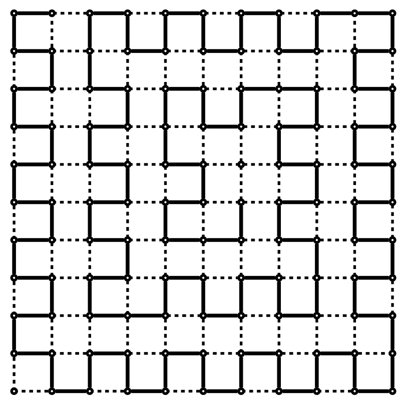
Solución del problema 17. Como O es centro de $\mathcal{B}$ se tiene $CO = OD$ y entonces $\angle DCO = \angle CDO$, y como $CGDO$ es cíclico, $\angle CGO = \angle CDO = \angle DCO = \angle DGO$, por tanto GO es bisectriz de $\angle CGD$.



Como CA es tangente a $\mathcal{B}$ tenemos que $\angle ACO = 90°$, por tanto, $\angle AFO = 90°$ (esto se sigue de que AO es diámetro de $\mathcal{A}$ o de que $ACOF$ es cíclico). Entonces OF es mediatriz de EB lo cual implica $EF = FB$.
Luego, como CA es tangente a $\mathcal{B}$ y CB es tangente a $\mathcal{A}$ tenemos que $\angle ACE = \angle CBE = \alpha$ y $\angle BCF = \angle CAF = \beta$, entonces $\angle CEF = \angle ACE + \angle EAC = \alpha + \beta = \angle CBF + \angle BCF = \angle CFE$ por tanto $EC = CF$.
También, $CADF$ es cíclico, entonces $\angle DAF = \angle DCF = \gamma$, $\angle CDF = \angle CAF = \beta$ y $\angle COD = 180° - \angle DAC$, y como $CBDE$ también es cíclico, obtenemos $\angle DBE = \angle DCE = \theta$.
Por criterio AAA, los triángulos CAE y BCF son semejantes, entonces $\frac{AE}{CF} = \frac{CE}{BF} \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{CF}{BF}$.Tomando la potencia de E con respecto a $\mathcal{A}$ obtenemos $AE \cdot EF = CE \cdot EG \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{EG}{EF}$,y entonces $\frac{CF}{BF} = \frac{EG}{EF} \Rightarrow \frac{EG}{CF} = \frac{EF}{BF} = 1 \Rightarrow EG = CF$.
En el triángulo ABC tenemos $180° = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \beta + \alpha + (\beta + \gamma + \theta + \alpha)$, entonces $\angle COD = 180° - \angle DAC = 180° - (\angle CAF + \angle FAD) = 180° - (\beta + \gamma) = 2\alpha + \beta + \theta$; y por otro lado $\angle COD = 2\angle CBD = 2(\angle CBE + \angle EBD) = 2(\alpha + \theta)$, entonces $2\alpha + \beta + \theta = 2\alpha + 2\theta \Rightarrow \beta = \theta. \Rightarrow \angle CDF = \angle DCE \Rightarrow FD \parallel CG$.
Ahora, como FD y CG son paralelas, $DFCG$ es un trapecio isósceles (ya que también es cíclico) y entonces tenemos que $GD = CF$ y también que $\frac{HD}{DG} = \frac{HF}{FC} \Rightarrow HD = HF \Rightarrow HG = HC$ y entonces los triángulos CHG y FHD son isósceles. Además, como $GE = EC$ entonces HE es mediatriz de

GC, y por ser $FDGC$ trapecio isósceles, HE también es mediatriz de FD.
Por último, como $GD = CF = EG$ el triángulo EGD es isósceles, y como GO es bisectriz de $\angle EGD$, entonces GO también es mediatriz de ED, por tanto, la intersección de GO y de EH es el circuncentro del triángulo DEF.

Solución del problema 18. Veamos primero que un recorrido no puede cambiar de dirección en cada uno de los puntos de una línea de la cuadrícula. En efecto, cada vez que el recorrido llega a la línea en cuestión, al cambiar de dirección pasa por otro punto de dicha línea antes de cambiar nuevamente de dirección y abandonar la línea. De este modo, suponiendo que cambiara de dirección en cada punto de la línea, estos puntos estarían agrupados por pares, lo cual es imposible dado que son 2005 puntos.



Este argumento requiere una pequeña modificación para la línea en la que inicia el recorrido (es decir, la línea que contiene el primer segmento del recorrido). En ese caso, el punto inicial está apareado con el segundo punto del recorrido y el argumento aplica a los puntos restantes. De hecho, en esta línea hay al menos dos puntos en los que no se cambia de dirección: el que da el argumento y el punto inicial del recorrido.
Por lo tanto hay al menos 2006 puntos en los que no se cambia de dirección, de donde hay a lo más $2005^2 - 2006$ puntos en los que sí.
Sólo falta encontrar un recorrido con $2005^2 - 2006$ cambios de dirección. El ejemplo con $2005^2 - 2006$ cambios de dirección lo construimos en forma similar al recorrido siguiente en una cuadrícula de 10×10. Como 10 y 2004 tienen igual paridad, en cada línea vertical seguirá habiendo un vértice donde no hay cambio de dirección, y uno al final que no se utiliza.
Segunda Solución. Sea R un recorrido con el máximo número de cambios de dirección posible, sin pérdida de generalidad podemos suponer que comenzó con un segmento vertical. Pintemos las líneas horizontales de la cuadrícula de negro

y blanco alternadamente, comenzando con negro. Entonces cada vértice de la cuadrícula es o bien blanco o bien negro.
Para el recorrido R podemos hacer una lista $L(R)$ de los colores de los vértices que se van recorriendo, por ejemplo: $BBNNBNNNB$ (donde B es Blanco, y N es Negro).
Observemos que R tiene un cambio de dirección en un vértice si y sólo si los vértices adyacentes a él en R son de distinto color.
Separemos $L(R)$ en dos listas: $L_1(R)$ formada por las posiciones impares de $L(R)$,y $L_2(R)$ formada por las posiciones pares de $L(R)$. Entonces el número de cambios de dirección de R es la suma de los cambios de color de $L_1(R)$ y de $L_2(R)$, y además por la forma en que coloreamos, alguna de las dos listas comienza con B, sin pérdida de generalidad suponemos que es $L_1(R)$.
Sea i el número de cambios de color en $L_1(R)$ y sea j el número de cambios de dirección en $L_2(R)$, entonces el número de B's en $L_1(R)$ es al menos $\frac{i+1}{2}$ y en $L_2(R)$ es al menos $\frac{j}{2}$, por tanto el número de B's en $L(R)$ es al menos $\frac{i+j+1}{2}$, entonces como $\frac{2004\cdot 2005}{2}$ es el número de B's en toda la cuadrícula, $\frac{i+j+1}{2} \leqslant \frac{2004\cdot 2005}{2} \Rightarrow i+j \leqslant 2004\cdot 2005 - 1$.

Bibliografía

[1] Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*. Academia de la Investigación Científica, México 1993.

[2] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] E. Gentile, *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[5] R. Grimaldi, *Matemáticas Discretas y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[6] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[7] A. Illanes Mejía, *Principios de Olimpiada* en la colección *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

[8] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[9] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[10] M. L. Pérez Seguí, *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[11] M. L. Pérez Seguí, *Teoría de Números*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[12] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[13] N. Vilenkin, *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Radmila Bulajich
(Presidenta)

Anne Alberro Semerena

Ignacio Barradas Bribiesca

Martín Eduardo Frías Armenta

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Jesús Jerónimo Castro

Humberto Montalván Gámez

Antonio Olivas Martínez

Elena Ruiz Velázquez

Carmen Sosa Garza