Problemas para la $\mathbf{22^a}$
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

(Problemas Avanzados)

Editado por:

Carlos Jacob Rubio Barrios

2008

Carlos Jacob Rubio Barrios

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 22^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores del certamen formarán las selecciones que participarán en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2009: la XXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico que se llevará a cabo en el mes de marzo en México y los exámenes se corregirán en Corea, la 50^{a} Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en Alemania durante el mes de julio, la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre en México y la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se celebrará en junio en la República Dominicana.

En la 22^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^{o} de agosto de 1989. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2008-2009 y, para el 1^{o} de julio de 2009, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

La intención de esta publicación es que sirva como guía para los alumnos que desean prepararse para el Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela, son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que requiere de una mayor madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos

a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.
Este folleto incluye problemas de los concursos estatales de: Baja California, Distrito Federal, Morelos, Puebla y San Luis Potosí.

Etapas de la Olimpiada

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Hermosillo, Sonora, del 9 al 14 de noviembre de 2008. En él, se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2008. También, se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas y Saltillo.

Resultados de México en las Internacionales

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en las Olimpiadas Internacionales, Iberoamericanas y Centroamericanas han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwán	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37

La 48^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Hanoi, Vietnam, del 19 al 31 de julio de 2007. La delegación que representó a México estuvo

integrada por los alumnos: Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Aldo Pacchiano Camacho (Morelos), Fernando Campos García (Distrito Federal), Cristian Manuel Oliva Avilés (Yucatán), Manuel Novelo Puc (Yucatán) y Marco Antonio Ávila Ponce de León (Yucatán).
México ocupó el lugar número 37 de 92 países participantes. Los alumnos Isaac, Aldo, Fernando y Cristian obtuvieron medalla de bronce, y Manuel y Marco Antonio obtuvieron mención honorífica.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4

La XXII Olimpiada Iberoamericana se llevó a cabo en Coimbra, Portugal, del 9 al 16 de septiembre de 2007. Los alumnos que concursaron fueron: Aldo Pacchiano Camacho (Morelos), Fernando Campos García (Distrito Federal), Paúl Iván Gallegos Bernal (Jalisco) y Manuel Novelo Puc (Yucatán). Los cuatro alumnos obtuvieron medalla de plata. México ocupó el cuarto lugar de 22 países participantes.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1

Del 4 al 9 de junio de 2007, se celebró en Mérida, Venezuela la IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Luis Ángel Isaías Castellano (Colima), Alejandro Jiménez Martínez (Guanajuato) y Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua). Los alumnos Luis Ángel y Alejandro obtuvieron medalla de oro y Manuel Guillermo obtuvo medalla de plata. México ocupó el primer lugar entre los doce países participantes.

Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. No existe un registro estadístico sobre la participación de México antes del año 2004.

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
2004	Canadá	19	9
2005	Corea	19	13
2006	Corea	21	10
2007	Corea	21	10

Durante el mes de marzo de 2007 se aplicó el examen de la XIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a todos los alumnos que en ese momento se encontraban en los entrenamientos. Dicho examen se aplica y califica en México. Los mejores exámenes se enviaron a Corea para ser evaluados por el comité coreano. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Isaac Buenrostro

Morales (Jalisco) con medalla de plata; Erick Alejandro Gallegos Baños (Oaxaca), Fernando Campos García (Distrito Federal), Andrés Leonardo Gómez Emilsson (Distrito Federal), Marco Antonio Ávila Ponce de León (Yucatán), Manuel Jesús Novelo Puc (Yucatán) y Cristian Manuel Oliva Avilés (Yucatán) con medalla de bronce. Los siguientes alumnos obtuvieron mención honorífica: Eduardo Velasco Barrera (Sonora) y Malors Emilio Espinosa Lara (Jalisco). México ocupó el lugar número 10 de los 21 países participantes.

Número de Medallas obtenidas en Concursos Internacionales

La siguiente tabla contiene el número total de medallas obtenidas por México en las Olimpiadas Internacionales.

Olimpiada	*Oro*	*Plata*	*Bronce*	*Mención Honorífica*
Internacional	1	5	33	23
Iberoamericana	15	31	23	3
Centroamericana	16	9	2	0
Cuenca del Pacífico[1]	2	4	12	16

[1] Desde 2004.

Resultados del Concurso Nacional de la 21^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 11 al 16 de noviembre de 2007 se llevó a cabo en Saltillo, Coahuila, el Concurso Nacional de la 21^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 18 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Anguiano Chávez Marcelino (Chihuahua)
López Buenfil Manuel Guillermo (Chihuahua)
Isaías Castellanos Luis Ángel (Colima)
Díaz Nava Benito Clemente (Hidalgo)
Espinoza Lara Malors Emilio (Jalisco)
Gallegos Bernal Paul Iván (Jalisco)
Mendoza Orozco Rodrigo (Jalisco)
Álvarez Rebollar José Luis (Michoacán)
Blanco Sandoval Bruno (Morelos)
Campero Núñez Andrés (Morelos)

Pacchiano Camacho Aldo (Morelos)
Gallegos Baños Erik Alejandro (Oaxaca)
Juárez Ojeda Rígel Apolonio (Puebla)
Velasco Barreras Eduardo (Sonora)
Culebro Reyes Jakob (Veracruz)
Novelo Puc Manuel Jesús (Yucatán)
Tuyub Román Daniel Abisai (Yucatán)
Vera Ruiz Alan Alejandro (Yucatán)

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Hernández González Flavio (Aguascalientes)
Arreola Gutiérrez Fernando Ignacio (Aguascalientes)
Dosal Bustillos Manuel Enrique (Chihuahua)
Ríos Velázquez Mónica del Carmen (Nuevo León)
Vera Garza José Carlos (Nuevo León)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 21^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Jalisco
2. Morelos
3. Yucatán
4. Chihuahua
5. Colima
6. Nuevo León
7. Sonora
8. Veracruz
9. Puebla
10. Michoacán

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "Águila que Vuela" y fue ganado por Colima. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Oaxaca y Veracruz, respectivamente.

Agradecimientos

Agradecemos a todos los estados que colaboraron con los problemas que aparecen en este folleto. Agradecemos a Gabriela Campero Arena la revisión de los problemas de práctica, a Pablo Soberón Bravo la revisión de la Olimpiada Centroamericana, a Marco Antonio Figueroa Ibarra la revisión de la Olimpiada Iberoamericana, a Rogelio Valdez Delgado la revisión de la Olimpiada de la Cuenca y de la Internacional, a Antonio Olivas Martínez la revisión de los exámenes nacionales y a Radmila Bulajich Manfrino la elaboración de las figuras.

Información sobre la Olimpiada

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

http://www.omm.unam.mx/

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Enero de 2008

Capítulo 1

Enunciados de los Problemas

1.1. Problemas de Práctica

Problema 1. Sea $ABCDE$ un pentágono tal que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB tienen la misma área. Supongamos que AC y AD intersecan a BE en los puntos M y N, respectivamente. Demuestra que $BM = NE$.

Problema 2. Denotemos con $S(n)$ a la suma de los primeros n enteros positivos. Diremos que un entero positivo n es *fantástico* si n y $S(n)$ son ambos cuadrados perfectos. Por ejemplo, el número 49 es fantástico, porque $49 = 7^2$ y $S(49) = 1 + 2 + \cdots + 49 = 1225 = 35^2$ son ambos cuadrados perfectos. Encuentra un entero $n > 49$ que sea fantástico.

Problema 3. Demuestra que en cualquier partición del conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ en tres subconjuntos, hay uno de ellos que cumple que el producto de sus números es mayor que 71.

Problema 4. Encuentra todos los enteros no negativos a y b que satisfacen la ecuación $3 \cdot 2^a + 1 = b^2$.

Problema 5. Considera un hexágono con la propiedad de que todos sus ángulos internos son iguales, pero sus lados no son necesariamente iguales. Demuestra que la suma de las longitudes de dos lados consecutivos es igual a la suma de las longitudes de sus respectivos lados opuestos.

Problema 6. Determina todos los posibles resultados que se obtienen al sumar 90 enteros distintos tomados del 1 al 100.

Problema 7. Sea ABC un triángulo y sea I su incentro. Sea C_1 la circunferencia que pasa por B y es tangente en I a la bisectriz del ángulo C, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por C y es tangente en I a la bisectriz del ángulo B. Demuestra que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se cortan en un punto que está en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Problema 8. Determina todos los enteros positivos a, b, c, d con $a < b < c < d$ tales que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

sea un entero.

Problema 9. Un número de cubitos de lado uno se ponen juntos para formar un cubo más grande y algunas de las caras del cubo grande se pintan. Después de pintado se vuelven a separar los cubitos pequeños y nos damos cuenta de que 45 de los cubos pequeños no tienen ninguna cara pintada. ¿Cuántas caras del cubo grande se pintaron?

Problema 10. Sean m y n enteros positivos con $m > 1$. Demuestra que $\phi(m^n - 1)$ es divisible entre n donde ϕ es la función de Euler.

Problema 11. Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que $\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$.

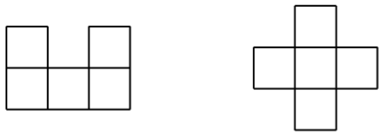
Problema 12. Demuestra que todo entero positivo se puede escribir en la forma $a^2 + b^2 - c^2$ donde a, b y c son enteros positivos y $a < b < c$.

Problema 13. Considera un conjunto finito de puntos en el plano con la propiedad de que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es a lo más 1. Demuestra que el conjunto de puntos puede ser encerrado en un círculo de radio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 14. Sea $\mathcal{C}$ el circuncírculo del triángulo ABC. Tracemos la bisectriz l del ángulo A. Sean L el punto de intersección de l con BC y N el otro punto de intersección de l con $\mathcal{C}$. Sea M el punto de intersección de la circunferencia que pasa por A, B y L con el segmento AC. Demuestra que las áreas de los triángulos BNM y BMC son iguales.

Problema 15. Sea p un número primo y sean a, b, c y d enteros tales que $a^2 + b^2 = p = c^2 + d^2$. Demuestra que $a = \pm c$ y $b = \pm d$, o $a = \pm d$ y $b = \pm c$.

Problema 16. Determina todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de dimensiones $15 \times n$ con piezas del tipo:



- Las piezas no deben encimarse ni dejar huecos.
- Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

Problema 17. Determina el máximo común divisor de los números:

$$3^3 - 3, 5^5 - 5, 7^7 - 7, \ldots, 2007^{2007} - 2007.$$

Problema 18. ¿Para qué enteros $n \geq 5$ se pueden pintar los vértices de un n-ágono regular usando a lo más 6 colores de tal manera que cualesquiera 5 vértices consecutivos tengan distinto color?

Problema 19. En el triángulo ABC, sea H el ortocentro. Demuestra que las rectas de Euler de los triángulos AHB, BHC y CHA concurren.

Problema 20. Sobre una circunferencia se señalan siete puntos y se asignan enteros positivos distintos a cada uno de ellos. Luego, en forma simultánea, cada número se reemplaza por el mínimo común múltiplo de los dos números vecinos a él. Si se obtiene el mismo número n en cada uno de los siete puntos, determina el menor valor que puede tener n.

Problema 21. Demuestra que el producto de cuatro enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto ni tampoco un cubo perfecto.

Problema 22. Sea $ABCD$ un cuadrado con centro en el punto O. Sea X el punto tal que $AOBX$ es un cuadrado y sean M, Y los puntos medios de los segmentos AB y OB, respectivamente. Sean $\mathcal{C}_1$, la circunferencia que pasa por X, M, Y; $\mathcal{C}_2$, la circunferencia que tiene centro C y radio igual a CM; y $\mathcal{C}_3$, la circunferencia con diámetro CX. Demuestra que las tres circunferencias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ tienen un punto en común.

Problema 23. En algunas casillas de un tablero de 10×10 se coloca una ficha de manera que se cumpla la siguiente propiedad: para cada casilla que tiene una ficha, la cantidad de fichas colocadas en su misma fila debe ser mayor o igual que la cantidad de fichas colocadas en su misma columna. ¿Cuántas fichas puede haber en el tablero?

Problema 24. Demuestra que para cada entero positivo n existe un número de n dígitos divisible entre 5^n formado de puros dígitos impares.

Problema 25. Determina todos los enteros positivos n para los cuales existen $k \geq 2$ números racionales positivos a_1, $a_2, \ldots, a_k$ que satisfacen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k = n.$$

Problema 26. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se intersectan en los puntos A y B. La tangente común más próxima al punto A toca las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en los puntos C y D respectivamente. Una paralela a la recta CD se traza a través de A, cortando a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en los puntos E y F respectivamente. Sean G e I las intersecciones de la recta DA con $\mathcal{C}_1$ y BC respectivamente (G distinto de A). Análogamente, sean H y J las intersecciones de CA con $\mathcal{C}_2$ y BD respectivamente. Finalmente, sean K y L las intersecciones de CG con BE y de DH con BF respectivamente. Demuestra que los puntos I, J, K y L están sobre una recta paralela a CD.

Problema 27. Sean x, y enteros tales que $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y$ y $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y$ son ambos múltiplos de 17. Demuestra que $xy - 12x + 15y$ también es múltiplo de 17.

Problema 28. Demuestra que es posible elegir 7 puntos en el plano con la propiedad de que entre cualesquiera tres de ellos, hay dos a distancia 1.

Problema 29. Demuestra que existe un entero positivo n tal que:

$$(\sqrt{2007} - \sqrt{2006})^{2008} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Problema 30. Sean $m > 1$ y $n > 1$ enteros. Encuentra todos los enteros x, y tales que:

$$x^n + y^n = 2^m.$$

Problema 31. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Sea D el pie de la perpendicular desde B sobre AC, y sea E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo BDC con BC. Sean M y N los puntos medios de BE y DC, respectivamente, y sea F el punto de intersección de MN con BD. Demuestra que $AD = 2BF$.

Problema 32. Un hombre del desierto antes de morir dejó dicho en su testamento que sus tres hijos deberían recibir la n-ésima, m-ésima y t-ésima parte de su rebaño de camellos, respectivamente. El hombre tenía N camellos, $N \geq 3$, en el rebaño cuando murió, donde $N+1$ es un múltiplo común de n, m y t. Como los tres hijos no pudieron dividir N exactamente en n, m y t partes, mandaron llamar a Pablo para que les ayudara a resolver el problema. Pablo llegó con su propio camello, el cual se sumó al rebaño. Entonces el rebaño fue dividido de acuerdo a los deseos del hombre. Pablo tomó entonces su camello de vuelta, el cual sobró después de la repartición. Determina todas las soluciones posibles (n, m, t, N).

Problema 33. Sean:

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2007 \cdot 2008}$$

y

$$B = \frac{1}{1005 \cdot 2008} + \frac{1}{1006 \cdot 2007} + \cdots + \frac{1}{2008 \cdot 1005}.$$

Demuestra que $\frac{A}{B}$ no es un entero.

Problema 34. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $\angle ADC = \angle BCD > 90°$. Sea E el punto de intersección de AC con la paralela a AD por B, y sea F el punto de intersección de BD con la paralela a BC por A. Demuestra que EF y CD son paralelas.

Problema 35. Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que:

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} > \sqrt{2}.$$

Problema 36. Sea n un entero positivo. Determina todos los enteros que se pueden escribir en la forma:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}$$

para algunos enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no necesariamente distintos.

Problema 37. Decimos que un entero positivo es *3-partito* si sus divisores positivos se pueden separar en tres conjuntos con la misma suma. Demuestra que hay infinitos enteros positivos 3-partitos. (Los conjuntos pueden tener sólo un elemento).

Problema 38. Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero convexo $ABCD$. La bisectriz del ángulo ACD intersecta a BA en el punto K. Si $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, demuestra que $\angle BKC = \angle BDC$.

Problema 39. (a) Demuestra que entre cualesquiera 2007 enteros positivos distintos, existe un entero con la propiedad de que el producto de los 2006 números restantes se puede escribir en la forma $a^2 - b^2$ para algunos enteros positivos a y b.
(b) Supón que uno de los 2007 enteros es el 2006. Demuestra que si hay un único entero (de los 2007 enteros dados) con la propiedad del inciso anterior, entonces este único entero es el 2006.

Problema 40. Sobre el lado AB del triángulo equilátero ABC se escogen dos puntos P y Q (con P mas cerca de A que de Q) de manera que $\angle PCQ = 30°$. Sean M y N los puntos medios de los lados BC y AC respectivamente y R y S puntos sobre CQ y CP respectivamente tales que RM es perpendicular a BC y NS es perpendicular a AC. Demuestra que las diagonales del cuadrilátero $PQRS$ son perpendiculares.

Problema 41. Los lados y las diagonales de un n-ágono convexo ($n \geq 3$), se pintan con n colores de tal manera que cada color se usa al menos una vez. Demuestra que hay un triángulo con vértices del polígono, cuyos lados están pintados con 3 colores distintos.

Problema 42. Determina todos los enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ sea múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

Problema 43. En el triángulo ABC se tiene que $\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$. Sea P un punto en el segmento AB tal que $\angle BPC = 30^\circ$. Demuestra que $AP = BC$.

Problema 44. El producto de ciertos números primos no necesariamente distintos, es 10 veces su suma. Determina dichos números.

Problema 45. En una Olimpiada de Matemáticas participan n estudiantes de m países. En la ceremonia de inauguración, los estudiantes del mismo país no se saludan (pues ya se conocen entre ellos), y pueden o no saludar a los participantes de otros países una única vez. Si N es el número total de saludos que hubo, demuestra que:

$$N \leq \frac{n^2(m-1)}{2m}.$$

(Nota. El número de estudiantes que lleva cada país no es limitado, y no necesariamente es el mismo para dos países diferentes).

Problema 46. Demuestra que para cada entero $n \geq 0$, el número $7^{7^n} + 1$ es el producto de al menos $2n + 3$ números primos no necesariamente distintos.

Problema 47. Sea $JHIZ$ un rectángulo, y sean A y C puntos en los lados ZI y ZJ, respectivamente. La perpendicular desde A sobre CH intersecta a la recta HI en el punto X, y la perpendicular desde C sobre AH intersecta a la recta HJ en el punto Y. Demuestra que los puntos X, Y, Z son colineales.

Problema 48. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ enteros mayores o iguales que -1 y al menos uno de ellos distinto de cero. Si $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^na_n = 0$, demuestra que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$.

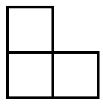
Problema 49. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos a y b tales que $a^2 + 1$ es múltiplo de b y $b^2 + 1$ es múltiplo de a.

Problema 50. En un torneo de volibol durante la copa Europa-África, hubieron 9 equipos más de Europa que de África. Cada pareja de equipos jugó exactamente una vez, y en total los equipos europeos ganaron 9 veces tantos partidos como ganaron los equipos africanos. ¿Cuál es el máximo número de partidos que un solo equipo africano pudo haber ganado?

Problema 51. Sea $n > 1$ un entero y sea p un número primo tal que n divide a $p - 1$ y p divide a $n^3 - 1$. Demuestra que $4p - 3$ es un cuadrado perfecto.

Problema 52. Sea n un entero mayor que 1. Sobre cada vértice de un polígono de $2n$ lados se escribe un entero de tal forma que cualquier lado del polígono tiene escritos sobre sus extremos dos enteros consecutivos. Decimos que dos vértices del polígono son *adyacentes* si son los extremos de un lado del polígono. Un vértice del polígono se llama *loma* si el número escrito sobre él es mayor que los números escritos sobre los dos vértices adyacentes a él. Un vértice del polígono se llama *valle* si el número escrito sobre él es menor que los números escritos sobre los dos vértices adyacentes a él. Sea L la suma de los números escritos sobre las lomas del polígono, y sea V la suma de los números escritos sobre los valles del polígono. Demuestra que $L - V = n$.

Problema 53. Utilizando fichas como la que se muestra en la figura, donde cada cuadrito es de 1×1, ¿es posible cubrir una cuadrícula de 5×7 de tal manera que cada cuadrito de la cuadrícula quede cubierto el mismo número de veces? (Se permite que se traslapen las piezas, pero no que se salgan de la cuadrícula).



Problema 54. Sea ABC un triángulo cuyo lado más pequeño es BC. Sean P un punto de AB tal que $\angle PCB = \angle BAC$ y Q un punto sobre AC tal que $\angle QBC = \angle BAC$. Demuestra que la recta que pasa a través de los centros de los circuncírculos de los triángulos ABC y APQ, es perpendicular a BC.

Problema 55. Determina el menor número real r con la propiedad de que existen dos triángulos no congruentes con lados de longitudes enteras y áreas iguales a r.

Problema 56. Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea K el punto de intersección de AO y BC. Sean L y M puntos en los lados AB y AC respectivamente, tales que $KL = KB$ y $KM = KC$. Demuestra que las rectas LM y BC son paralelas.

Problema 57. Las casillas de una cuadrícula de 9×9 se llenan con los enteros del 1 al 81. Demuestra que hay un entero k, $1 \leq k \leq 9$, tal que el producto de los números en el renglón k es distinto del producto de los números de la columna k.

Problema 58. (a) Demuestra que en cualquier colección de nueve enteros distintos, se pueden elegir cuatro, digamos a, b, c y d, tales que $a+b-c-d$ es múltiplo de 20.
(b) Demuestra que no se cumple (a) en colecciones de ocho enteros.

Problema 59. Sea P un polígono regular de $2m+1$ lados y sea C su centro. ¿Cuántos triángulos cuyos vértices coinciden con vértices de P contienen a C en su interior?

Problema 60. Encuentra todos los enteros a, b que satisfacen la ecuación:

$$(a+1)(a+2)(a+3)+a(a+2)(a+3)+a(a+1)(a+3)+a(a+1)(a+2)=b^{2^a}.$$

1.2. Problemas de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Problema 1. (19a OMM) Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y sea P un punto cualquiera sobre el segmento BC ($P \neq B$ y $P \neq C$). Supón que la circunferencia circunscrita al triángulo BPO corta al segmento AB en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al triángulo COP corta al segmento CA en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$).

(i) Considera el triángulo PQR; muestra que que es semejante al triángulo ABC y que su ortocentro es O.

(ii) Muestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO, COP y PQR son todas del mismo tamaño.

(Sugerido por José Antonio Gómez)

Problema 2. (19a OMM) Dadas varias cuadrículas del mismo tamaño con números escritos en sus casillas, su *suma* se efectúa casilla a casilla, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Dado un entero positivo N, diremos que una cuadrícula es N-*balanceada* si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado es menor o igual que N.

(i) Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 2 cuadrículas n-balanceadas.

(ii) Muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 3 cuadrículas n-balanceadas.

(Sugerido por David Mireles)

Problema 3. (19a OMM) Determina todas las parejas (a, b) de enteros distintos de cero para las cuales es posible encontrar un entero positivo x primo relativo con b y un entero cualquiera y, tales que en la siguiente lista hay una infinidad de números enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

(Sugerido por Miguel Raggi)

Problema 4. (19a OMM) Decimos que una lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_m$ contiene una *terna aritmética* a_i, a_j, a_k si $i < j < k$ y $2a_j = a_i + a_k$. Por ejemplo, $8, 1, 5, 2, 7$ tiene una terna aritmética (8, 5 y 2) pero $8, 1, 2, 5, 7$ no. Sea n un entero positivo. Muestra que los números $1, 2, \ldots, n$ se pueden reordenar en una lista que no contenga ternas aritméticas.

(Sugerido por José Antonio Gómez)

Problema 5. (19a OMM) Sea N un entero mayor que 1. En cierta baraja de N^3 cartas, cada carta está pintada de uno de N colores distintos, tiene dibujada una de N posibles figuras y tiene escrito un número entero del 1 al N (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama *completa* si tiene cartas de todos los colores, o si entre sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números.
¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, ya se vuelven completas?

(Sugerido por Humberto Montalván)

Problema 6. (19a OMM) Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E traza l la recta paralela a AD y considera un punto P sobre l y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.

(Sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

Problema 7. (20a OMM) Sea ab un número de dos dígitos. Un entero positivo n es "pariente" de ab si:

- el dígito de las unidades de n también es b,
- los otros dígitos de n son distintos de cero y suman a.

Por ejemplo, los parientes de 31 son 31, 121, 211 y 1111.
Encuentra todos los números de dos dígitos que dividen a todos sus parientes.

(Sugerido por Simon Knight)

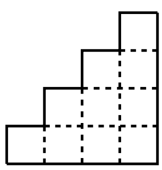
Problema 8. (20a OMM) Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, tal que $AB < AC$. Sea M el punto medio de BC y D la intersección de AC con la perpendicular a BC que pasa por M. Sea E la interseción de la paralela a AC que pasa por M con la perpendicular a BD que pasa por B. Demuestra que los triángulos AEM y MCA son semejantes si y sólo si $\angle ABC = 60°$.

(Sugerido por Julio Brau)

Problema 9. (20a OMM) Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números $1, 2, 3, ..., 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

(Sugerido por Humberto Montalván)

Problema 10. (20a OMM) ¿Para qué enteros positivos n puede cubrirse una escalera como la de la figura (pero con n escalones en vez de 4) con n cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos cuadrados se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?



(Sugerido por Humberto Montalván)

Problema 11. (20a OMM) Sean ABC un triángulo acutángulo y, AD, BE y CF sus alturas. La circunferencia con diámetro AD corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de AD con EF y MN, respectivamente. Demuestra que Q es el punto medio de PD.

(Sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

Problema 12. (20a OMM) Sea n la suma de los dígitos de un entero positivo A. Decimos que A es "surtido" si cada uno de los enteros $1, 2, ..., n$ es suma de dígitos de A.

1. Demuestra que si $1, 2, ..., 8$ son sumas de dígitos de un entero A entonces A es surtido.

2. Si $1, 2, ..., 7$ son sumas de dígitos de un entero A, ¿es A necesariamente surtido?

Nota: El número 117 no es surtido pues sólo $1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $7 = 7$, $8 = 1 + 7$, $9 = 1 + 1 + 7$ se pueden escribir como suma de dígitos de 117.

(Sugerido por Juan José Alba)

Problema 13. (21a OMM) Encuentra todos los enteros positivos N con la siguiente propiedad: entre todos los divisores positivos de N hay 10 números consecutivos pero no 11.

(Sugerido por Humberto Montalván Gámez)

Problema 14. (21a OMM) Dado un triángulo equilátero ABC, encuentra todos los puntos P del plano que cumplan $\angle APB = \angle BPC$.

(Sugerido por José Antonio Gómez Ortega)

Problema 15. (21a OMM) Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $a + b + c = 1$. Muestra que:

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$

(Sugerido por José Antonio Gómez Ortega)

Problema 16. (21a OMM) Para un entero positivo n se definen: n_1 como la suma de los dígitos de n, n_2 como la suma de los dígitos de n_1 y n_3 como la suma de los dígitos de n_2. Por ejemplo para $n = 199$, $n_1 = 199_1 = 19$, $n_2 = 199_2 = 10$ y $n_3 = 199_3 = 1$.
Encuentra todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que:

$$\begin{aligned} m + n &= 2007 \\ m_3 + n_3 &= 2007_3 \end{aligned}$$

(Sugerido por Octavio Arizmendi Echegaray)

Problema 17. (21a OMM) En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

(Sugerido por Andrés Leonardo Gómez Emilsson)

Problema 18. (21a OMM) Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Muestra que $BD = AC$ si y sólo si $\angle BAC = 2\angle ABM$.

(Sugerido por David Torres Flores y Alejandro Jiménez Mtz.)

Capítulo 2

Olimpiadas Internacionales en las que participa México

2.1. XIX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Problema 1. Sea S un conjunto de 9 enteros distintos tal que todos los factores primos de estos números son menores o iguales a 3. Muestre que S contiene 3 enteros distintos tales que su producto es un cubo perfecto.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 60°$ y $AB > AC$. Sean I el incentro y H el ortocentro del triángulo ABC. Muestre que:

$$2\angle AHI = 3\angle ABC.$$

Problema 3. Considere n discos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ en el plano tales que para cada $1 \leq i < n$, el centro de C_i está sobre la circunferencia de C_{i+1}, y el centro de C_n está sobre la circunferencia de C_1. Defina el *resultado* de tal arreglo de n discos como el número de parejas (i, j) para las cuales C_i contiene propiamente a C_j (es decir, C_j está contenido en C_i, pero $C_i \neq C_j$). Determine el *resultado* máximo posible.

Problema 4. Sean x, y, z números reales positivos tales que $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = 1$.

Muestre que:

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1.$$

Problema 5. Un arreglo regular de focos de 5×5 está defectuoso, ya que al apagar o encender el apagador de uno de los focos provoca que cada foco adyacente en la misma columna o en la misma fila, además del foco mismo, cambie de estar encendido a apagado o de apagado a encendido. Inicialmente todos los focos están apagados. Después de apagar o encender los apagadores varias veces, sólo un foco permanece encendido. Encuentre todas las posibles posiciones de este foco.

2.2. IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe

Problema 1. La OMCC es una competencia anual de Matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpiada. ¿Para cuáles enteros positivos n se cumple que n divide al año en que se realiza la n-ésima olimpiada?

Problema 2. Sean ABC un triángulo, D y E puntos en los lados AC y AB, respectivamente, tales que las rectas BD, CE y la bisectriz que parte de A concurren en un punto P interior al triángulo. Demuestre que hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilátero $ADPE$ si y sólo si $AB=AC$.

Problema 3. Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p, q de S, con $p\neq q$, hay elementos a, b, c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a\neq 0$, de manera que el polinomio $F(x)=ax^2+bx+c$ cumple que $F(p)=F(q)=0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto S.

Problema 4. Los habitantes de cierta isla hablan un idioma en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: a, b, c, d, e, f, g. Se dice que una palabra *produce* a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

1. Cambiar una letra por dos letras de acuerdo a la siguiente regla:

$$a\to bc, b\to cd, c\to de, d\to ef, e\to fg, f\to ga, g\to ab.$$

2. Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Ejemplo: $dfd \to f$.

Por ejemplo, $cafed$ produce a $bfed$, porque:

$$cafed \to cbcfed \to bfed.$$

Demuestre que en esta isla toda palabra *produce* a cualquier otra palabra.

Problema 5. Dados dos números enteros no negativos m, n, con $m > n$, se dirá que m termina en n si es posible borrar algunos dígitos de izquierda a derecha de m para obtener n. Por ejemplo, 329 termina en 9 y en 29 únicamente. Determine cuántos números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.

Problema 6. Desde un punto P exterior a una circunferencia S se trazan tangentes que la tocan en A y B. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM corta a S en C (interior al $\triangle ABP$), la recta AC corta a la recta PM en G, y la recta PM corta a S en el punto D exterior al triángulo $\triangle ABP$. Si BD es paralelo a AC, demuestre que G es el punto donde concurren las medianas del $\triangle ABP$.

2.3. XXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problema 1. Dado un entero positivo m, se define la sucesión $\{a_n\}$ de la siguiente manera:

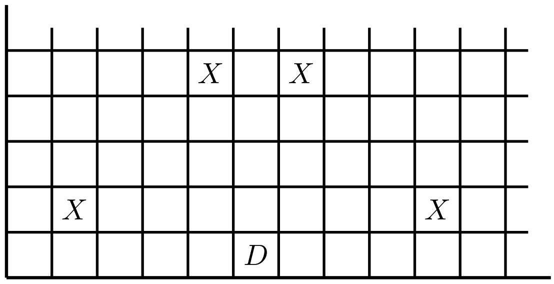
$$a_1 = \frac{m}{2}, \quad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil, \text{ si } n \geq 1.$$

Determinar todos los valores de m para los cuales a_{2007} es el primer entero que aparece en la sucesión.
Nota: Para un número real x se define $\lceil x \rceil$ como el menor entero que es mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2007 \rceil = 2007$.

Problema 2. Sean ABC un triángulo con incentro I y Γ una circunferencia de centro I, de radio mayor al de la circunferencia inscrita y que no pasa por ninguno de los vértices. Sean X_1 el punto de intersección de Γ con la recta AB más cercano a B; X_2, X_3 los puntos de intersección de Γ con la recta BC siendo X_2 más cercano a B; y X_4 el punto de intersección de Γ con la recta CA más cercano a C. Sea K el punto de intersección de las rectas X_1X_2 y X_3X_4. Demostrar que AK corta al segmento X_2X_3 en su punto medio.

Problema 3. Dos equipos, A y B, disputan el territorio limitado por una circunferencia. A tiene n banderas azules y B tiene n banderas blancas ($n \geq 2$, fijo). Juegan alternadamente y A comienza el juego. Cada equipo, en su turno, coloca una de sus banderas en un punto de la circunferencia que no se haya usado en una jugada anterior. Cada bandera, una vez colocada, no se puede cambiar de lugar. Una vez colocadas las $2n$ banderas se reparte el territorio entre los dos equipos. Un punto del territorio es del equipo A si la bandera más próxima a él es azul, y es del equipo B si la bandera más próxima a él es blanca. Si la bandera azul más próxima a un punto está a la misma distancia que la bandera blanca más próxima a ese punto, entonces el punto es neutro (no es de A ni de B). Un equipo gana el juego si sus puntos cubren un área mayor que el área cubierta por los puntos del otro equipo. Hay empate si ambos cubren áreas iguales. Demostrar que, para todo n, el equipo B tiene estrategia para ganar el juego.

Problema 4. En un tablero cuadriculado de 19×19, una ficha llamada *dragón* da saltos de la siguiente forma: se desplaza 4 casillas en una dirección paralela a uno de los lados del tablero y 1 casilla en dirección perpendicular a la anterior.



Desde D el dragón puede saltar a una de las cuatro posiciones X

Se sabe que, con este tipo de saltos, el dragón puede moverse de cualquier casilla a cualquier otra.

La *distancia dragoniana* entre dos casillas es el menor número de saltos que el dragón debe dar para moverse de una casilla a otra.

Sea C una casilla situada en una esquina del tablero y sea V la casilla vecina a C que la toca en un único punto.

Demostrar que existe alguna casilla X del tablero tal que la distancia dragoniana de C a X es mayor que la distancia dragoniana de C a V.

Problema 5. Un número natural n es *atresvido* si el conjunto de sus divisores, incluyendo al 1 y al n, se puede dividir en tres subconjuntos tales que la suma de los elementos de cada subconjunto es la misma en los tres. ¿Cuál es la menor cantidad de divisores que puede tener un número atresvido?

Problema 6. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los hexágonos convexos H que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) los lados opuesto de H son paralelos;
(b) tres vértices cualesquiera de H se pueden cubrir con una franja de ancho 1.

Determinar el menor número real l tal que cada uno de los hexágonos de la familia $\mathcal{F}$ se puede cubrir con una franja de ancho l.
Nota: Una franja de ancho l es la región del plano comprendida entre dos rectas paralelas que están a distancia l (incluidas ambas rectas paralelas).

2.4. 48^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Problema 1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales. Para cada i $(1 \leq i \leq n)$ se define:

$$d_i = \text{máx}\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \text{mín}\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

y sea:

$$d = \text{máx}\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Demostrar que para cualesquiera números reales $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$,

$$\text{máx}\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \tag{2.1}$$

(b) Demostrar que existen números reales $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ para los cuales se cumple la igualdad en (2.1).

Problema 2. Se consideran cinco puntos A, B, C, D y E tales que $ABCD$ es un paralelogramo y $BCED$ es un cuadrilátero cíclico y convexo. Sea l una recta que pasa por A. Supongamos que l corta al segmento DC en un punto interior F y a la recta BC en G. Supongamos también que $EF = EG = EC$. Demostrar que l es la bisectriz del ángulo DAB.

Problema 3. En una competencia de matemáticas algunos participantes son amigos. La amistad es siempre recíproca. Decimos que un grupo de participantes es una *clique* si dos cualesquiera de ellos son amigos. (En particular, cualquier grupo con menos de dos participantes es una clique). Al número de elementos de una clique se le llama *tamaño*. Se sabe que en esta competencia el mayor de los tamaños de las cliques es par.
Demostrar que los participantes pueden distribuirse en dos aulas, de manera que el mayor de los tamaños de las cliques contenidas en un aula sea igual al mayor de los tamaños de las cliques contenidas en la otra.

Problema 4. En un triángulo ABC la bisectriz del ángulo BCA corta a la circunferencia circunscrita en R ($R \neq C$), a la mediatriz de BC en P y a la mediatriz de AC en Q. El punto medio de BC es K y el punto medio de AC es L. Demostrar que los triángulos RPK y RQL tienen áreas iguales.

Problema 5. Sean a y b enteros positivos tales que $4ab-1$ divide a $(4a^2-1)^2$. Demostrar que $a = b$.

Problema 6. Sea n un entero positivo. Se considera:

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\},\ \ x + y + z > 0\}$$

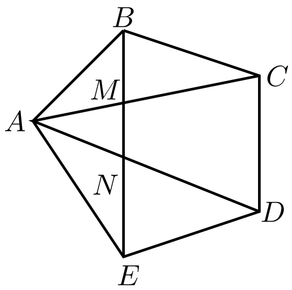
como el conjunto de $(n+1)^3 - 1$ puntos en el espacio tridimensional.
Determinar el menor número posible de planos cuya unión contiene todos los puntos de S pero no incluye a $(0, 0, 0)$.

Capítulo 3

Soluciones de los Problemas

3.1. Soluciones de los Problemas de Práctica

Solución del problema 1. Como los triángulos BCD y CDE tienen la misma área y comparten el lado CD, tenemos que CD y BE son paralelas. De manera similar tenemos que BC es paralela a AD y DE es parelela a AC. Luego, los cuadriláteros $BCDN$ y $MCDE$ son paralelogramos y por lo tanto $BN = CD$ y $ME = CD$. En consecuencia, $BN = ME$, es decir $BM+MN = MN+NE$ de donde $BM = NE$.



Solución del problema 2. Queremos encontrar un entero positivo k tal que $n = k^2$ y $S(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{k^2(k^2+1)}{2}$ sea un cuadrado perfecto. Como k^2 es un cuadrado, basta encontrar k tal que $\frac{k^2+1}{2} = m^2$ para algún entero positivo m. Es decir, queremos que $k^2 - 2m^2 = (k + m\sqrt{2})(k - m\sqrt{2}) = -1$. Como

$S(49) = \frac{7^2(7^2+1)}{2} = 7^2(5^2)$, tenemos que:

$$7^2 - 2 \cdot 5^2 = (7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2}) = -1. \tag{3.1}$$

Además, es claro que:

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1. \tag{3.2}$$

Multiplicando (3.1) y (3.2) tenemos que:

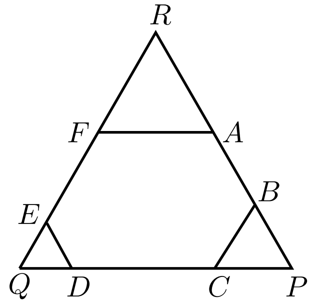
$$\begin{aligned} -1 &= (7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) \qquad (3.3)\\ &= [(7+5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})][(7-5\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]\\ &= (41+29\sqrt{2})(41-29\sqrt{2})\\ &= 41^2 - 2 \cdot 29^2. \end{aligned}$$

De aquí que $k = 41$ y $m = 29$ satisfacen la ecuación $k^2 - 2m^2 = -1$. Por lo tanto, $n = 41^2 = 1681$ es otro número fantástico. (Nótese que si multiplicamos (3.2) con (3.3) obtenemos nuevos valores de k y m y en consecuencia otro número fantástico. Por lo tanto, podemos seguir con este procedimiento de multiplicar la igualdad (3.2) con la nueva igualdad obtenida en el paso anterior y así sucesivamente, para generar una infinidad de números fantásticos).

Solución del problema 3. Supongamos que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ se parte en tres subconjuntos ajenos dos a dos A, B y C, donde el producto de los elementos de cada subconjunto es a, b y c, respectivamente. Si a, b y c son menores o iguales que 71, entonces $abc \leq 71^3 = 357911$. Por otro lado, el producto de los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ es $9! = 362880$, que es mayor que 71^3, lo que es una contradicción. Por lo tanto, al menos uno de los conjuntos A, B o C tiene producto mayor que 71.

Solución del problema 4. Si $a = 0$, entonces $b = 2$. Si $a = 1$, entonces $b^2 = 7$ y no hay solución. Si $a \geq 2$, entonces 2^a es múltiplo de 4 y b es impar. Sea $b = 2c+1$. Entonces $3 \cdot 2^a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1) = 2c(2c+2) = 4c(c+1)$, de donde $3 \cdot 2^{a-2} = c(c+1)$. Si $a = 2$, entonces $3 = c(c+1)$ lo cual es imposible. Luego, $a > 2$. Si $c+1$ es par, entonces c es impar y por lo tanto c es primo relativo con 2^{a-2}. Luego c es divisor de 3, es decir $c = 1$ o 3. Es fácil ver que c no puede ser 1. Si $c = 3$ tenemos que $2^{a-2} = 4$, de donde $a - 2 = 2$. De aquí que $a = 4$ y $b = 7$. Ahora, si c es par entonces $c+1$ es divisor de 3. Es fácil ver que $c+1$ no puede ser 1. Si $c+1 = 3$, entonces $2^{a-2} = 2$. Luego, $a - 2 = 1$ de donde $a = 3$ y $b = 5$. Por lo tanto, las soluciones son $(a, b) = (0, 2), (3, 5)$ y $(4, 7)$.

Solución del problema 5. Sea $ABCDEF$ un hexágono con todos sus ángulos internos iguales. Si α es un ángulo interno, entonces $\alpha = 120°$. Sean $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = a_1$, $EF = b_1$ y $FA = c_1$. Sea P el punto de intersección de las rectas AB y CD. Entonces $\angle PBC = 60°$ y $\angle PCB = 60°$. Por lo tanto, el triángulo BPC es equilátero de lado b.

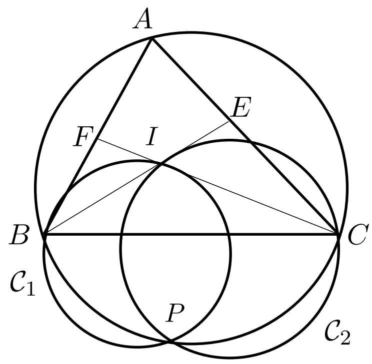


De manera similar, si Q es el punto de intersección de las rectas CD y EF, y R es el punto de intersección de las rectas EF y BA, entonces los triángulos DQE y FRA son equiláteros de lados a_1 y c_1, respectivamente. Entonces, $\angle QPR = \angle RQP = \angle PRQ = 60°$ y por lo tanto el triángulo PQR es equilátero. Luego, $RQ = RP$, es decir, $a_1 + b_1 + c_1 = a + b + c_1$ de donde $a_1 + b_1 = a + b$. Similarmente, $a_1 + c = c_1 + a$ y $c + b = c_1 + b_1$.

Solución del problema 6. Observemos que la suma más pequeña posible es $m = 1 + 2 + \cdots + 90 = \frac{1}{2}(90)(91) = 45(91)$ y la suma más grande posible es $M = 11 + 12 + \cdots + 100 = \frac{1}{2}(90)(111) = 45(111)$. Demostraremos que todo número entero entre m y M se puede escribir como suma de 90 números distintos tomados del 1 al 100. Sean $S_k = k + (k + 1) + \cdots + (k + 89)$ y $R_k = (k+1)+(k+2)+\cdots+(k+90)$ con $1 \leq k \leq 10$. Como $S_k = 90k+45(89)$ y $R_k = 90k+45(91) = S_k+90$, entonces si n es un entero tal que $S_k < n < R_k$, necesariamente n es de la forma $S_k + r$ con $1 \leq r < 90$. Luego, para escribir a n como suma de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100, basta sumarle 1 a cada uno de los r sumandos más grandes de S_k. Por lo tanto, los valores posibles para la suma de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100, son todos los enteros a tales que $45(91) \leq a \leq 45(111)$.

Segunda Solución. Sean m y M como en la primera solución. Supongamos que $b > m$ no puede ser obtenido como la suma de una elección de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100, mientras que $b - 1$ sí puede ser obtenido como una de tales sumas. Sean $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{90} \leq 100$ tales que $b - 1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{90}$. Tenemos entonces que $a_{90} = 100$, pues de otro modo sustituyendo a_{90} por $a_{90} + 1$ obtendríamos b, lo cual no puede ser. Por el mismo argumento, tenemos que $a_{t-1} = a_t - 1$ para $2 \leq t \leq 90$. Luego, $b = M+1 > M$, lo que prueba que todo entero entre m y M (incluyéndolos), se puede escribir como una suma de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100.

Solución del problema 7. Sea P el otro punto de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Basta demostrar que $\angle BAC + \angle BPC = 180°$ (¿por qué?).



Sean $\alpha = \angle ACB$ y $\beta = \angle ABC$. Tenemos que $\angle BAC = 180° - (\alpha + \beta)$. Demostraremos entonces que $\angle BPC = \alpha + \beta$. Sean E y F las intersecciones de la bisectriz por B con el lado AC y de la bisectriz por C con el lado AB, respectivamente. Como la bisectriz por C es tangente a $\mathcal{C}_1$, tenemos que $\angle BPI = \angle BIF$ ya que subtienden el mismo arco. Análogamente tenemos que $\angle CPI = \angle CIE$. Además, $\angle BIC = \angle FIE = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Luego:

$$\begin{aligned} 360° &= \angle BIF + \angle BIC + \angle CIE + \angle FIE \\ &= \angle BPI + 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} + \angle CPI + 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} \\ &= \angle BPC + 360° - (\alpha+\beta), \end{aligned}$$

de donde $\angle BPC = \alpha + \beta$.

Solución del problema 8. Como $1 \leq a < b < c < d$, tenemos que $b \geq 2$, $c \geq 3$ y $d \geq 4$. Entonces:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{12}.$$

Luego, los valores enteros posibles de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ son 1 y 2. Dividimos en casos.
Caso 1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2$.
Si $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$, entonces $d = 6$ y $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$.

Si $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$, entonces $\frac{1}{d} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{12}$ ó $d = \frac{12}{11}$ que no es entero.
Si $a \geq 3$, $b \geq 4$, $c \geq 5$ y $d \geq 6$, entonces $2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1$, lo cual es un absurdo.
Por lo tanto, sólo hay una solución en este caso.
Caso 2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$.
Notemos que sólo hay que considerar el caso $a = 2$, ya que si $a \geq 3$, entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1$.
Si $a = 2$ y $b = 3$, entonces $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{6}$ de modo que $d = \frac{6c}{c-6} = 6 + \frac{36}{c-6}$. Como d es entero, entonces $c - 6$ debe dividir a 36. Luego, las posibilidades para $c - 6$ son $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ y 36, y de aquí se sigue fácilmente que las soluciones con $c < d$ son $(c, d) = (7, 42), (8, 24), (9, 18)$ y $(10, 15)$.
Si $a = 2$ y $b = 4$, entonces $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{4}$ de donde $d = \frac{4c}{c-4} = 4 + \frac{16}{c-4}$. De aquí que $c - 4$ debe ser divisor de 16. Luego, los posibles valores para $c - 4$ son $1, 2, 4, 8$ y 16. Se sigue entonces que las soluciones con $c < d$ son $(c, d) = (5, 20)$ y $(6, 12)$.
Si $a = 2$ y $b = 5$, entonces $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{10}$ de donde $d = \frac{10c}{3c-10} = 3 + \frac{c+30}{3c-10}$. Como d es entero, entonces $3c - 10$ debe dividir a $c + 30$, de modo que $3c - 10 \leq c + 30$ y de aquí que $c \leq 20$. Es fácil verificar que no hay soluciones para c y d con $6 \leq c \leq 20$.
Si $a = 2$ y $b \geq 6$, entonces $c \geq 7$ y $d \geq 8$, de modo que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{157}{168} < 1$ lo cual es un absurdo. Luego, si $a = 2$ y $b \geq 6$ no hay soluciones.
Por lo tanto, las soluciones son $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 6)$, $(2, 3, 7, 42)$, $(2, 3, 8, 24)$, $(2, 3, 9, 18)$, $(2, 3, 10, 15)$, $(2, 4, 5, 20)$ y $(2, 4, 6, 12)$.

Solución del problema 9. Observemos que si tenemos un cubo formado por $6 \times 6 \times 6$ cubitos, el cubo que está en la parte interior del cubo mayor es un cubo de $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubitos que no estarán pintados y el problema nos dice que únicamente 45 cubos pequeños no tienen caras pintadas. Por lo tanto, nuestro cubo grande estará formado por a lo más $5 \times 5 \times 5$ cubitos.
Veamos qué sucede para el caso del cubo formado por $4 \times 4 \times 4$ cubitos. Ocultos a la vista tenemos un cubo formado por $2 \times 2 \times 2 = 8$ cubitos que no se pintan aun cuando pintemos todas las caras del cubo mayor. Luego, tenemos que ver cuántas caras del cubo mayor hay que pintar para tener otros 37 cubitos sin pintar. Si únicamente pintamos una cara del cubo de $4 \times 4 \times 4$, tendremos $3 \times 4 \times 4 = 48$ cubitos sin caras pintadas. Luego, tendremos que pintar al menos dos caras del cubo de $4 \times 4 \times 4$, pero esto lo podemos hacer de dos formas, es decir: pintar dos caras que comparten una arista o pintar dos caras que no tienen una arista en común. Analicemos cada caso. Supongamos que tenemos dos caras pintadas que comparten una arista. Entonces, tendremos

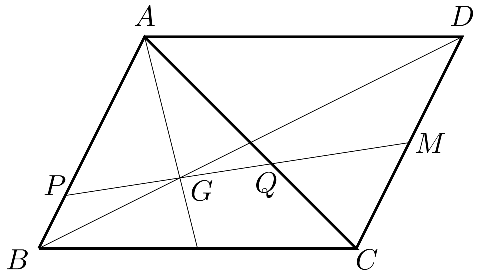
$3 \times 3 \times 4 = 36$ cubitos sin pintar y necesitamos tener 45. Ahora analicemos el caso donde tenemos dos caras pintadas que no comparten una arista. En este caso tenemos $2 \times 4 \times 4 = 32$ cubitos sin pintar. Por lo tanto, no hay posibilidad de obtener 45 cubitos sin pintar para un cubo de $4 \times 4 \times 4$, ya que si pintamos más caras el número de cubitos sin pintar será menor.
Para los cubos formados por un número menor de cubitos tampoco hay solución, ya que tienen mucho menos de 45 cubitos.
En el caso en que el cubo grande esté formado por $5 \times 5 \times 5$ cubitos, siempre habrá $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos pequeños que no tienen caras pintadas y que forman la parte interior del cubo grande. Veamos qué debemos pintar para obtener 18 cubitos más sin pintar. Al igual que en el caso del cubo de $4 \times 4 \times 4$ cubitos, tenemos varios casos. Pensemos en el cubo de $5 \times 5 \times 5$ como una caja con 4 paredes, la base y la tapa. Si pintamos 4 caras, podemos hacerlo de 4 formas: pintar 3 paredes y la tapa; pintar 2 paredes que compartan una arista, la base y la tapa; pintar dos paredes que no compartan una arista, la base y la tapa; o pintar 4 paredes sin pintar la base y la tapa. Los primeros dos casos son equivalentes, y tenemos $(3 \times 4) + (3 \times 3) = 21$ cubitos sin pintar, pero sólo necesitamos 18. Los otros dos casos son equivalentes y se obtienen $3 \times 3 \times 2 = 18$ cubitos sin pintar y por lo tanto habrá $27 + 18 = 45$ cubitos que no tienen caras pintadas. Por lo tanto, se pintaron 4 caras del cubo grande (que es un cubo de $5 \times 5 \times 5$ cubitos).

Solución del problema 10. Es claro que $m^n - 1$ y m son primos relativos. Entonces, por el Teorema de Euler tenemos que $m^{\phi(m^n-1)} \equiv 1 \pmod{m^n - 1}$, es decir, $m^{\phi(m^n-1)} - 1$ es divisible entre $m^n - 1$. Aplicando el siguiente lema, se sigue que $\phi(m^n - 1)$ es divisible entre n.
Lema. *Si a, m y n son enteros positivos y $a > 1$, entonces $a^m - 1$ es divisible entre $a^n - 1$ si y sólo si m es divisible entre n.*
En efecto, si $m = nk$, entonces $a^m - 1 = (a^n)^k - 1$ tiene al factor $a^n - 1$ y por lo tanto $a^m - 1$ es divisible entre $a^n - 1$.
Supongamos ahora que $a^m - 1$ es divisible entre $a^n - 1$. Por el algoritmo de la división, existen enteros q y r tales que $m = qn + r$ donde $0 \leq r < n$ y $q > 0$. Entonces:

$$a^m - 1 = a^{qn+r} - 1 = a^r((a^n)^q - 1) + a^r - 1.$$

Como $a^m - 1$ y $(a^n)^q - 1$ son ambos divisibles entre $a^n - 1$, entonces $a^r - 1$ también es divisible entre $a^n - 1$. Como $a^n - 1 > a^r - 1$ (ya que $a > 1$ y $n > r$), la única posibilidad para que $a^r - 1$ sea divisible entre $a^n - 1$ es que $a^r - 1 = 0$, es decir, $r = 0$. Por lo tanto, $m = qn$ y así m es divisible entre n. Esto demuestra el lema.

Solución del problema 11. Dupliquemos el triángulo trazando AD paralela a BC y CD paralela a BA. Sea M el punto de intersección de CD con PQ y sean $x = PB$, $y = AB$.



Por la semejanza de los triángulos AQP y QMC tenemos que $\frac{QC}{QA} = \frac{MC}{AP} = \frac{MC}{y-x}$, y por la semejanza de los triángulos GPB y GMD tenemos que $\frac{PB}{MD} = \frac{GB}{GD} = \frac{1}{2}$. Entonces, $MD = 2x$ y $MC = y - MD = y - 2x$. Luego:

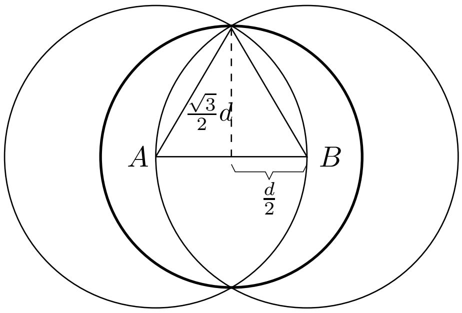
$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x(y-2x)}{(y-x)^2} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 6xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-y)^2 \geq 0.$$

Como $(3x - y)^2 \geq 0$ para todo x, y, se sigue que $\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$. Además, la igualdad se alcanza si y sólo si $PB = x = \frac{y}{3}$, si y sólo si $MC = \frac{y}{3}$, si y sólo si PQ es paralela a BC.

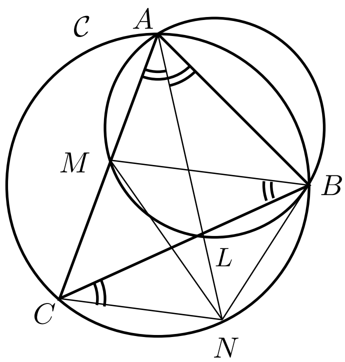
Solución del problema 12. Sea m un entero positivo. Dividimos en dos casos.
Caso 1. m es impar. Claramente, $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$, $3 = 4^2 + 6^2 - 7^2$, $5 = 4^2 + 5^2 - 6^2$ y $7 = 10^2 + 14^2 - 17^2$. Supongamos que $m = 2n + 3$ con $n > 2$. Entonces, $m = (3n + 2)^2 + (4n)^2 - (5n + 1)^2$ y como $n > 2$, tenemos que $3n + 2 < 4n < 5n + 1$.
Caso 2. m es par. Claramente, $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$. Supongamos que $m = 2n$ con $n > 1$. Entonces, $m = 2n = (3n)^2 + (4n - 1)^2 - (5n - 1)^2$ y como $n > 1$, tenemos que $3n < 4n - 1 < 5n - 1$.

Solución del problema 13. Sean A y B dos puntos separados a distancia máxima d, con $d \leq 1$. Con centro en estos puntos, trazamos un par de circunferencias de radio d. Es claro que el resto de los puntos están en la intersección de ambos círculos (si hubiera un punto fuera de la intersección de ambos círculos, la distancia entre ese punto y alguno de A o B sería mayor que d, contradiciendo el hecho de que d es la distancia máxima).
Con centro en el punto medio del segmento AB, trazamos una circunferencia de

radio $\frac{\sqrt{3}}{2}d$. Dicha circunferencia intersecta a las otras dos y encierra completamente la intersección de ambos círculos. Como $d \leq 1$, tenemos que $\frac{\sqrt{3}}{2}d \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto, podemos encerrar a los puntos en un círculo de radio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Solución del problema 14. Tenemos que $\angle BAL = \angle CAL$. Como $\angle MAL = \angle MBL$ por subtender el mismo arco, y $\angle MAL = \angle CAL$, entonces $\angle MBL = \angle BAL$. Similarmente, como $\angle NCB = \angle NAB$ por subtender el mismo arco, y $\angle NAB = \angle BAL$, tenemos que $\angle NCB = \angle BAL$. Luego, $\angle MBL = \angle NCB$ y por lo tanto MB y CN son paralelas. Finalmente, como los triángulos BNM y BMC comparten el lado BM, se sigue que sus áreas son iguales.



Solución del problema 15. Tenemos que $\frac{p}{b^2} = (\frac{a}{b})^2 + 1$ y $\frac{p}{d^2} = (\frac{c}{d})^2 + 1$. Entonces, por una parte tenemos que:

$$\frac{p}{b^2} - \frac{p}{d^2} = \frac{p(d^2 - b^2)}{b^2 d^2} \tag{3.4}$$

y por otra parte tenemos que:

$$\frac{p}{b^2} - \frac{p}{d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a^2d^2 - b^2c^2}{b^2d^2} = \frac{(ad - bc)(ad + bc)}{b^2d^2}. \tag{3.5}$$

Luego, de (3.4) y (3.5) se sigue que $(ad-bc)(ad+bc) \equiv 0 \pmod{p}$. Como p es primo, tenemos que $ad-bc \equiv 0 \pmod{p}$ o $ad+bc \equiv 0 \pmod{p}$. Supongamos que $ad-bc \equiv 0 \pmod{p}$. Es fácil verificar que:

$$p^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2. \tag{3.6}$$

Dividimos en dos casos.
Caso 1. Supongamos que $ad = bc$. Entonces de (3.6) se sigue que $ac+bd = \pm p$ y por lo tanto:

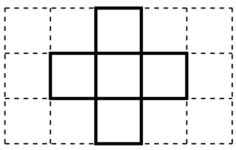
$$\pm ap = a^2c + abd = a^2c + b^2c = pc.$$

Luego, $a = \pm c$ y $b = \pm d$.
Caso 2. Supongamos que $ad \neq bc$. Como $ad-bc \equiv 0 \pmod{p}$, tenemos que $(ad-bc)^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$ y de aquí $(ad-bc)^2 \geq p^2$. Como $(ac+bd)^2 \geq 0$, entonces la expresión (3.6) implica que $(ac+bd)^2 = 0$ y $(ad-bc)^2 = p^2$, es decir $ac+bd = 0$ y $ad-bc = \pm p$. Luego:

$$\pm cp = acd - bc^2 = -bd^2 - bc^2 = -bp,$$

de donde $b = \pm c$. Entonces, $ac+bd = ac \pm cd = 0$, de donde $a = \pm d$. El caso $ad+bc \equiv 0 \pmod{p}$ se prueba de manera similar y se deja al lector.

Solución del problema 16. Observemos primero que para formar un rectángulo con estas piezas sin dejar huecos, necesitamos poner en el borde del rectángulo, piezas en forma de U con la base de la pieza (la parte que tiene 3 cuadritos) pegada al borde, o bien piezas en forma de cruz con una U a cada lado formando bloques rectangulares de 3×5 como se muestra en la figura.



Por lo tanto, n es de la forma $3a+5b$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$ enteros. Como los valores más pequeños de la forma $3a+5b$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$ son $3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 3$, $3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5$, $3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 6$ y $3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$, se sigue que no se pueden construir rectángulos de $15 \times n$ si $n = 1, 2, 4$ o 7. Demostraremos que para cualquier otro entero positivo n sí se puede. En efecto, con 3 bloques de 3×5 se puede formar el rectángulo de 15×3, y con 5 bloques de 3×5 se puede formar el de 15×5. Con dos rectángulos de 15×3 se forma el de 15×6. Si $n \geq 8$, entonces consideremos los siguientes casos:

1. $n = 3k$. Entonces, con k rectángulos de 15×3 formamos el de $15 \times n$.
2. $n = 3k + 1$. Entonces, $n = 3(k - 3) + 10$ y con $k - 3$ rectángulos de 15×3 y dos rectángulos de 15×5 formamos el de $15 \times n$.
3. $n = 3k + 2$. Entonces, $n = 3(k - 1) + 5$ y con $k - 1$ rectángulos de 15×3 y uno de 15×5 formamos el de $15 \times n$.

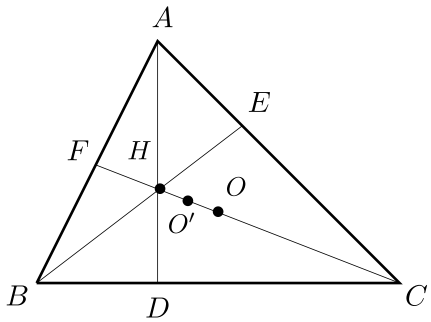
Solución del problema 17. Como el más pequeño de los números es $3^3 - 3 = 24$, el máximo común divisor es a lo más 24. Cada número es de la forma $n^n - n$ con n impar y mayor que 1. Sea $n = 2k + 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} n^n - n &= n\left((n^2)^k - 1\right) = n(n^2 - 1)(n^{2k-2} + n^{2k-4} + \cdots + 1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^{2k-2} + n^{2k-4} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

Como alguno de los números n, $n - 1$ o $n + 1$ es divisible entre 3, entonces $n(n - 1)(n + 1)$ es divisible entre 3. Además, $(n - 1)(n + 1) = 4k(k + 1)$ es divisible entre $4 \cdot 2 = 8$ ya que $k(k + 1)$ es divisible entre 2. Luego, $n^n - n$ es divisible entre $3 \cdot 8 = 24$ para cada $n = 3, 5, 7, \ldots, 2007$. Por lo tanto, el máximo común divisor es 24.

Solución del problema 18. Sean a, b, c, d, e y f los colores. Denotemos por S_1 a la secuencia a, b, c, d, e y por S_2 a la secuencia a, b, c, d, e, f. Si $n > 0$ se puede escribir en la forma $5x + 6y$, con $x, y \geq 0$, entonces n satisface las condiciones del problema: podemos poner x secuencias S_1 consecutivas, seguidas de y secuencias S_2 consecutivas, alrededor del polígono. Si y es igual a 0, 1, 2, 3 o 4, entonces n es igual a $5x$, $5x + 6$, $5x + 12$, $5x + 18$ o $5x + 24$ respectivamente. Los únicos números mayores que 4 que no son de estas formas son 7, 8, 9, 13, 14 y 19. Mostraremos que ninguno de estos números satisface el problema.
Supongamos que existe una coloración de este tipo para n igual a alguno de los números 7, 8, 9, 13, 14 y 19. Sea k el residuo que se obtiene al dividir n entre 6. Por el principio de las casillas, al menos $k + 1$ vértices del polígono tienen el mismo color. Entre cualesquiera dos de estos vértices hay al menos otros 4, ya que cualesquiera 5 vértices consecutivos tienen distinto color. Luego, hay al menos $5k + 5$ vértices, y $n \geq 5k + 5$. Sin embargo, es fácil verificar que esta desigualdad no se cumple para $n = 7, 8, 9, 13, 14$ y 19 (por ejemplo, si $n = 7$, entonces $k = 1$, pero 7 no es mayor o igual que $5(1) + 5 = 10$).
Por lo tanto, dicha coloración es posible para todo entero $n \geq 5$ excepto para $n = 7, 8, 9, 13, 14$ y 19.

Solución del problema 19. Sea O' el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC (es decir, O' es el punto medio de la recta de Euler que va de H a O, donde O es el circuncentro del triángulo ABC. Véase el Teorema 37 del Apéndice). Sean D, E y F los pies de las alturas desde los vértices A, B y C, respectivamente. Entonces los pies de las alturas de los triángulos ABH, BCH y CAH desde el vértice H coinciden con D, E y F. Luego, la circunferencia de los nueve puntos de los triángulos ABH, BCH y CAH es la misma que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC, ya que todas deben pasar por D, E y F.



Entonces, la recta de Euler del triángulo ABH pasa por su ortocentro (que en este caso es C) y por el centro O' de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABH. Luego, la recta de Euler del triángulo ABH es la recta CO'. Análogamente, la recta de Euler del triángulo BCH es la recta AO' y la recta de Euler del triángulo CAH es la recta BO'. Luego, las tres rectas concurren en el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

Solución del problema 20. Sean a, b, c, d, e, f y g los siete números colocados en ese orden en el sentido de las manecillas del reloj. Consideremos la factorización de n como producto de primos. Si $n = p^\alpha$ con p primo, entonces $a = n$ o $c = n$. Si $a = n$ y $c \neq n$, entonces $e = n$, lo cual no es posible. Si $c = n$ y $a \neq n$, entonces $f = n$ que tampoco es posible. Por lo tanto, n no puede ser potencia de un primo.

Supongamos que $n = p^\alpha q^\beta$ con p y q números primos distintos. Como el mínimo común múltiplo de a y c es n, entonces a o c es múltiplo de p^α, y a o c es múltiplo de q^β. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a = p^\alpha q^{\beta_1}$ y $c = p^{\alpha_1} q^\beta$. Entonces, $e = p^\alpha q^{\beta_2}$, $g = p^{\alpha_2} q^\beta$, $b = p^\alpha q^{\beta_3}$, $d = p^{\alpha_3} q^\beta$, $f = p^\alpha q^{\beta_4}$ y $a = p^{\alpha_4} q^\beta$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 son enteros distintos entre sí con $0 \leq \alpha_i \leq \alpha$ para $i = 1, 2, 3, 4$, y $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ y β_4 son enteros distintos entre sí con $0 \leq \beta_i \leq \beta$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Se sigue entonces que $a = p^\alpha q^\beta$, $\alpha \geq 2$ y $\beta \geq 3$. Por lo tanto, en este caso $n \geq 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Supongamos que $n = pqr$ con p, q y r números primos distintos. Es claro que sobre la circunferencia no puede aparecer el número 1 (¿por qué?). Como los

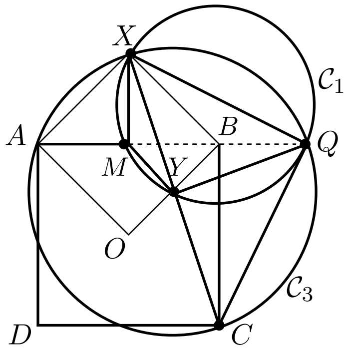
divisores de pqr son $1, p, q, r, pq, qr, rp$ y pqr, entonces los números sobre la circunferencia deben ser precisamente los divisores de pqr distintos de 1. Si $a = p$, entonces $c = qr$ y $f = pqr$ o $c = pqr$ y $f = qr$. En el primer caso, tenemos que $e = p$ lo cual no puede ser. En el segundo caso, tenemos que $d = p$ que tampoco puede ser. Por lo tanto, n no puede ser igual a pqr.
Supongamos que $n = p^2qr$. El menor número de esta forma es $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ y una solución en este caso es $a = 2^2$, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $c = 3 \cdot 5$, $d = 2^2 \cdot 5$, $e = 2^2 \cdot 3$, $f = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $g = 5$.
Si n tiene cuatro o más divisores primos, entonces $n \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.
Por lo tanto, el menor valor que puede tener n es 60.

Solución del problema 21. Sean $n-1, n, n+1, n+2$ cuatro enteros positivos consecutivos. Es fácil ver que:

$$N = (n-1)n(n+1)(n+2) = (n^2+n-2)(n^2+n) = (n^2+n-1)^2 - 1.$$

Luego, si $N = m^2$ para algún entero positivo m, entonces $(n^2+n-1-m)(n^2+n-1+m) = 1$. Luego, $n^2+n-1-m = n^2+n-1+m = 1$ ó $n^2+n-1-m = n^2+n-1+m = -1$, y es fácil verificar que en cualquier caso $m = 0$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, N no puede ser un cuadrado.
Supongamos ahora que N es un cubo. Dividimos en dos casos.
Caso 1. n es impar. Entonces n es primo relativo con el producto $M = (n-1)(n+1)(n+2) = n^3+2n^2-n-2$ (¿por qué?), de modo que M debe ser un cubo también. Pero esto es imposible, pues $n^3 < n^3+2n^2-n-2 < (n+1)^3$ si $n \geq 2$.
Caso 2. n es par. Si $n = 2$, entonces $N = 24$ que no es un cubo. Supongamos que $n > 2$. Entonces $n+1$ es primo relativo con el producto $M = (n-1)n(n+2) = n^3+n^2-2n$ (¿por qué?), de modo que M debe ser un cubo. Pero esto es imposible, pues $n^3 < n^3+n^2-2n < (n+1)^3$ si $n > 2$.

Solución del problema 22. Sea Q el otro punto de intersección de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$. Demostraremos que Q pertenece a $\mathcal{C}_2$. Es fácil ver que O, M y X son colineales y que OX es paralela a BC, y BX es paralela a CO. Luego, $BCOX$ es un paralelogramo y como Y es el punto medio de BO, también lo es de CX, es decir, Y es el centro de $\mathcal{C}_1$. Ahora, como CX es diámetro de $\mathcal{C}_3$, tenemos que $\angle CQX = \angle CQM + \angle MQX = 90°$. Como el cuadrilátero $MYQX$ es cíclico, tenemos que $\angle MQX = \angle MYX$. Además, $\angle XMY = \angle XMB + \angle BMY = 90° + 45° = 135°$. Luego, $\angle XQY = 180° - \angle XMY = 45°$, y como Y es el centro de $\mathcal{C}_1$, el triángulo XYQ es isósceles y por lo tanto $\angle XYQ = 90°$. Como $\angle XMQ = \angle XYQ$ (por subtender el mismo arco), y $\angle XMB = 90°$, tenemos que los puntos M, B y Q son colineales.



Por otro lado, las rectas MY y BX son paralelas, ya que BX es paralela a AO (por ser lados opuestos de un cuadrado) y MY es paralela a AO (por ser M y Y los puntos medios de los lados AB y OB en el triángulo ABO), de modo que $\angle MYX = \angle YXB$. Tenemos entonces que $\frac{YB}{XB} = \frac{1}{2}$, $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$ y $\angle XBY = \angle CBM = 90°$. Entonces, $\frac{YB}{BM} = \frac{XB}{BC}$ y los triángulos XBY y CBM son semejantes con $\angle BMC = \angle BYX = 90° - \angle YXB = 90° - \angle MQX = \angle CQM$. Luego, el triángulo CMQ es isósceles y $CM = CQ$. Por lo tanto, Q pertenece a $\mathcal{C}_2$.

Solución del problema 23. Es claro que una casilla se puede cubrir. Si cubrimos las casillas de una fila de una en una, cumplirán las condiciones. Luego, hemos cubierto de 1 a 10 casillas. Si cubrimos un cuadrado de 2×2, es claro que cumplirá las condiciones. Sobre una de las filas del cuadrado de 2×2, podemos cubrir de una en una todas las casillas de esa fila, y también cumplirán las condiciones. De igual manera se pueden cubrir las casillas de la otra fila del cuadrado de 2×2. De esta forma, hemos cubierto de 4 a 20 casillas. Continuando de esta forma, utilizando cuadrados de 3×3, 4×4, $\ldots$, 9×9, podemos cubrir de 1 a 90 casillas. Ahora, supongamos que podemos cubrir de 91 a 99 casillas. Entonces, hay una fila con a lo más 9 casillas cubiertas. Pero también, por el principio de las casillas, hay una columna con 10 casillas cubiertas, y esto no puede ser. Por lo tanto, no se pueden cubrir de 91 a 99 casillas. Finalmente, es fácil ver que se puede cubrir toda la cuadrícula. Por lo tanto, sólo se puede cubrir de 1 a 90 casillas y toda la cuadrícula.

Solución del problema 24. Procederemos por inducción en n. Claramente para $n = 1$ se cumple. Supongamos que $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ es divisible entre 5^n y tiene puros dígitos impares (la barra denota que los números debajo de ella son los dígitos de N). Sea $N = 5^n M$ y consideremos los números:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \overline{1a_1a_2\dots a_n} = 1\cdot 10^n + 5^n M = 5^n(1\cdot 2^n + M)\\
N_2 &= \overline{3a_1a_2\dots a_n} = 3\cdot 10^n + 5^n M = 5^n(3\cdot 2^n + M)\\
N_3 &= \overline{5a_1a_2\dots a_n} = 5\cdot 10^n + 5^n M = 5^n(5\cdot 2^n + M)\\
N_4 &= \overline{7a_1a_2\dots a_n} = 7\cdot 10^n + 5^n M = 5^n(7\cdot 2^n + M)\\
N_5 &= \overline{9a_1a_2\dots a_n} = 9\cdot 10^n + 5^n M = 5^n(9\cdot 2^n + M)
\end{aligned}$$

Afirmamos que los números $1\cdot 2^n + M$, $3\cdot 2^n + M$, $5\cdot 2^n + M$, $7\cdot 2^n + M$ y $9\cdot 2^n + M$ dejan distinto residuo cuando se dividen entre 5. En efecto, si dos de ellos dejaran el mismo residuo cuando se dividen entre 5, entonces su diferencia también sería múltiplo de 5, lo cual es imposible puesto que 2^n no es múltiplo de 5 ni tampoco lo es la diferencia de cualesquiera dos de los números 1, 3, 5, 7, 9. Se sigue finalmente que uno de los números N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, es múltiplo de $5^n\cdot 5 = 5^{n+1}$, lo que completa la inducción.

Solución del problema 25. La respuesta es $n = 4$ o $n \geq 6$. Primero demostraremos que cada $n \in \{4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$ satisface la condición.
Si $n = 2k \geq 4$ es par, hacemos $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (k, 2, 1, \dots, 1)$. Así, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = k + 2 + 1(k-2) = 2k = n$ y $a_1\cdot a_2\cdots a_k = 2k = n$.
Si $n = 2k+3 \geq 9$ es impar, hacemos $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (k+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 4, 1, \dots, 1)$. Así, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 4 + (k-3) = 2k+3 = n$ y $a_1\cdot a_2\cdots a_k = (k+\frac{3}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 = 2k+3 = n$.
Un caso muy especial es $n = 7$, en el que hacemos $(a_1, a_2, a_3) = (\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, \frac{9}{2})$. Es fácil ver que $a_1 + a_2 + a_3 = a_1\cdot a_2\cdot a_3 = 7 = n$.
Demostraremos ahora que $n \in \{1, 2, 3, 5\}$ no satisface la condición. Supongamos por el contrario, que existe un conjunto de $k \geq 2$ números racionales positivos cuya suma y producto son ambos iguales a $n \in \{1, 2, 3, 5\}$. Por la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que:

$$n^{1/k} = \sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdots a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = \frac{n}{k},$$

de donde:

$$n \geq k^{\frac{k}{k-1}} = k^{1+\frac{1}{k-1}}.$$

Luego:

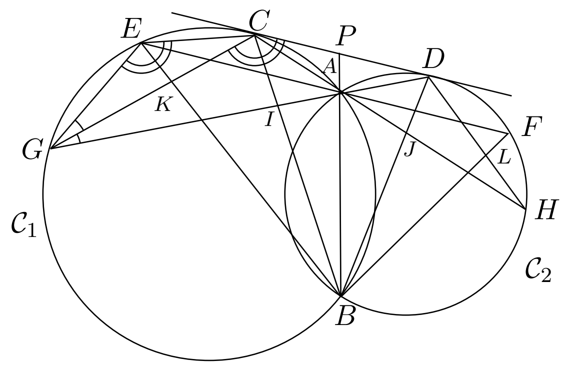
$$\begin{aligned}
k = 3 &\;\Rightarrow\; n \geq 3\sqrt{3} > 5,\\
k = 4 &\;\Rightarrow\; n \geq 4\sqrt[3]{4} > 5,\\
k \geq 5 &\;\Rightarrow\; n \geq 5^{1+\frac{1}{k-1}} > 5,
\end{aligned}$$

y así, ninguno de los enteros 1, 2, 3, o 5 se puede representar como la suma, y al mismo tiempo, como el producto de tres o más números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, racionales o irracionales.
Falta ver el caso $k = 2$. Si $a_1 + a_2 = a_1 \cdot a_2 = n$, entonces $n = \frac{a_1^2}{a_1-1}$ de modo que a_1 satisface la ecuación cuadrática $a_1^2 - na_1 + n = 0$. Como a_1 es racional, el discriminante $n^2 - 4n$ debe ser el cuadrado de un entero positivo. Sin embargo, es fácil verificar que esto no es así para $n = 1, 2, 3, 5$.
Nota: De entre todos los enteros positivos, sólo $n = 4$ se puede expresar como suma y producto de los mismos dos números racionales. En efecto, $(n-3)^2 < n^2 - 4n = (n-2)^2 - 4 < (n-2)^2$ si $n \geq 5$; y $n^2 - 4n < 0$ si $n = 1, 2, 3$.

Solución del problema 26. Sea P el punto de intersección de AB y CD. Por la potencia de P con las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, tenemos que $PC^2 = PA \cdot PB = PD^2$, por lo que $PC = PD$. Por el Teorema de Ceva en el triángulo DBC, tenemos:

$$\frac{DJ}{JB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CP}{PD} = 1,$$

de donde $\frac{BI}{IC} = \frac{BJ}{JD}$. De aquí que IJ es paralela a CD.



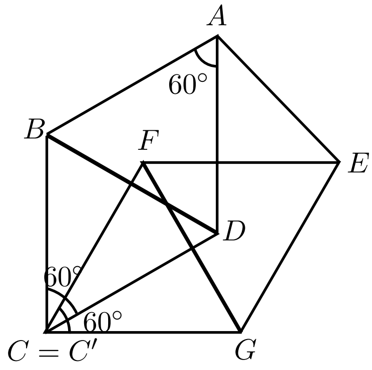
Por otra parte, tenemos que $\angle GEC = \angle GCD$ (ya que subtienden el mismo arco). Como CD y EF son paralelas, tenemos que $\frac{\widehat{AC}}{2} = \angle ACD = \angle EAC = \frac{\widehat{EC}}{2}$, de donde $\widehat{AC} = \widehat{EC}$. Luego, $\angle EGC = \angle CGA$ y por lo tanto los triángulos GEC y GCD son semejantes, pues tienen dos ángulos iguales, y por lo tanto $\frac{GE}{GC} = \frac{GC}{GD}$.
Como $\angle GEB = \angle GCB$ por estar inscritos en el mismo arco, los triángulos GEK y GCI también son semejantes. De esta semejanza concluimos que $\frac{GE}{GC} = \frac{GK}{GI}$.
Ahora, tenemos que $\frac{GE}{GC} = \frac{GC}{GD}$ y $\frac{GE}{GC} = \frac{GK}{GI}$, de donde $\frac{GC}{GD} = \frac{GK}{GI}$ lo que implica

que KI es paralela a CD. Análogamente se obtiene que JL es paralela a CD. Como sólo hay una paralela que pasa por I tenemos que KI e IJ están sobre la misma recta. Análogamente, sólo hay una paralela a CD que pasa por J, y por lo tanto IJ y JL están sobre la misma recta. Entonces los tres segmentos KI, IJ y JL están sobre la misma recta paralela a CD, de donde los puntos K, I, J y L son colineales y están sobre una recta paralela a CD.

Segunda Solución. Tenemos que $\angle DCA = \angle CBA$ por subtender el mismo arco. Análogamente, tenemos que $\angle CDA = \angle DBA$. Y como $\angle DCA + \angle CDA + \angle CAD = 180°$ y $\angle CAD = \angle IAJ$, tenemos que el cuadrilátero $IAJB$ es cíclico. Entonces, $\angle JIB = \angle JAB = 180° - \angle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2} = \angle DCB$ de donde IJ es paralela a CD. Como en la primera solución se prueba que $\widehat{AC} = \widehat{EC}$. Luego, $\angle CBE = \angle CGA$ y así el cuadrilátero $KIBG$ es cíclico. Como el cuadrilátero $EABG$ también es cíclico, se sigue entonces que $\angle EAG = \angle EBG = \angle KIG$, de modo que KI es paralela a EF y a su vez a CD. Análogamente se demuestra que JL es paralela a CD y terminamos como en la primera solución.

Solución del problema 27. Tenemos que 17 divide a $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = (x-y)(x-2y+1)$. Como 17 es primo, entonces $x - y \equiv 0 \pmod{17}$ o $x - 2y + 1 \equiv 0 \pmod{17}$. Veamos cada caso.
Caso 1. $x-y \equiv 0 \pmod{17}$. Como $x^2-2xy+y^2-5x+7y = (x-y)^2-5(x-y)+2y \equiv 0 \pmod{17}$, entonces $2y \equiv 0 \pmod{17}$ y por lo tanto $y \equiv 0 \pmod{17}$. Luego, $x \equiv y \equiv 0 \pmod{17}$ y así $xy - 12x + 15y \equiv 0 \pmod{17}$.
Caso 2. $x-2y+1 \equiv 0 \pmod{17}$. Tenemos que $x-y \equiv y-1 \pmod{17}$, de donde $x^2-2xy+y^2-5x+7y = (x-y)^2-5(x-y)+2y \equiv (y-1)^2-5(y-1)+2y = y^2-5y+6 = (y-2)(y-3) \equiv 0 \pmod{17}$. De aquí se sigue que $y \equiv 2 \pmod{17}$ o $y \equiv 3 \pmod{17}$. En el primer caso, tenemos que $x \equiv 2y-1 \equiv 2(2)-1 = 3 \pmod{17}$ y en consecuencia $xy - 12x + 15y \equiv 3(2) - 12(3) + 15(2) = 0 \pmod{17}$. En el segundo caso, tenemos que $x \equiv 2y - 1 \equiv 2(3) - 1 = 5 \pmod{17}$ y por lo tanto $xy - 12x + 15y \equiv 5(3) - 12(5) + 15(3) = 0 \pmod{17}$.

Solución del problema 28. Consideremos dos rombos iguales de lado 1, digamos $ABCD$ y $EFC'G$ cada uno con un ángulo de $60°$. Supongamos que $\angle C = \angle C' = 60°$. Luego, empalmamos los dos rombos haciendo coincidir los vértices C y C', y giramos uno de ellos alrededor de C de tal manera que la distancia entre los vértices más alejados de C (uno en cada rombo) queden a distancia 1. En este caso, los vértices más alejados de C son A y E. Es fácil verificar que los puntos A, B, C, D, E, F y G satisfacen el problema.



Solución del problema 29. Demostraremos más generalmente que si m y n son enteros positivos y n es par, entonces existe un entero positivo N tal que:

$$(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^n = \sqrt{N}-\sqrt{N-1}.$$

En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned}(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\sqrt{m+1})^k(\sqrt{m})^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(m+1)^k m^{\frac{n-2k}{2}}\\ &\quad -\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m}}\cdot\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2k+1}(m+1)^k m^{\frac{n-2k}{2}}.\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{m+1})^k(\sqrt{m})^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(m+1)^k m^{\frac{n-2k}{2}}\\ &\quad +\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m}}\cdot\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2k+1}(m+1)^k m^{\frac{n-2k}{2}}.\end{aligned}$$

Haciendo:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(m+1)^k m^{\frac{n-2k}{2}}$$

y

$$S_2 = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m}} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{2k+1} (m+1)^k m^{\frac{n-2k}{2}},$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= (\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^n(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})^n \\ &= (S_1 - S_2)(S_1 + S_2) \\ &= S_1^2 - S_2^2. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $N = S_1^2$ tenemos que $S_2^2 = S_1^2 - 1 = N - 1$, de donde:

$$(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})^n = S_1 - S_2 = \sqrt{N} - \sqrt{N-1},$$

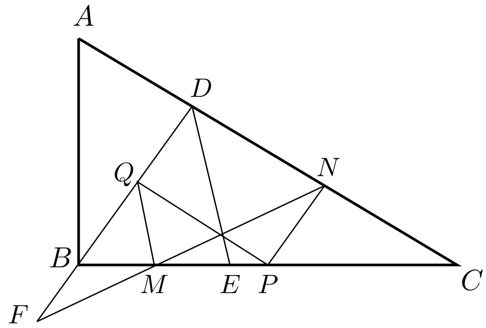
y claramente N es entero porque S_1 es entero.

Solución del problema 30. Sea d el máximo común divisor de x e y. Entonces $x = da$, $y = db$, donde a y b son primos relativos. Es claro que a y b son impares y que $a^n + b^n = 2^k$ para algún entero $k \leq m$. Supongamos que n es par. Como $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 8$, tenemos que $a^n \equiv b^n \equiv 1 \pmod 8$ y por lo tanto $2^k = a^n + b^n \equiv 2 \pmod 8$. De aquí se sigue que $k = 1$ (¿por qué?) y en consecuencia $a = b = 1$ (ya que $n > 1$). Luego, $x = y = d$. Por lo tanto, la ecuación se convierte en $x^n = 2^{m-1}$ y tiene solución si y sólo si n es divisor de $m - 1$ y en este caso $x = y = 2^{\frac{m-1}{n}}$.
Supongamos ahora que n es impar. Usando la factorización:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$$

se sigue que $a + b = 2^k = a^n + b^n$ (ya que el segundo factor siempre es impar porque n es impar, a y b son impares y hay un número impar de sumandos impares). Como $n > 1$, tenemos que $a = b = 1$ y el resto de la prueba es como en el caso anterior.
Por lo tanto, la ecuación dada tiene solución si y sólo si $\frac{m-1}{n}$ es un entero y las soluciones son $x = y = 2^{\frac{m-1}{n}}$.

Solución del problema 31. Sean P y Q los puntos medios de BC y BD respectivamente. Entonces, $\frac{BC}{PC} = \frac{BD}{QD} = 2$ de modo que QP y DC son paralelas. Análogamente, como $\frac{DC}{NC} = 2 = \frac{BC}{PC}$ entonces NP y BD son también paralelas, y por lo tanto $\frac{BD}{NP} = 2$. Como $\frac{BE}{ME} = 2 = \frac{BD}{QD}$, entonces QM es paralela a DE. Luego, como los triángulos BQP y BDC son semejantes, y DE es bisectriz del ángulo BDC, se sigue que QM es bisectriz del ángulo BQP. Entonces, por el teorema de la bisectriz tenemos que $\frac{BM}{PM} = \frac{BQ}{PQ}$. Por otra parte, de la semejanza de los triángulos BQP y ADB tenemos que $\frac{BQ}{PQ} = \frac{AD}{BD}$, y de la semejanza de los triángulos BFM y PNM tenemos que $\frac{BF}{NP} = \frac{BM}{PM}$. Por lo tanto, $\frac{BF}{NP} = \frac{BQ}{PQ} = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{2NP}$ de donde $AD = 2BF$.



Solución del problema 32. Estamos buscando un entero $N \geq 3$ y enteros positivos n, m y t cada uno de los cuales divida a $N+1$ y que:

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t}\right)(N+1) = N,$$

o de manera equivalente:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t} = \frac{N}{N+1}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $5 \leq n \leq m \leq t$. Entonces, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$, de donde $\frac{N}{N+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t} \leq \frac{3}{5}$. Es decir, $N \leq \frac{3}{2}$, lo que contradice que $N \geq 3$. Por lo tanto, $2 \leq n \leq 4$ (si $n = 1$, entonces n dividiría a N y a $N+1$). Dividimos en casos.

Caso 1. Si $n = 4$, entonces $\frac{1}{m} + \frac{1}{t} = \frac{3N-1}{4N+4}$. Si $m \geq 5$, entonces $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{5}$ y en consecuencia $\frac{3N-1}{4N+4} \leq \frac{2}{5}$, de modo que $N \leq \frac{13}{7} < 2$ lo cual no es posible. Por lo tanto, $m = 4$ ya que $m \geq n$. Entonces, $t = \frac{2N+2}{N-1} = 2 + \frac{4}{N-1}$ de donde $N-1$ debe dividir a 4. Es fácil ver que las únicas posibilidades son $N = 5$ y $N = 3$. Si $N = 5$, entonces $t = 3 < 4 = m$ que es una contradicción. Por lo tanto, $N = 3$, $t = 4$ y la única solución en este caso es $(n, m, t, N) = (4, 4, 4, 3)$, es

decir, cada uno recibe un camello.
Caso 2. Si $n = 3$, entonces un argumento similar al caso anterior muestra que $m = 4$ o $m = 3$. Si $m = 4$, entonces $t = \frac{12N+12}{5N-7}$ de donde $5N - 7$ debe dividir a $12N + 12$. Luego, $5N - 7$ debe dividir a $5(12N + 12) - 12(5N - 7) = 144$. Como $N + 1$ es múltiplo de 3 y 4, entonces $N \geq 11$. Es fácil ver que la única posibilidad es $5N - 7 = 48$, de modo que $N = 11$ y $t = 3$. Esto contradice nuevamente que $m \leq t$. De manera análoga, si $m = 3$ entonces $N = 5$ o $N = 11$, de donde $(n, m, t, N) = (3, 3, 6, 5)$ y $(n, m, t, N) = (3, 3, 4, 11)$, respectivamente.
Caso 3. Si $n = 2$, de manera similar a los casos anteriores encontramos que $m = 6, 5, 4$ o 3, lo que nos da 9 soluciones más: $(n, m, t, N) = (2, 6, 6, 5)$, $(2, 4, 8, 7)$, $(2, 5, 5, 9)$, $(2, 3, 12, 11)$, $(2, 4, 6, 11)$, $(2, 3, 9, 17)$, $(2, 4, 5, 19)$, $(2, 3, 8, 23)$ y $(2, 3, 7, 41)$.

Solución del problema 33. Usando la identidad $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, tenemos que:

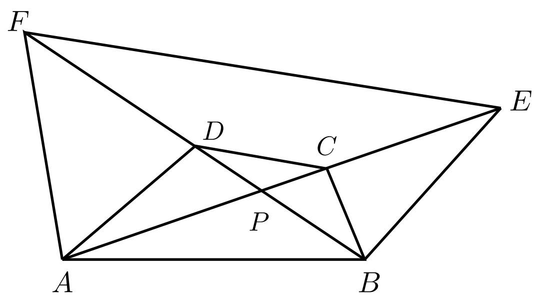
$$\begin{aligned}
A &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2008} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2008}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2008} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{1004} \\
&= (1 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1004} - \frac{1}{1004}\right) + \frac{1}{1005} + \cdots + \frac{1}{2008} \\
&= \frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \cdots + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
2A &= \left(\frac{1}{1005} + \frac{1}{2008}\right) + \left(\frac{1}{1006} + \frac{1}{2007}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2007} + \frac{1}{1006}\right) + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{1005}\right) \\
&= 3013\left(\frac{1}{1005 \cdot 2008} + \frac{1}{1006 \cdot 2007} + \cdots + \frac{1}{2008 \cdot 1005}\right) \\
&= 3013 \cdot B.
\end{aligned}$$

Finalmente, es claro que $\frac{A}{B} = \frac{3013}{2}$ no es entero.

Solución del problema 34. Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD.



Es suficiente demostrar que $\frac{PE}{PF} = \frac{PC}{PD}$. Como BC y AF son paralelas, los triángulos PBC y PFA son semejantes. Entonces, $\frac{PF}{PB} = \frac{PA}{PC}$ de donde $PF = \frac{PA \cdot PB}{PC}$. De manera similar, como AD y BE son paralelas, los triángulos BPE y APD son semejantes. Luego, $\frac{PE}{PB} = \frac{PA}{PD}$ de donde $PE = \frac{PA \cdot PB}{PD}$. Por lo tanto, $\frac{PE}{PF} = \frac{\frac{PA \cdot PB}{PD}}{\frac{PA \cdot PB}{PC}} = \frac{PC}{PD}$.

Solución del problema 35. Aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica a los números $\frac{1}{2}$ y $b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}$, obtenemos:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1 + b + \frac{1}{a}}{2},$$

y la igualdad se da si y sólo si $\frac{1}{2} = b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}$, es decir, si y sólo si $\frac{1}{a} = -b$. Como a y b son positivos, la igualdad nunca se alcanza, y en consecuencia:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\right)} < \frac{1 + b + \frac{1}{a}}{2},$$

es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} > \frac{\sqrt{2}}{1 + b + \frac{1}{a}}.$$

De manera similar, tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} > \frac{\sqrt{2}}{1 + c + \frac{1}{b}}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} > \frac{\sqrt{2}}{1 + a + \frac{1}{c}}.$$

Sumando las últimas tres desigualdades anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} &> \\
\sqrt{2}\left(\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}\right) &= \sqrt{2},
\end{aligned}$$

ya que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}} &= \frac{a}{a+ab+1}+\frac{b}{b+bc+1}+\frac{c}{c+ac+1} \\
&= \frac{a}{a+ab+1}+\frac{b}{b+\frac{1}{a}+1}+\frac{c}{c+\frac{1}{b}+1} \\
&= \frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}+\frac{bc}{bc+1+b} \\
&= \frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}+\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+1+b} \\
&= \frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}+\frac{1}{1+a+ab} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Solución del problema 36. Como $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1$, tenemos que $\frac{1}{a_1} \leq 1$, $\frac{1}{a_2} \leq 1, \ldots, \frac{1}{a_n} \leq 1$. Entonces:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n} \leq 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostraremos que cualquier entero $k \in \{1,2,\ldots,\frac{n(n+1)}{2}\}$ se puede escribir en la forma requerida.
Para $k=1$, hacemos $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.
Para $k=n$, hacemos $a_1=1, a_2=2, \ldots, a_n=n$.
Para $1<k<n$, hacemos $a_{k-1}=1$ y $a_i=\frac{n(n+1)}{2}-k+1$ si $i \neq k-1$. En este

caso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n} &= \frac{k-1}{1}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k-1}}^{n}\frac{i}{a_i}\\
&= k-1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k-1}}^{n}\frac{i}{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}\\
&= k-1+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}\left(\sum_{i=1}^{n} i-(k-1)\right)\\
&= k-1+\frac{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}=k-1+1=k.
\end{aligned}$$

Para $n<k<\frac{n(n+1)}{2}$ escribimos $k=n+p_1+p_2+\cdots+p_i$, con $1\leq p_i\leq\cdots\leq p_2\leq p_1\leq n-1$, $i<n$, y hacemos:

$$a_{p_1+1}=a_{p_2+1}=\cdots=a_{p_i+1}=1$$

y $a_j=j$ para $j\neq p_1+1,p_2+1,\ldots,p_i+1$. En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n} &= (p_1+1)+(p_2+1)+\cdots+(p_i+1)+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-i})\\
&= p_1+p_2+\cdots+p_i+(\underbrace{1+1\cdots+1}_{i})+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-i})\\
&= (k-n)+i+(n-i)\\
&= k.
\end{aligned}$$

Solución del problema 37. Notemos primero que 120 es 3-partito, ya que:

$$120=60+40+20=1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+24+30.$$

Supongamos ahora que n es un entero 3-partito y sea p un número primo que no divide a n. Demostraremos que pn es 3-partito. Supongamos que:

$$d_{i_1}+\cdots+d_{i_r}=d_{j_1}+\cdots+d_{j_s}=d_{k_1}+\cdots+d_{k_t},$$

donde $d_{i_1},\ldots,d_{i_r},d_{j_1},\ldots,d_{j_s},d_{k_1},\ldots,d_{k_t}$ son todos los divisores positivos de n. Entonces:

$$pd_{i_1}+\cdots+pd_{i_r}=pd_{j_1}+\cdots+pd_{j_s}=pd_{k_1}+\cdots+pd_{k_t},$$

y por lo tanto:

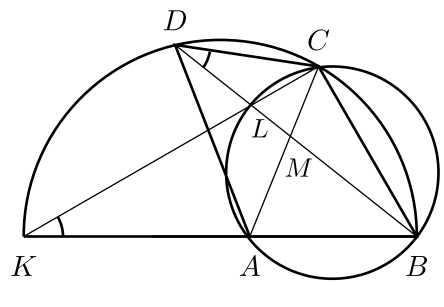
$$\begin{aligned} d_{i_1}+\cdots+d_{i_r}+pd_{i_1}+\cdots+pd_{i_r} &= d_{j_1}+\cdots+d_{j_s}+pd_{j_1}+\cdots+pd_{j_s} \\ &= d_{k_1}+\cdots+d_{k_t}+pd_{k_1}+\cdots+pd_{k_t}. \end{aligned}$$

Como cada divisor de pn es de la forma d_i o pd_i, tenemos que pn es 3-partito. Como esto lo podemos hacer para cada número primo que no divide a n, tenemos una infinidad de enteros positivos 3-partitos.

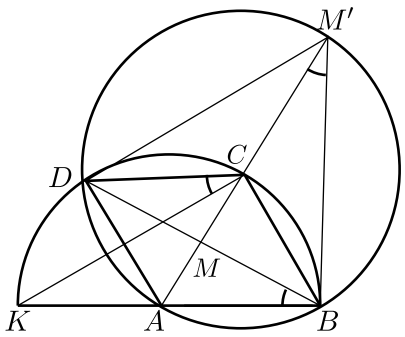
Solución del problema 38. Sea L el punto de intersección de CK y BD. Aplicando el Teorema de la bisectriz en el triángulo MCD tenemos que $\frac{CD}{DL}=\frac{MC}{ML}$, de donde $CD=\frac{MC\cdot DL}{ML}$. Luego:

$$\begin{aligned} MB\cdot MD &= MA\cdot MC+MA\cdot\frac{MC\cdot DL}{ML} \\ &= MA\cdot MC\cdot\frac{ML+DL}{ML}=MA\cdot MC\cdot\frac{MD}{ML}, \end{aligned}$$

de modo que $MA\cdot MC=MB\cdot ML$. Como el punto M está dentro del cuadrilátero $ABCL$, tenemos que los puntos A,B,C y L son concíclicos. Por lo tanto, $\angle LBA=\angle LCA$ y $\angle DBK=\angle LCA=\angle DCL=\angle DCK$, de donde el cuadrilátero $DCBK$ es cíclico y por lo tanto $\angle BKC=\angle BDC$.



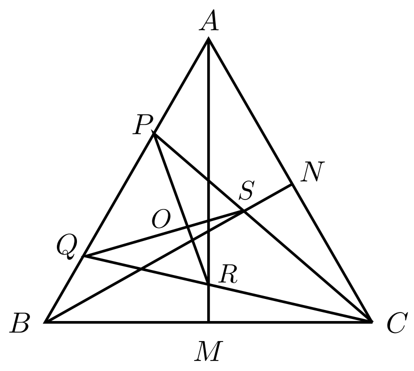
Segunda Solución. Sea M' el punto sobre MC tal que $CM'=CD$. Entonces, $MM'=MC+CM'=MC+CD$ y por lo tanto, $MA\cdot MM'=MB\cdot MD$. Luego, el cuadrilátero $ABM'D$ es cíclico y por lo tanto $\alpha=\angle AM'D=\angle ABD$. Luego, en el triángulo isósceles DCM' tenemos que $\angle DCM'=180^\circ-2\alpha$ y de aquí tenemos que $\alpha=\frac{180^\circ-\angle DCM'}{2}=\frac{\angle ACD}{2}=\angle KCD$. Por lo tanto $\angle ABD=\angle KCD$ y así el cuadrilátero $DCBK$ es cíclico, de donde se sigue el resultado.



Solución del problema 39. Supongamos que un entero se puede escribir en la forma $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Si a y b tienen la misma paridad, entonces el producto $(a + b)(a - b)$ es divisible entre 4. Si a y b son de distinta paridad, entonces $(a + b)(a - b)$ es impar. Recíprocamente, un entero de la forma $4n$ se puede escribir como $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$, mientras que un número de la forma $2n + 1$ se puede escribir como $(n + 1)^2 - n^2$. Por lo tanto, un entero no se puede escribir como $a^2 - b^2$ si y sólo si es de la forma $4n + 2$ (¿Por qué?). La única forma en que un producto de enteros sea de la forma $4n + 2$, es cuando exactamente uno de los factores es de la misma forma y el resto son impares.
(a) Supongamos que una cantidad par de los 2007 enteros es de la forma $4n+2$. Entonces, existe un entero que no es de esta forma y, de los restantes 2006 números no hay exactamente un entero de la forma $4n + 2$. Luego, el producto de estos 2006 números se puede escribir en la forma $a^2 - b^2$. Similarmente, si una cantidad impar de los 2007 enteros es de la forma $4n + 2$, elegimos uno de ellos y entre los 2006 números restantes no hay exactamente uno que sea de la forma $4n + 2$, de modo que el producto de estos 2006 enteros se puede escribir en la forma $a^2 - b^2$.
(b)Si hubiera un entero N de la forma $4n+2$ distinto de 2006, entonces podemos elegir cualquiera de los otros 2005 números (distinto de N y de 2006), digamos M, de tal manera que el producto de los 2006 números restantes (distintos de M) no sea de la forma $4n + 2$. Luego, la elección no sería única. Por lo tanto, 2006 es el único número de la forma $4n + 2$, y debe ser el número elegido.

Solución del problema 40. Como AM y BN son alturas del triángulo ABC, tenemos que tanto A, M y R como B, N y S son colineales. Por otra parte, como $\angle PCR = \angle PAR = 30°$ tenemos que A, P, R y C son concíclicos. Como la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es $180°$ y

$\angle PAC = 60°$, tenemos que $\angle PRQ = 60°$. También tenemos que B, Q, S y C son concíclicos puesto que $\angle SCQ = \angle SBQ = 30°$. Entonces $\angle SQC = \angle SBQ = 30°$. Finalmente, en el triángulo QRO, donde O es el punto de intersección de PR y QS, tenemos que $\angle QOR = 180° - \angle OQR - \angle ORQ = 180° - \angle SQC - \angle PRQ = 180° - 30° - 60° = 90°$, que es lo que queríamos.



Solución del problema 41. La demostración la haremos por inducción en n. Denotemos por P_n, $n \geq 3$, a un n-ágono convexo incluyendo todas sus diagonales. Llamaremos "arista" a un lado o a una diagonal de P_n, y diremos que un vértice "u es incidente con la arista e" si u es un extremo de e. Si $n = 3$, entonces P_3 es un triángulo y, si se pinta con 3 colores distintos, tenemos un triángulo con sus tres lados de distinto color. Supongamos que, para algún $n \geq 3$, si P_n se pinta con al menos n colores, entonces P_n contiene un triángulo con sus tres lados de distinto color. Supongamos que P_{n+1} se pinta con $n+1$ colores. Sea v un vértice de P_{n+1}. Entonces, o bien, v es incidente con al menos dos aristas e_1 y e_2 de P_{n+1} tales que e_1 es la única arista pintada con el color c_1 y e_2 es la única arista pintada con el color c_2 ($c_1 \neq c_2$), o bien, v es incidente con a lo más una arista e de P_{n+1} tal que e es la única arista de un color particular.

En el primer caso, supongamos entonces que los vértices v_1 y v_2 son los otros extremos de e_1 y e_2, respectivamente. Entonces, el triángulo con vértices, v, v_1 y v_2 es un triángulo con sus tres lados de distinto color, ya que la arista que une v_1 con v_2 no puede tener el color c_1 ni el color c_2.

En el segundo caso, borremos v junto con todas las aristas incidentes con v, para obtener una copia de P_n. Como v es incidente con a lo más una arista e

de P_{n+1} tal que e es la única arista de un color particular, entonces la copia resultante de P_n está pintada con al menos n colores distintos. Luego, por la hipótesis de inducción, hay un triángulo con sus tres lados de distinto color en esta copia de P_n, y por lo tanto en P_{n+1}. Esto completa la inducción y termina la demostración.

Solución del problema 42. Supongamos que $3^n + 5^n = k(3^{n-1} + 5^{n-1})$ para algún entero positivo k. Es fácil verificar que:

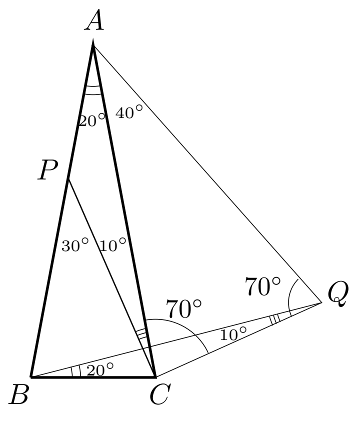
$$3(3^{n-1} + 5^{n-1}) < 3^n + 5^n < 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

para todo entero positivo n. Luego, $k = 4$ de donde:

$$3^n + 5^n = 4(3^{n-1} + 5^{n-1}) \Leftrightarrow 3^{n-1}(3-4) = 5^{n-1}(4-5) \Leftrightarrow 3^{n-1} = 5^{n-1}.$$

Por lo tanto, la única posibilidad es $n - 1 = 0$, es decir, $n = 1$. Finalmente, tenemos que $n = 1$ es la única solución ya que $3 + 5 = 8$ es múltiplo de $3^0 + 5^0 = 2$.

Solución del problema 43. Construyamos el triángulo equilátero ABQ con Q del mismo lado de AB como C. Como $AB = AC$ (ya que $\angle ABC = \angle ACB = 80°$) y $AB = AQ$ (ya que el triángulo ABQ es equilátero), tenemos que $AC = AQ$ de modo que el triángulo ACQ es isósceles. Como $\angle CAQ = 40°$, entonces $\angle ACQ = \angle AQC = 70°$. Similarmente, como $\angle ABQ = 60°$ tenemos que $\angle CBQ = 20° = \angle BAC$, de manera que $\angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = 10°$. Luego, $\angle CBQ = \angle PAC = 20°$, $\angle CQB = \angle ACP = 10°$ y $BQ = AC$, es decir, los triángulos BCQ y APC son congruentes, de donde se sigue que $BC = AP$.



Solución del problema 44. Claramente los números 2 y 5 deben estar entre los números que buscamos, y debe haber al menos un número más. Sean $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ los primos que faltan. Tenemos entonces que:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1 p_2 \cdots p_n. \tag{3.7}$$

Por otro lado, para cualesquiera números $x \geq 2$, $y \geq 2$ tenemos que $0 \leq (x-1)(y-1) - 1 = xy - x - y$, es decir, $xy \geq x - y$. Aplicando repetidamente esta desigualdad, tenemos que:

$$x_1 x_2 \cdots x_k \geq x_1 x_2 \cdots x_{k-1} + x_k \geq \cdots \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$

para cualesquiera números $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mayores o iguales que 2. Luego:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1 p_2 \cdots p_n \geq (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) p_n.$$

Haciendo $s = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}$, tenemos que $s + p_n + 7 \geq s p_n$, es decir, $(s-1)(p_n - 1) \leq 8$. De aquí que $1 \leq p_n - 1 \leq 8$. Luego, las posibilidades para p_n son $2, 3, 5$ y 7. Si $p_n = 2$, entonces de (3.7) se sigue que $2n + 7 = 2^n$ lo cual no puede ser porque $2n + 7$ es impar y 2^n es par. Si $p_n = 3$, entonces $p_n - 1 = 2$ y $s - 1 \leq 4$. Luego, las posibilidades para $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ son que haya un solo 2, o un solo 3, o dos 2, o un 2 y un 3. Es fácil verificar que ninguna de estas posibilidades satisface (3.7). Si $p_n = 5$, entonces $p_n - 1 = 4$ y $s - 1 \leq 2$. Luego, las posibilidades para $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ son que haya un solo 2 o un solo 3. Es fácil verificar que no se cumple (3.7) si hay un solo 2. Si hay un solo 3, sí hay solución, ya que $3 + 5 + 7 = 3 \cdot 5$. Finalmente, si $p_n = 7$, entonces $p_n - 1 = 6$ y $s - 1 = 1$. Luego, la única posibilidad para $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ es que haya un solo 2, y es fácil verificar que no se cumple (3.7). Por lo tanto, los primos de la colección son $2, 3, 5, 5$.

Solución del problema 45. Sea a_i el número de estudiantes del país i. Como cada uno de los a_i estudiantes puede saludar a los $n - a_i$ estudiantes restantes, hay a lo más $a_i(n - a_i)$ saludos en los que participan estudiantes del país i. Sea:

$$\begin{aligned} R &= a_1(n - a_1) + a_2(n - a_2) + \cdots + a_m(n - a_m) \\ &= n(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2). \end{aligned}$$

Como cada saludo se ha contado dos veces, tenemos que $2N \leq R$. Además, como $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$ tenemos que:

$$2N \leq n^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2).$$

Por otra parte, por la desigualdad de la media aritmética - media geométrica, tenemos que $a_i^2 + a_j^2 \geq 2a_ia_j$. Entonces:

$$\begin{aligned} m(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2) &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2) + (a_1^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + \\ &\quad \cdots + (a_{m-1}^2 + a_m^2) \\ &\geq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2) + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{m-1}a_m) \\ &= n^2, \end{aligned}$$

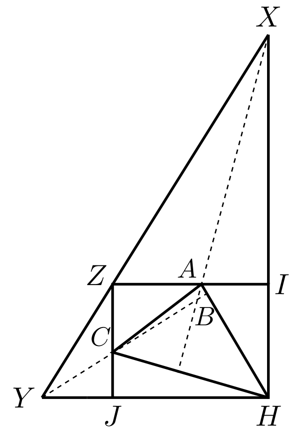
de donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 \geq \frac{n^2}{m}$. Por lo tanto, $2N \leq n^2 - \frac{n^2}{m} = \frac{n^2(m-1)}{m}$ de donde se sigue el resultado. Note que la igualdad se da si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ y cada estudiante de cada país saluda a todos los participantes que no son de su país.

Solución del problema 46. La prueba la haremos por inducción en n. Si $n = 0$, tenemos que $7^{7^0} + 1 = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ es el producto de $2(0) + 3 = 3$ números primos iguales. Sea $A(n) = 7^{7^n} + 1$ y supongamos que $A(n)$ satisface el problema. Demostraremos que $A(n+1)$ es el producto de al menos $2(n+1) + 3$ primos no necesariamente distintos.
En efecto, notemos que:

$$\begin{aligned} A(n+1) &= (A(n) - 1)^7 + 1 \\ &= A(n)[(A(n))^6 - 7(A(n))^5 + 21(A(n))^4 - 35(A(n))^3 + \\ &\quad + 35(A(n))^2 - 21(A(n)) + 7] \\ &= A(n)[(A(n))^6 - 7(A(n) - 1)((A(n))^2 - A(n) + 1)^2]. \end{aligned}$$

Como $7(A(n) - 1) = 7(7^{7^n}) = 7^{7^n+1}$ y $7^n + 1$ es par, tenemos que $7(A(n) - 1)$ es un cuadrado, y en consecuencia $7(A(n) - 1)((A(n))^2 - A(n) + 1)^2$ también. Luego, $(A(n))^6 - 7(A(n) - 1)((A(n))^2 - A(n) + 1)^2$ es la diferencia de dos cuadrados, digamos $x^2 - y^2$. De aquí que cada uno de los factores $x + y$ y $x - y$ aporta al menos un número primo, y junto con los $2n + 3$ factores primos no necesariamente distintos de $A(n)$ tenemos que $A(n+1) = A(n)(x+y)(x-y)$ es el producto de al menos $2n + 3 + 2 = 2(n+1) + 3$ primos no necesariamente distintos.

Solución del problema 47. Observemos que $\angle XAI = \angle XHC = \angle HCJ$. Luego, los triángulos XAI y HCJ son semejantes y por lo tanto $\frac{XI}{HJ} = \frac{AI}{CJ}$.



Similarmente tenemos que los triángulos YCJ y HAI son semejantes, de donde $\frac{YJ}{HI} = \frac{CJ}{AI}$. Luego, $\frac{XI}{HJ} = \frac{HI}{YJ}$. Como $JHIZ$ es un rectángulo, tenemos que $HJ = ZI$ y $HI = ZJ$. Entonces, $\frac{XI}{ZI} = \frac{ZJ}{YJ}$ y así los triángulos XZI y ZYJ son semejantes. Finalmente, como $\angle JZI = 90°$ se sigue que $\angle YZX = 180°$, de modo que los puntos X, Y, Z son colineales.

Solución del problema 48. Demostraremos primero que:

$$S_k = 2^k a_k + 2^{k+1}a_{k+1} + \cdots + 2^n a_n \leq 0$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$. En efecto, supongamos por el contrario que $S_k > 0$ para algún k. Entonces, como S_k es divisible entre 2^k tenemos que $S_k \geq 2^k$. Luego:

$$0 = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^{k-1}a_{k-1} + S_k \geq -1 - 2 - 2^2 - \cdots - 2^{k-1} + 2^k = 1,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, tenemos n desigualdades y una igualdad:

$$\begin{array}{rcl} -a_n & \geq & 0, \\ -a_{n-1} - 2a_n & \geq & 0, \\ & \vdots & \\ -a_1 - 2a_2 - \cdots - 2^{n-2}a_{n-1} - 2^{n-1}a_n & \geq & 0, \\ a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_{n-1} + 2^n a_n & = & 0. \end{array}$$

Como al menos uno de los a_i es distinto de cero, tenemos que al menos una de las desigualdades anteriores es estricta. Finalmente, es fácil ver que al sumar todas las desigualdades anteriores (tomando en cuenta la desigualdad estricta) junto con la igualdad, se sigue que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$.

Solución del problema 49. Construiremos una sucesión de soluciones (a_i, b_i) de la ecuación $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$, con $a_0 = 1$, $1 = b_0 = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3$ y así sucesivamente. Claramente $(a_0, b_0) = (1, 1)$ es una solución. Supongamos que (a_i, b_i) es una solución. Consideremos la ecuación cuadrática $a^2 - 3b_i a + b_i^2 + 1 = 0$. Una solución es a_i. Supongamos que la otra solución es r. Entonces, $r + a_i = 3b_i$ y $ra_i = b_i^2 + 1$. Como $a_i < b_i$ tenemos que $r = \frac{b_i^2+1}{a_i} > b_i$. Luego, hacemos $a_{i+1} = b_i$ y $b_{i+1} = r$. Para cada solución (a_i, b_i), a_i divide a $3a_i b_i$ y en consecuencia a_i divide a $a_i^2 + b_i^2 + 1$. Por lo tanto a_i divide a $b_i^2 + 1$. De manera similar tenemos que b_i divide a $a_i^2 + 1$.

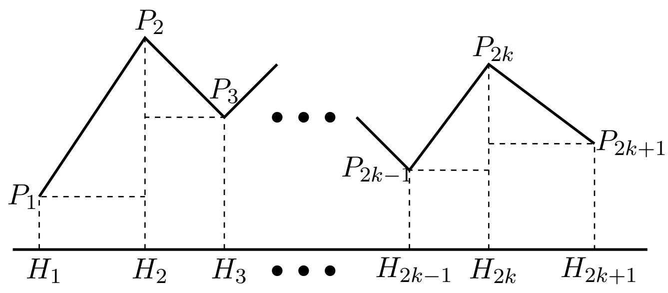
Solución del problema 50. Sea n el número de equipos africanos. Entonces el número de equipos europeos es $n+9$. Los equipos africanos jugaron $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partidos entre ellos, y por lo tanto ganaron en total $\frac{n(n-1)}{2} + k$ partidos, donde k es el número de partidos ganados por los equipos africanos a los equipos europeos. Similarmente, los equipos europeos jugaron $\binom{n+9}{2} = \frac{(n+8)(n+9)}{2}$ partidos entre ellos y ganaron $n(n+9) - k$ partidos contra equipos africanos, de modo que en total ganaron $\frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - k$ partidos. Luego, $9\left(\frac{n(n-1)}{2} + k\right) = \frac{(n+8)(n+9)}{2} + n(n+9) - k$ de donde $3n^2 - 22n + 10k - 36 = 0$. Como n es un entero positivo, el discriminante de la ecuación cuadrática debe ser un cuadrado perfecto, es decir, $4(229 - 30k) = m^2$. Como $m^2 \geq 0$, tenemos que $k \leq 7$. Es fácil ver que las únicas soluciones son $k = 2$ y $k = 6$. Si $k = 2$, entonces $n = 8$ y por lo tanto el mejor equipo africano sólo pudo haber ganado 7 partidos contra equipos africanos y 2 contra equipos europeos. Si $k = 6$, entonces $n = 6$ y el mejor equipo africano pudo haber ganado 5 partidos contra equipos africanos y 6 partidos contra equipos europeos. Por lo tanto, el máximo número de partidos que un equipo africano pudo haber ganado es 11.

Solución del problema 51. Como p es primo y divide a $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$, entonces p divide a $n - 1$ o a $n^2 + n + 1$. Si p divide a $n - 1$, entonces $p \leq n - 1$ (ya que $n - 1 > 0$) y como n divide a $p - 1$, tenemos que $n \leq p - 1$. Luego, $p \leq n - 1 < n \leq p - 1$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, p divide a $n^2 + n + 1$. Supongamos que $p - 1 = jn$ y que $n^2 + n + 1 = kp$ con j y k enteros positivos. Despejando p de la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, tenemos que $n^2 + n + 1 = k(jn + 1)$. Como $n^2 + n + 1 \equiv 1 \pmod{n}$ y $jn + 1 \equiv 1 \pmod{n}$, tenemos que $k \equiv 1 \pmod{n}$. Demostraremos que $k \leq n$. En efecto, si $k > n$ entonces $k = nq + r$ con q, r enteros positivos y $0 \leq r < n$. Luego, $k = nq + r \equiv r \pmod{n}$ de donde $r \equiv 1 \pmod{n}$. Luego, la única posibilidad es que $r = 1$, ya que $0 \leq r < n$ y $n > 1$. Entonces, $k = nq + 1$ y así $n^2 + n + 1 = (nq + 1)(jn + 1)$. Simplificando tenemos que

$n((qj-1)n+q+j-1)=0$. Como $n>1$, entonces $(qj-1)n+q+j-1=0$. Si $qj-1=0$, entonces $q=j=1$ y $n^2+n+1=(n+1)^2$ lo cual no puede ser porque $n>1$. Si $qj-1>0$, entonces $n=\frac{1-q-j}{qj-1}>1$ implica que $0>1-q-j>qj-1>0$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $k\leq n$. Como $k\equiv 1 \pmod n$, la única posibilidad es $k=1$ ya que $0<k\leq n$ y $n>1$. Por lo tanto, $n^2+n+1=p$ y $4p-3=4(n^2+n+1)-3=(2n+1)^2$.

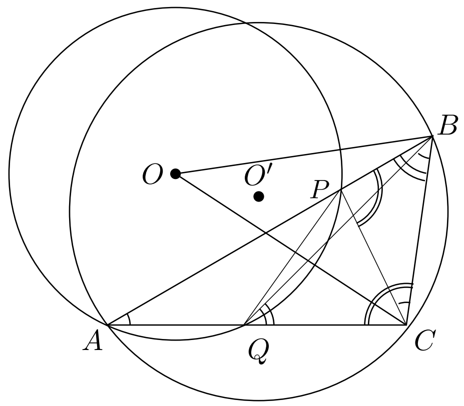
Solución del problema 52. Haremos la demostración por inducción en n. Si $n=2$, sea A_1 el vértice sobre el cual está escrito el menor de los números escritos sobre los vértices del cuadrilátero. Llamemos A_2, A_3 y A_4 a los otros vértices del cuadrilátero, según su orden alrededor del perímetro del cuadrilátero. En general llamaremos a_i al número escrito sobre A_i. Por la elección de A_1, tenemos que $a_2=a_4=a_1+1$. Tenemos dos casos.
Caso 1. $a_3=a_1$. En este caso, las lomas son A_2 y A_4, y los valles son A_1 y A_3, de donde $L-V=a_2+a_4-a_1-a_3=2(a_1+1)-2a_1=2=n$.
Caso 2. $a_3=a_1+2$. En este caso, la única loma es A_3 y el único valle es A_1, de donde $L-V=a_3-a_1=(a_1+2)-a_1=2=n$.
Esto completa la base de inducción. Supongamos ahora que para cierto entero k mayor que 1, el resultado es cierto para $n=k$. Dado un polígono P de $2(k+1)$ lados que cumpla las condiciones del problema, sea A_3 el vértice sobre el cual está escrito el menor de los números escritos sobre los vértices de P. Llamemos $A_4, A_5, \ldots, A_{2k+2}, A_1$ y A_2 a los otros vértices de P según su orden alrededor del perímetro de P. Por la elección de A_3, tenemos que $a_2=a_4=a_3+1$. Observemos que el polígono Q formado por $A_1, A_2, A_5, A_6, \ldots, A_{2k+1}$ y A_{2k+2}, es un polígono de $2k$ lados que cumple las condiciones del problema. Sean L_P y V_P, L_Q y V_Q los valores de L y V para P y Q, respectivamente. Notemos que todos los vértices de P salvo A_2, A_3 y A_4 son lomas en P si y sólo si son lomas en Q, y son valles en P si y sólo si son valles en Q. Entonces basta analizar cómo son a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 para relacionar L_P-V_P con L_Q-V_Q. Tenemos cuatro casos.
Caso 1. $a_1=a_5=a_3$. En este caso A_2 es loma en Q y es loma en P, A_3 es valle en P y A_4 es loma en P. Por lo tanto, $L_P=L_Q-a_2+a_2+a_4=L_Q+a_3+1$, $V_P=V_Q+a_3$ y $L_P-V_P=L_Q-V_Q+1=k+1$ por hipótesis de inducción.
Caso 2. $a_1=a_3$ y $a_5=a_3+2$. Por un análisis similar al caso anterior, tenemos que $L_P=L_Q+a_2=L_Q+a_3+1$, $V_P=V_Q+a_3$ y $L_P-V_P=L_Q-V_Q+1=k+1$.
Caso 3. $a_1=a_3+2$ y $a_5=a_3$. En este caso tenemos que $L_P=L_Q+a_4=L_Q+a_3+1$, $V_P=V_Q+a_3$ y $L_P-V_P=L_Q-V_Q+1=k+1$.
Caso 4. $a_1=a_5=a_3+2$. En este caso tenemos que $L_P=L_Q$, $V_P=V_Q-a_2+a_3=V_Q-1$ y $L_P-V_P=L_Q-V_Q+1=k+1$.
Esto completa la prueba.

Segunda Solución. Escojamos un sentido para "caminar" alrededor del perímetro del polígono. Llamemos *paso hacia arriba* a un lado del polígono cuyo extremo de partida tiene escrito sobre él un número más pequeño que su extremo de llegada. Un *paso hacia abajo* se define de manera similar. Sean S el número de *pasos hacia arriba* y B el número de *pasos hacia abajo* del polígono. Como todo lado del polígono es un paso hacia arriba o un paso hacia abajo, tenemos que $S + B = 2n$. Notemos que las lomas del polígono son precisamente los vértices en los que el camino deja de subir y empieza a bajar, mientras que los valles son los vértices en los que ocurre lo contrario. Llamemos *subidas* a las porciones del camino que van de un valle a la loma subsiguiente (siempre hay tal loma en vista de que los números sobre los vértices no pueden sólo crecer, o el camino no regresaría al valle después de dar la vuelta al polígono). Es claro que el número de pasos hacia arriba de una subida es igual a la diferencia del número escrito sobre la loma en el extremo final de la subida menos el número escrito sobre el valle en el extremo inicial de la subida. Además, es evidente que todas las lomas son extremos finales de una y sólo una subida, mientras que todos los valles son extremos iniciales de una y sólo una subida. Por lo tanto, $S = L - V$. Análogamente, analizando las *bajadas* del polígono tenemos que $B = L-V$. Sumando, obtenemos $2(L-V) = S+B = 2n$ de donde $L-V = n$.
Esta misma idea se puede desarrollar geométricamente. Numeremos los vértices del polígono en cualquier sentido a partir de un valle (siempre hay un valle, por ejemplo el vértice cuyo número es el menor de los números escritos sobre los vértices). En un plano cartesiano, identifiquemos el vértice A_i con el punto (i, a_i) donde a_i es el número escrito sobre A_i. Agreguemos el punto $(2n+1, a_1)$ asociado al vértice A_1. En la gráfica que se obtiene al unir puntos consecutivos con segmentos de recta, las lomas son los picos que apuntan hacia arriba, mientras que los valles son los picos que apuntan hacia abajo y los extremos de la línea quebrada. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_{2k+1}$ los puntos de la gráfica que corresponden ya sea a lomas o a valles en el polígono, según su distancia horizontal al origen. Sean $H_1, H_2, \ldots, H_{2k+1}$ las proyecciones de $P_1, P_2, \ldots, P_{2k+1}$ sobre el eje x, respectivamente. Observemos que la diferencia del número escrito sobre la loma P_{2i} menos el número escrito sobre el valle P_{2i-1} es la distancia vertical entre P_{2i} y P_{2i-1}, que es igual a $H_{2i}H_{2i-1}$, por el triángulo rectángulo isósceles que se forma al trazar la paralela al eje x por P_{2i-1} y la paralela al eje y por P_{2i}. Entonces, $L - V = H_1H_2 + H_3H_4 + \cdots + H_{2k-1}H_{2k}$. De manera análoga, analizando paralelas de puntos consecutivos de la forma P_{2i} y P_{2i+1} obtenemos que $L - V = H_2H_3 + H_4H_5 + \cdots + H_{2k}H_{2k+1}$. Por lo tanto, $2(L - V) = H_1H_2 + H_2H_3 + \cdots + H_{2k}H_{2k+1} = H_1H_{2k+1} = 2n$ de donde $L - V = n$.



Solución del problema 53. Supongamos que sí es posible y que cada cuadrito está cubierto k veces. Entonces el número de fichas usadas para cubrir la cuadrícula es $\frac{35k}{3}$. Pintemos las columnas de la cuadrícula que están en posición impar, es decir, alternadamente comenzando pintando la primera. Es fácil ver que para cubrir cada cuadrito pintado exactamente una vez, necesitamos 12 piezas, de modo que para cubrir cada cuadrito pintado k veces necesitamos $12k$ piezas. Por lo tanto, $\frac{35k}{3} \geq 12k$, es decir, $k \leq 0$ lo cual es un absurdo. Luego, no es posible hacer lo que se pide.

Solución del problema 54. Sean O y O' los centros de los circuncírculos de los triángulos APQ y ABC, respectivamente, y sea r el radio del circuncírculo del triángulo APQ. Aplicando la potencia de B respecto al circuncírculo del triángulo APQ, tenemos que $BP \cdot BA = (BO - r)(BO + r) = BO^2 - r^2$. Similarmente, aplicando la potencia de C respecto al circuncírculo del triángulo APQ, tenemos que $CQ \cdot CA = (CO - r)(CO + r) = CO^2 - r^2$. Por otra parte, como los triángulos ABC y BPC comparten el ángulo $\angle ABC$, y $\angle BAC = \angle PCB$, se sigue que son semejantes, de modo que $BP \cdot BA = BC^2$. Análogamente, como los triángulos ABC y QBC comparten el ángulo $\angle ACB$, y $\angle BAC = \angle QBC$, estos triángulos son semejantes y $CQ \cdot CA = BC^2$. Luego, $BO^2 - r^2 = CO^2 - r^2$ de donde $BO = CO$. Así, O está en la mediatriz del segmento BC. Como $O'B = O'C$, tenemos también que O' está en la mediatriz del segmento BC, y por lo tanto O, O' y el punto medio de BC son colineales, es decir, OO' es perpendicular a BC.



Solución del problema 55. Sea:

$$s(a,b,c) = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Aplicando la fórmula de Herón (ver Teorema 34 del Apéndice), tenemos que el área de un triángulo de lados $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ es $\frac{1}{4}\sqrt{s(a,b,c)}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \geq b \geq c$ con a, b y c enteros positivos. Entonces, $b = c + x$, $a = b + y = c + x + y$ con $x, y \geq 0$ y:

$$s(a,b,c) = (3c + 2x + y)(c - y)(c + y)(c + 2x + y).$$

Luego, $y < c$. Por otro lado, es fácil ver que si c, x, y son números reales con $x \geq 0, y \geq 0$, $y < c$ y $c > 0$, entonces hay un triángulo de lados $c + x + y$, $c + x$ y c, ya que se cumple la desigualdad del triángulo. Demostraremos que todo entero menor que 63 no se puede escribir, de dos formas distintas, en la forma $s(c + x + y, c + x, c)$, con $c > 0, x \geq 0, y \geq 0$ y $y < c$.

Notemos primero que cuando x aumenta, también aumenta $s(c+x+y, c+x, c)$. Tomando esto en cuenta, consideremos las siguientes posibilidades para c.

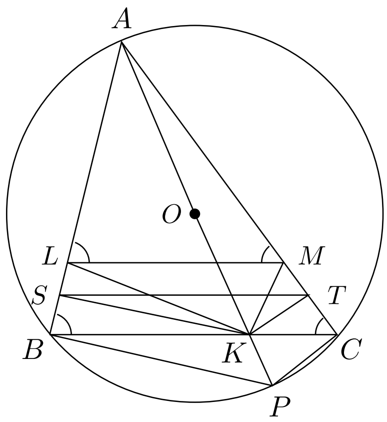
1. Si $c = 1$, entonces $y = 0$, y para $x = 0, 1, 2, 3$, tenemos que $s(c + x + y, c + x, c) = 3, 15, 35, 63$, respectivamente.

2. Si $c = 2$, entonces $y = 0$ o $y = 1$. En el primer caso, tenemos que $s(c + x + y, c + x, c) = 48, 148$ para $x = 0, 1$, respectivamente. En el segundo caso, tenemos que $s(c + x + y, c + x, c) = 63$ para $x = 0$.

3. Si $c \geq 3$, entonces $s(c + x + y, c + x, c) \geq 3c \cdot 1 \cdot c \cdot c = 3c^3 \geq 81 > 63$.

Hemos considerado todos los casos en los cuales $s(c + x + y, c + x, c)$ es menor que 63. Finalmente, como $s(4,4,1) = s(3,2,2) = 63$, tenemos que el valor de r buscado es $\frac{\sqrt{63}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Solución del problema 56. Dibujemos las alturas KS y KT de los triángulos KBL y KCM, respectivamente, desde el vértice K. Prolonguemos el segmento AK hasta intersectar el circuncírculo del triángulo ABC en el punto P.



Como AP es diámetro del circuncírculo de $ABPC$, los triángulos ABP y ACP son rectángulos. Además, los triángulos ASK y ABP son semejantes (KS y BP son paralelas), al igual que los triángulos ATK y ACP (KT y CP son paralelas). Luego:

$$\frac{AS}{AB} = \frac{AK}{AP} = \frac{AT}{AC},$$

de donde se sigue que los triángulos AST y ABC son semejantes, y por lo tanto ST y BC son paralelas. Como $LS = SB$ y $MT = TC$, se sigue por el Teorema de Thales que LM y BC son paralelas.

Solución del problema 57. Como la cuadrícula tiene 9 casillas en la diagonal principal, tenemos que los 10 números primos 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 y 79 no pueden estar todos en la diagonal de la cuadrícula. Supongamos que p es el primo que está fuera de la diagonal y que está en el renglón k, $1 \leq k \leq 9$. Tenemos entonces que el producto de los números en el renglón k es múltiplo de p, mientras que el producto de los números de la columna k no es múltiplo de p. Como p es primo, se sigue que el producto de los números en el renglón k es distinto del producto de los números de la columna k.

Solución del problema 58. Sean x, y dos de los nueve enteros dados. De los restantes siete enteros tenemos $\binom{7}{2} = 21$ parejas posibles. Luego, por el principio

de las casillas, hay dos parejas con la misma suma módulo 20. Tenemos dos casos.
Caso 1. Las parejas son (a, b), (c, d) con a, b, c, d distintos entre sí. Como $a+b \equiv c+d \pmod{20}$, se sigue que $a+b-c-d$ es múltiplo de 20.
Caso 2. Las parejas son (a, z), (c, z). Como $a+z \equiv c+z \pmod{20}$, tenemos que $a \equiv c \pmod{20}$. De los nueve enteros dados borremos por el momento a los enteros a, c. Nuevamente, de los restantes siete enteros, hay dos parejas, digamos (b, q), (d, s), con la misma suma módulo 20. Si b, q, d, s son distintos entre sí, terminamos como en el caso 1. Si $q = s$, entonces $b \equiv d \pmod{20}$, y por lo tanto, $a+b-c-d$ es múltiplo de 20.
Finalmente, es fácil ver que la colección de ocho enteros $0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 40$, no satisface (a).

Solución del problema 59. Diremos que un triángulo es *bueno* si contiene a C. Sea v un vértice fijo de P y numeremos los restantes vértices (empezando a la derecha de v) por $v_1, v_2, \ldots, v_{2m}$. Procedemos a contar cuántos triángulos buenos tienen a v como uno de sus vértices. Para esto contaremos primero aquéllos que tienen al segmento vv_1 como uno de sus lados. Sean l y l_1 los ejes de simetría de P por v y v_1, respectivamente. Es claro que el vértice v_{m+1} es el único que forma un triángulo bueno y también es el único vértice que está en la región de P delimitada por l y l_1 y que no intersecta al segmento vv_1. De manera general, al considerar el vértice v_k, $1 \leq k \leq m$, los únicos triángulos buenos que tienen al segmento vv_k como uno de sus lados, son precisamente aquéllos cuyo tercer vértice cae en la región de P delimitada por l y l_k y que no intersecta al segmento vv_k. Es fácil ver que hay exactamente k de ellos. Como cada triángulo bueno que contiene a v tiene exactamente un vértice a cada lado de l, tenemos que el número de triángulos buenos que contienen a v es:

$$N_v = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$$

y por lo tanto, al variar v obtenemos un total de:

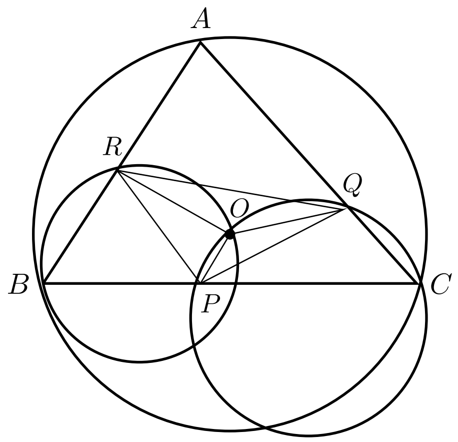
$$\frac{(2m+1)N_v}{3} = \frac{(2m+1)m(m+1)}{6}$$

triángulos buenos (note que al variar v cada triángulo se cuenta tres veces, por lo que es necesario dividir entre 3).

Solución del problema 60. Si $a \geq 1$, entonces b^{2^a} es un cuadrado. Los números $a, a+1, a+2, a+3$ tienen la forma $4k_1, 4k_2+1, 4k_3+2, 4k_4+3$, no necesariamente en este orden. Por lo tanto, tres sumandos del lado izquierdo son divisibles entre 4 y el cuarto es de la forma $4k+2$. Luego, el lado izquierdo de la ecuación no es un cuadrado. Por lo tanto, $a < 1$. Si $a \leq -4$, el lado izquierdo es un número negativo y el lado derecho es positivo. Finalmente, verificando los casos $a = -3, -2, -1, 0$, obtenemos las soluciones $(a, b) = (-2, 16), (0, 6)$.

3.2. Soluciones de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Solución del problema 1. Primero veamos que $OQAR$ es un cuadrilátero cíclico. Como $ORBP$ y $OPCQ$ son cíclicos, tenemos que $\angle ROP = 180° - \angle B$, $\angle QOP = 180° - \angle C$. Luego, $\angle ROQ = 360° - \angle ROP - \angle QOP = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$, y por lo tanto $OQAR$ es cíclico.



Veamos ahora que $\angle P = \angle A$.
Como $ORBP$ es cíclico, $\angle OPR = \angle OBR = \angle OAB$, y como $OPCQ$ es cíclico, $\angle OPQ = \angle OCQ = \angle OAQ$. Luego, $\angle P = \angle OPR + \angle OPQ = \angle OAB + \angle OAQ = \angle A$. Análogamente, $\angle Q = \angle B$ y $\angle R = \angle C$. Por lo que PQR y ABC son semejantes.
Como $OQAR$ es cíclico tenemos que $\angle OQR = \angle OAR = 90° - \angle C$, y como $\angle PRQ = \angle C$, QO es perpendicular a RP. Análogamente, RO es perpendicular a PQ, por lo que O es el ortocentro del triángulo PQR.
Notemos que los radios de las circunferencias circunscritas a BPO y COP son iguales, ya que dichas circunferencias tienen como cuerda común a PO y se tiene que $\angle OBP = \angle OCP$. De igual manera, las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO y PQR tienen el mismo radio, ya que estas últimas tienen

la cuerda PR en común y los ángulos $\angle RBP$ y $\angle PQR$ son iguales.
Otra manera de resolver (ii) es usando la ley de los senos generalizada. La circunferencia circunscrita a BPO cumple que el doble de su radio es $\frac{OB}{\text{sen}\,\angle OPB}$ y el doble del radio de la que circunscribe a COP es $\frac{OC}{\text{sen}\,\angle OPC}$. Pero $OB = OC$ y sen $\angle OPB =$ sen $\angle OPC$, por ser ángulos suplementarios. El doble del radio de la circunferencia circunscrita a PQR está dado por $\frac{RP}{\text{sen}\,\angle PQR} = \frac{RP}{\text{sen}\,\angle RBP}$ que es igual al doble del radio de la circunferencia circunscrita a BPO.

Solución del problema 2. (i) Sea C una cuadrícula $2n$-balanceada. Construyamos primero dos cuadrículas idénticas A y B poniendo en cada casilla la mitad del número correspondiente en C. Observemos que $A+B = C$, y además, tanto en A como en B, números escritos en casillas que comparten un lado tienen diferencia menor o igual que n. Sin embargo, los números de A y B pueden no ser enteros. Para corregir esto, ajustemos A redondeando sus números hacia abajo, y ajustemos B redondeando sus números hacia arriba. $A + B$ sigue siendo C. La diferencia de dos números en casillas que comparten lado en A pudo haber aumentado, por culpa del ajuste, máximo en $\frac{1}{2}$. Pero después del ajuste la diferencia es un número entero. Si este entero fuera mayor o igual que $n + 1$, antes del ajuste la diferencia era mayor o igual que $n + \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que A es n-balanceada. Análogamente, B es n-balanceada.
(ii) Sea D una cuadrícula $3n$-balanceada. Construyamos tres cuadrículas idénticas A, B y C poniendo en cada casilla la tercera parte del número correspondiente en D. Entonces $A + B + C = D$, y en A, B y C números escritos en casillas que comparten un lado tienen diferencia menor o igual que n. Para hacer el ajuste, nos fijamos en el residuo módulo 3 de un número escrito en D. Si este residuo es cero, no hay nada que hacer (ya tenemos números enteros en A, B y C). Si el residuo es 1, redondeamos los números correspondientes hacia abajo en A y B y hacia arriba en C. Si el residuo es 2, redondeamos hacia abajo en A y hacia arriba en B y C. Es claro que $A+B+C$ sigue siendo D. Además, en A, B y C, la diferencia entre números escritos en casillas que comparten lado pudo haber aumentado, por culpa del ajuste, máximo en $\frac{2}{3}$ (por ejemplo, en B, un número de la forma $b+\frac{1}{3}$, con b entero, cambia a b, y uno de la forma $b + \frac{2}{3}$ cambia a $b + 1$, de forma que el ajuste aumenta o disminuye el valor de un número de B en a lo más $\frac{1}{3}$). Pero después del ajuste la diferencia es un número entero. Si este número fuera mayor o igual que $n + 1$, antes del ajuste la diferencia era mayor o igual que $n + \frac{1}{3}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que A, B y C son n-balanceadas.

Solución del problema 3. Si a es positivo, pongamos $x = a$ y $y = -1$. Con

estos valores, para toda n impar se tiene que $a + xy^n = 0$, y por lo tanto todos los términos impares de la sucesión son enteros. Para poder tomar $x = a$ necesitamos que a y b sean primos relativos.
Si a es negativo, pongamos $x = -a$ y $y = 1$. En este caso todos los términos de la sucesión son enteros (y también es necesario que a y b sean primos relativos).
Ahora supongamos que a y b no son primos relativos y sea p un primo que divide a ambos. Tomemos un entero positivo k tal que b^k divide a $a + xy^k$. Como p divide a b^k, p divide a $a + xy^k$, y como divide a a, divide xy^k. Pero como x es primo relativo con b, p divide a y^k, y por lo tanto divide a y. Sea M la máxima potencia de p que divide a a. b^n no puede dividir a $a + xy^n$ para ningún valor $n > M$ porque p^n divide tanto a b^n como a xy^n, pero no divide a a.
Por lo tanto, la respuesta es *las parejas tales que a y b son primos relativos*.

Solución del problema 4. Para $n < 3$, ninguna reordenación tiene una terna aritmética. Para $n = 3$, la lista $2, 1, 3$, cumple.
Vamos a construir un ejemplo para n utilizando los ejemplos para los valores anteriores. De un lado de la lista pondremos los números pares entre 1 y n, y del otro, los impares. Si son j números pares, para ordenarlos utilizamos el ejemplo para j simplemente multiplicando sus números por 2. Si son k números impares, para ordenarlos utilizamos el ejemplo para k multiplicando sus números por 2 y restándoles 1. De esta forma obtenemos una reordenación de los números del 1 al n. Si en la parte par, $2a$, $2b$ y $2c$ son una terna aritmética, entonces a, b y c lo eran en el ejemplo para j. Si en la parte impar $2a-1$, $2b-1$ y $2c-1$ son una terna aritmética, a, b y c lo eran en el ejemplo para k. Si tomamos un término de la parte par y otro de la parte impar, su suma es impar, y no hay un tercero en medio de ellos cuyo doble sea esta suma. Esto muestra que la ordenación que conseguimos no tiene ternas aritméticas.

Solución del problema 5. Tomemos una de las colecciones que queremos contar. No puede ser una colección vacía, porque una colección de una sola carta no es completa $(N > 1)$.
Fijémonos en los colores que aparecen: no pueden estar todos. Supongamos que faltan dos, digamos A y B. Tomemos una figura $\mathcal{F}$ y un número n de los que sí aparecen. La carta de color A, figura $\mathcal{F}$ y número n no está en nuestra colección. Sin embargo, al añadirla, la colección no se vuelve completa (pues no estamos agregando figuras nuevas ni números nuevos, y aunque estamos agregando el color A, aún falta que aparezca el color B), en contradicción con la característica de las colecciones que queremos contar. Entonces falta únicamente un color. Análogamente, aparecen todas salvo una de las figuras y todas salvo uno de los números.

Es claro además que en la colección están todas las cartas que usan estos colores, estas figuras y estos números (de lo contrario, al añadir una de éstas, la colección no se volvería completa).
Recíprocamente, todas las colecciones que se construyen eligiendo $N-1$ números, y poniendo en la colección todas las cartas que resultan de combinar estos colores con estas figuras y estos números, son colecciones incompletas que se vuelven completas si se añade cualquier otra carta de la baraja.
Por lo tanto, la respuesta es N^3 (elegir $N-1$ colores, por ejemplo, equivale a elegir el color que no va a aparecer, y hay N formas de hacer esto).

Solución del problema 6. Sean Q y R las intersecciones de l con AB y CA respectivamente. Sean K y N los puntos donde BG y CF cortan a AD, respectivamente.
Sea $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$. Como l y AD son paralelas, tenemos que $\angle ARQ = \angle DAC = \alpha$, y entonces el triángulo AQR es isósceles con $AQ = AR$. También, por ser l y AD paralelas, tenemos que $\angle ADB + \angle REC = 180°$, $\angle ADB = \angle QEB$ y $\angle ERC = \angle BAD = \angle BQE = \alpha$.
Por otro lado, como $BD = EC$, se tiene que $BE = CD$. Sea E' sobre la prolongación de AD (con D entre A y E') y tal que $DE' = ER$. Por el criterio LAL, los triángulos BDE' y CER son congruentes, lo que implica que $\angle BE'D = \angle CRE = \alpha$, y entonces el triángulo ABE' es isósceles, con $BE' = AB$, pero $BE' = CR$ (por la congruencia) y entonces $AB = CR$. Tenemos también que, $BQ = BA + AQ = RC + AR = AC$. Ahora, del hecho de que $\triangle CRP \sim \triangle CAN$ y $\triangle BAK \sim \triangle BQP$, obtenemos:

$$\frac{AK}{QP} = \frac{BA}{BQ} = \frac{RC}{AC} = \frac{RP}{AN} \Rightarrow \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN},$$

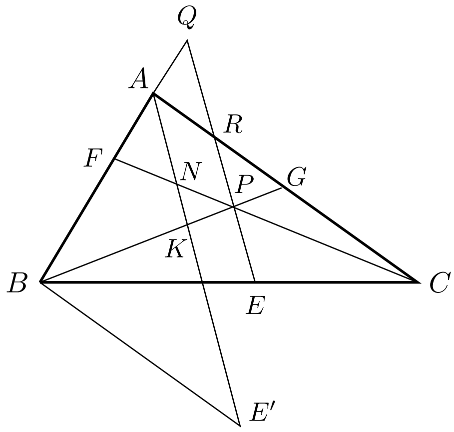
y del hecho de que $\triangle AFN \sim \triangle QFP$ y $\triangle RGP \sim \triangle AGK$, obtenemos:

$$\frac{GK}{GP} = \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN} = \frac{FP}{FN} \Rightarrow \frac{GP + PK}{GP} = \frac{FN + NP}{FN} \Rightarrow \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{FN},$$

y finalmente:

$$\frac{AR}{RG} = \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{NF} = \frac{AQ}{AF} \Rightarrow RG = AF \Rightarrow BF = AB - AF = CR - RG = CG,$$

que es lo que queríamos probar.



Otra manera de probar que $AB = RC$ es usando la ley de senos en los triángulos ABD y REC:

$$\frac{AB}{\text{sen } \angle ADB} = \frac{BD}{\text{sen } \angle BAD} = \frac{EC}{\text{sen } \angle ERC} = \frac{RC}{\text{sen } \angle REC} \Rightarrow AB = RC.$$

Otra manera es utilizando la semejanza de los triángulos CRE y CAD:

$$\frac{RC}{AC} = \frac{EC}{DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

donde la última igualdad se sigue por el Teorema de la Bisectriz.

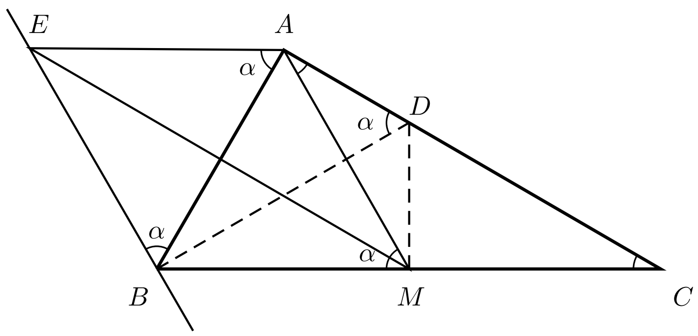
Solución del problema 7. Dividimos en casos.
(1) Si $a = 1$ y n es pariente de ab, entonces la única posibilidad es $n = 1b$, y claramente $1b$ divide a $1b$.
(2) Si $a = 2$. Como $2b$ debe dividir a $11b$ y a $2b$ divide a $2b$, entonces $2b$ divide a $11b - 2b = 90$. Los divisores de $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ son $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45$ y 90. Como $20 \leq 2b = 20 + b \leq 29$, no hay soluciones en este caso.
(3) Si $a \geq 3$. Como ab debe dividir a $(a-3)21b$ y a $(a-3)12b$, entonces ab divide a $(a-3)21b - (a-3)12b = 90$. Luego, las únicas posibilidades para ab son 30, 45 y 90, ya que $ab \geq 30$.
Veamos que 30, 45 y 90 dividen a todos sus parientes.
Si n es pariente de 30, entonces $n = A0$ donde A es un número cuya suma de dígitos es 3. Luego, n es múltiplo de 10 y de 3, y por lo tanto también de 30.
Si n es pariente de 45, entonces $n = A5$ donde A es un número cuya suma de dígitos es 4. Luego, la suma de los dígitos de n es 9 y por lo tanto n es múltiplo de 9. Como n claramente es múltiplo de 5, se sigue que n es múltiplo de 45.
Si n es pariente de 90, entonces $n = A0$ donde A es un número cuya suma de

dígitos es 9. Luego, n es múltiplo de 9 y de 10, y por lo tanto de 90.

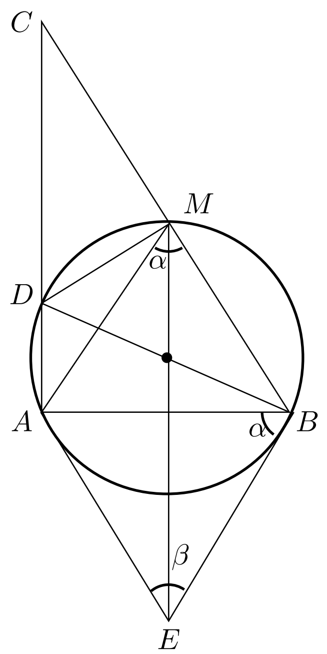
Concluimos que los únicos enteros de dos dígitos que dividen a todos sus parientes son: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 30, 45 y 90.

Segunda Solución. Dividimos en dos casos.
(1) $a = 1$. Este caso es como en la primer solución.
(2) $a \geq 2$. Como ab debe dividir a $1(a-1)b$ y claramente ab divide a ab, entonces ab divide a $1(a-1)b - ab = 90$. Y terminamos como en la primer solución.

Solución del problema 8. Como M es el circuncentro del triángulo ABC, el triángulo AMC es isósceles, por lo que $\angle MAC = \angle MCA = \frac{\alpha}{2}$, donde $\angle AMB = \alpha$. En el cuadrilátero $ABMD$, sus ángulos en A y en M son rectos, entonces es cíclico y BD es un diámetro de su circunferencia circunscrita. Como BE es perpendicular a BD, se tiene que BE es tangente a esta circunferencia en el punto B. Se sigue que $\angle EBA = \angle BMA = \alpha$. Como EM es la mediatriz de AB (es paralela a CA y pasa por el punto medio de BC), tenemos que los triángulos EAM y EBM son congruentes.
Si el triángulo EBM es semejante al triángulo AMC, entonces $\angle EBM = \angle AMC$ y de aquí se obtiene la igualdad $\alpha + 90° - \frac{\alpha}{2} = 180° - \alpha$, lo cual implica que $\alpha = 60°$. Por lo tanto, el triángulo ABM es equilátero.
Por otro lado, si el triángulo ABM es equilátero entonces $\angle EBA = 60°$ y el triángulo EBM es isósceles y semejante al triángulo AMC.



Segunda Solución. El cuadrilátero $ABMD$ es cíclico (ya que sus ángulos en A y M son rectos) y está inscrito en una circunferencia de diámetro BD.



Como ME es paralela a AC y M es punto medio de BC, se tiene que ME es mediatriz de AB.
Los triángulo MCA, ABM y BAE son isósceles, los dos primeros por ser M el circuncento del triángulo ABC y el tercero por ser ME mediatriz de AB.
Como EB es perpendicular a BD, se tiene que EB es tangente al circuncírculo de $ABMD$.
El ángulo semi-inscrito $\angle ABE$ es igual al inscrito $\angle AMB$, ya que abren el mismo arco. Sean $\alpha = \angle ABE = \angle AMB$ y $\beta = \angle BEA$.
Como ME y AC son paralelas, $\angle MAC = \angle AME$.
Los triángulos AEM y MCA son semejantes si y sólo si $\angle AME = \angle MEA$ si y sólo si $\alpha = \beta$.
Si los triángulos AEM y MCA son semejantes, entonces $\alpha = \beta$ y como $2\alpha + \beta = 180°$ (ángulos en ABE) se tiene que $\alpha = 60°$. Luego, el triángulo ABM es equilátero y $\angle ABC = 60°$.
Si $\angle ABC = 60°$, entonces el triángulo ABM es equilátero, por lo que $\alpha = 60°$ y como $2\alpha + \beta = 180°$, tenemos que $\beta = 60° = \alpha$.

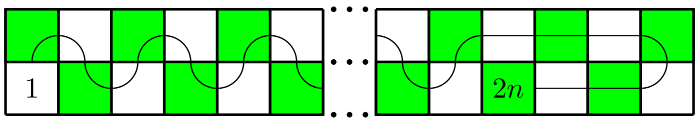
Solución del problema 9. Contemos, equivalentemente, la cantidad de caminos que visitan cada casilla de la cuadrícula exactamente una vez y en los que cada paso es a una casilla adyacente.
Contemos primero cuántos de estos caminos empiezan en la casilla de la esquina

superior izquierda de la cuadrícula. Llamemos a_n a esta cantidad. Por simetría, hay a_n caminos que empiezan en cada una de las otras esquinas.
Supongamos que el primer paso de uno de dichos caminos es hacia la derecha. Entonces el camino continúa hacia la derecha hasta llegar a la orilla de la cuadrícula. En efecto, un paso hacia abajo divide a la cuadrícula en dos partes; la porción final del camino no puede visitar ambas partes. Es claro entonces que hay una sola forma de completar el camino. Si el primer paso es hacia abajo, en cambio, el siguiente es hacia la derecha y el camino puede completarse de a_{n-1} formas.
Por lo tanto, $a_n = a_{n-1} + 1$ y como $a_2 = 2$, se sigue que $a_n = n$.
Ahora contemos cuántos caminos empiezan en la casilla superior de la j-ésima columna, con $1 < j < n$. Si el primer paso es hacia la derecha, entonces el camino continúa hacia la derecha hasta llegar a la orilla de la cuadrícula (de nuevo, un paso hacia abajo divide a la cuadrícula en dos partes; la porción final del camino no puede visitar ambas), luego baja y regresa hasta llegar a la casilla inferior de la j-ésima columna. El camino puede completarse de $a_{j-1} = j - 1$ formas. Análogamente, si el primer paso es hacia la izquierda, el camino puede completarse de $a_{n-j} = n - j$ formas. En total, son $(j-1) + (n-j) = n - 1$ caminos. Por lo tanto, la respuesta es:

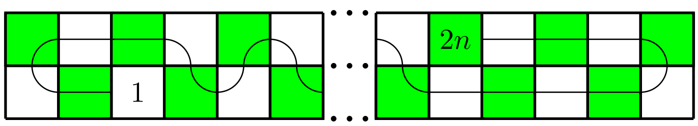
$$4n + 2\sum_{j=2}^{n-1}(n-1) = 4n + 2(n-2)(n-1) = 2n^2 - 2n + 4.$$

Segunda Solución. Pintemos la cuadrícula como tablero de ajedrez de blanco y negro. Supongamos que el 1 está en una casilla blanca. Entonces, el 2 tiene que estar en una casilla negra, y así cada número par estará en una casilla negra. En particular, el $2n$ estará en una casilla negra. Dividimos en dos casos.
(i) Numeremos las columnas de izquierda a derecha del 1 al n y supongamos que el 1 y el $2n$ están en la columna i con $1 < i < n$. Supongamos que el 2 está a la izquierda del 1. Entonces, todos los números del 3 al $2i - 1$ estarán también a la izquierda de la columna i, y por lo tanto el número $2i$ tendrá que quedar a la derecha de la columna i, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, si el 1 y el $2n$ están en la misma columna, necesariamente deberán estar en las columnas 1 o n. Luego, en este caso sólo hay 4 formas de colocar al 1 y al $2n$, y es fácil ver que en cada una de estas 4 formas sólo hay una manera de colocar al resto de los números.
(ii) Supongamos ahora que el 1 y el $2n$ no están en la misma columna. Dividimos en dos subcasos.
(a) Si el 1 está en una esquina y el $2n$ está en la columna i, entonces es fácil ver que el 2 tiene que estar en la misma columna del 1. Luego, si consideramos

ahora la cuadrícula que se obtiene quitando esta columna, entonces el 3 está en una esquina de esta nueva cuadrícula y análogamente, el 4 tiene que estar en la misma columna del 3. Continuando de esta forma, tenemos una única manera de acomodar a los números entre 1 y $2i-2$. Ahora, como el $2i-1$ debe estar en la misma columna del $2n$, completamos la cuadrícula como en el caso (i), tomando el $2i-1$ como si fuera el 1. Por lo tanto, sólo hay una única manera de llenar la cuadrícula en este subcaso, como se muestra en la siguiente figura.

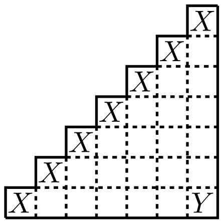


(b) Supongamos que el 1 está en la columna j y que el $2n$ está en la columna i con $1<j<i\leq n$. Entonces, es fácil ver que los números $2,3,\ldots,j$ tienen que estar en las columnas $j-1,j-2,\ldots,1$, respectivamente, dejando como única posibilidad que los números desde $j+1$ hasta $2j+1$ estén en la misma fila. Luego, el $2j+1$ está en la columna $j+1$ y ahora completamos la cuadrícula como en el subcaso (a), tomando el $2j+1$ como si fuera el 1. Por lo tanto, sólo hay una única manera de llenar la cuadrícula en este subcaso, como se muestra en la siguiente figura.

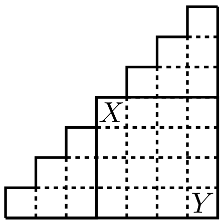


Luego, en el caso (i) hay 4 formas de llenar la cuadrícula. Y en el caso (ii), hay $2n(n-1)$ formas de llenar la cuadrícula, ya que hay $2n$ maneras de colocar el 1 y como la casilla del $2n$ tiene distinto color que la del 1, entonces hay $n-1$ maneras de colocar el $2n$. Por lo tanto, hay $2n(n-1)+4=2n^2-2n+4$ formas de llenar la cuadrícula.

Solución del problema 10. Llamemos construibles a dichos números n. Tomemos un n construible y fijémonos en los cuadritos marcados con X.

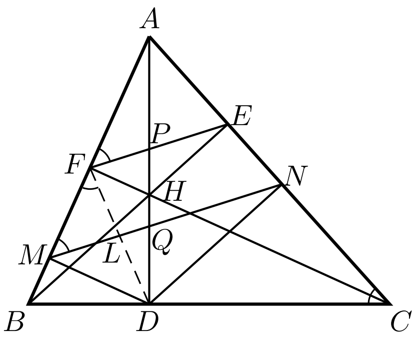


En total tenemos n de estos cuadritos. Si consideramos un cuadrado de los que no se salen de la figura, éste puede cubrir a lo más un cuadrito de los marcados con X. Como sólo tenemos n cuadrados para cubrir la figura, concluimos que cada cuadrado ocupará uno y sólo uno de estos cuadritos (de los marcados con X).
Ahora nos fijamos en el cuadrito marcado con Y. El cuadrado que lo cubra, deberá también cubrir a un cuadrito marcado con X, y por lo tanto, este cuadrito marcado con X tiene que estar a la mitad de la escalera. Luego, n es impar (ver figura).

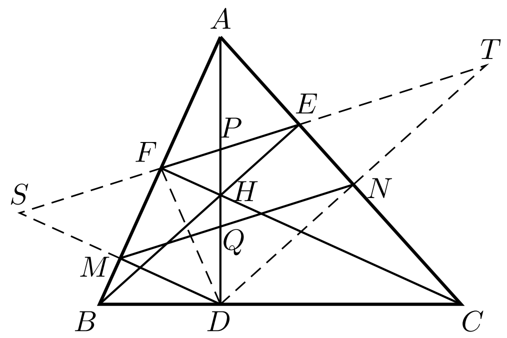


Este cuadrado separa a la escalera original en dos escaleras, cada una de $\frac{n-1}{2}$ escalones. Por lo tanto, $\frac{n-1}{2}$ es construible. Continuando de esta forma, $\frac{n-1}{2}$ es impar y $\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2} = \frac{n-3}{4}$ es construible, y así sucesivamente hasta llegar al 1 que es el menor construible. Además, si m es construible entonces también lo es $2m+1$. Entonces concluimos que todos los números construibles son: $1, 3, 7, 15, \ldots$, es decir son todos los números de la forma $2^k - 1$ para $k \geq 1$.

Solución del problema 11. Sea H el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC. Dado que AD es diámetro de la circunferencia, tenemos que $\angle DMA = \angle DNA = 90°$. De aquí tenemos que DN es paralelo a BE y DM es paralelo a CF, lo que a su vez implica que $\frac{AE}{EN} = \frac{AH}{HD} = \frac{AF}{FM}$, es decir, MN es paralelo a FE. Sea L el punto donde FD intersecta a MN. Como el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico entonces $\angle MFL = \angle ACD$; también, como $BFEC$ es cíclico tenemos que $\angle AFE = \angle ECB$, y como MN es paralela a FE tenemos que $\angle FML = \angle AFE$. Hemos probado que $\angle MFL = \angle FML$, y como el triángulo FMD es rectángulo entonces L es el punto medio de FD. Dado que FE es paralelo a MN entonces $\frac{DQ}{QP} = \frac{DL}{LF} = 1$, es decir, Q es el punto medio de PD.

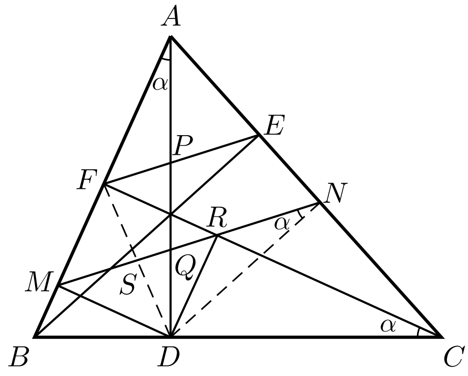


Segunda Solución. Al reflejar el pie de la altura D sobre los lados AB y AC obtenemos los puntos S y T, respectivamente. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Como MF es la mediatriz del segmento SD, tenemos que $\angle SFM = \angle DFM$; además, como el cuadrilátero $BFHD$ es cíclico, tenemos que $\angle DFB = \angle DHB$. A su vez, tenemos que $\angle DHB = \angle AHE = \angle AFE$ (esta última igualdad se sigue de que el cuadrilátero $AFHE$ es cíclico), de aquí se sigue que S, F y E son colineales. Análogamente se prueba que T, E y F son colineales y obtenemos que S, F, E y T son colineales. Como M y N son los puntos medios de los segmentos SD y TD, tenemos que MN es paralelo a ST. Como $\frac{DQ}{QP} = \frac{DM}{MS} = 1$ se concluye que Q es punto medio de PD.



Tercera Solución. Sean S y R los puntos donde FD y FC intersectan a MN, respectivamente. Probaremos que $FMDR$ es un rectángulo y de aquí se seguirá que S es el punto medio de FD. Para esto, como el cuadrilátero $AMDN$ es cíclico entonces $\angle MAD = \angle MND$. Además, como $\angle MAD = \angle FCB$ tenemos que el cuadrilátero $DRNC$ es cíclico. Se sigue que $\angle DRC = \angle DNC = 90°$ y entonces $FMDR$ es un rectángulo (tiene tres ángulos rectos y por tanto el cuarto también). Sea T el punto donde ED intersecta a MN.

Análogamente se prueba que T es el punto medio de ED. Concluimos entonces que ST es paralela a FE. Como $\frac{DQ}{QP} = \frac{DS}{SF} = 1$ se sigue que Q es el punto medio de PD.



Solución del problema 12. Sea n la suma de los dígitos del entero positivo A. Si $1, 2, ..., 8$ se obtienen como suma de dígitos de A, entonces $n \geq 8$. Si $n = 8$ no hay nada que hacer. Supongamos que $n \geq 9$.

(i) Veamos que el 9 se puede escribir como suma de dígitos de A.

Si 9 es un dígito de A, entonces se puede escribir el 9.

Si algún 1, de entre los dígitos de A, no se utilizó en la escritura del 8, sumando a estos dígitos el 1, obtenemos 9.

Si todos los unos que aparecen como dígitos de A se utilizaron en la escritura del 8, sea j el menor de los dígitos del número A que no se utilizó en dicha escritura. Entonces en ésta se utilizan todos los dígitos de la escritura de $j - 1$, (en efecto, la expresión de $j - 1$ como suma de dígitos de A utiliza dígitos menores que j y cada uno de ellos debe aparecer en la escritura del 8, ya que j es el menor de los que no aparecen en la escritura del 8). Ahora sustituimos estos por j y obtenemos 9.

(ii) Veamos ahora que si m $(9 \leq m < n)$, es un entero positivo que se puede escribir como suma de dígitos de A, entonces $m + 1$ también.

Si un 1, de entre los dígitos de A, no se utilizó en dicha suma, agregamos 1 y obtenemos $m + 1$.

Si todos los unos que aparecen como dígitos de A, se utilizaron en la escritura del m, sea j el menor de los dígitos del número A que no se utilizó en dicha escritura. Entonces, en la escritura del m, se utilizaron todos los dígitos de la escritura de $j - 1$. Sustituyendo estos por j, obtenemos $m + 1$.

Luego, (i) y (ii) garantizan que cada uno de los números $1, 2, \ldots, n$, es suma de dígitos de A.

El número $A = 1249$ no es surtido y cumple que $1, 2, \ldots, 7$ son sumas de dígitos de A.

Solución del problema 13. Supongamos que N tiene esa propiedad. Entonces existe un entero positivo n tal que $n, n+1, \ldots, n+9$ son divisores de N. Sea k un entero tal que $1 \leq k \leq 10$. Como en la lista $n, n+1, \ldots, n+9$ tenemos al menos k enteros consecutivos, uno de ellos debe ser múltiplo de k y por transitividad k es un divisor de N. Luego, los números $1, 2, \ldots, 10$ son divisores de N y por lo tanto 11 no divide a N. De aquí que N debe ser múltiplo de 2520 (el mínimo común múltiplo de $1, 2, \ldots, 10$) pero no de 11. Supongamos ahora que $N = 2520k$ con k y 11 primos relativos. Claramente, los números $1, 2, \ldots, 10$ son 10 divisores consecutivos de N. Si tuviéramos 11 divisores consecutivos, uno de ellos sería múltiplo de 11 y N sería múltiplo de 11, lo cual no puede ser. Por lo tanto, todo N de esa forma cumple el problema.

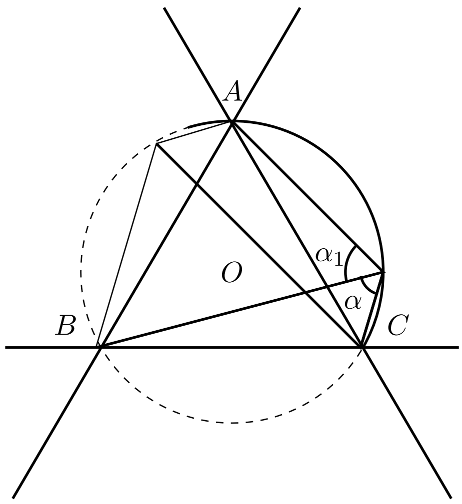
Solución del problema 14. Los puntos P que cumplen que $\angle APB = \angle BPC$, son los que se encuentran en:

(i) el arco CA del circuncírculo de ABC (sin incluir a C y A),

(ii) los puntos de la mediatriz de CA (sin incluir a B),

(iii) los puntos sobre la recta por A y C sin incluir al segmento cerrado CA.

Primer caso. De los puntos del circuncírculo es claro que los puntos P sobre el arco CA cumplen que $\angle APB = \angle BPC = 60°$. Pero si $P = C$ o $P = A$ entonces uno de $\angle APB$ y $\angle BPC$ es de $60°$ pero el otro ángulo no queda bien definido.

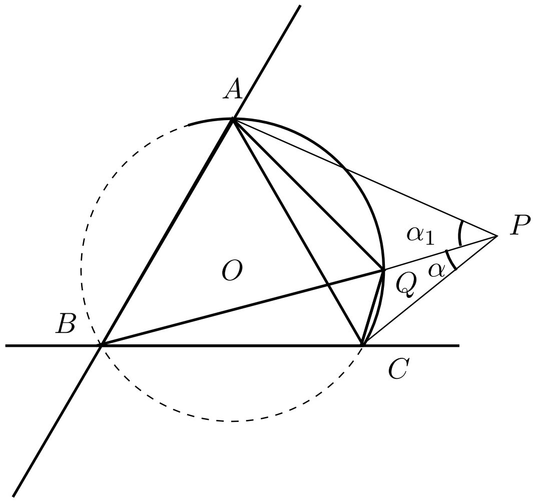


Los puntos sobre los arcos AB y BC cumplen que uno de los ángulos es de $60°$ y el otro de $120°$, salvo cuando P es uno de A, B o C en cuyo caso uno de ellos no queda bien definido.

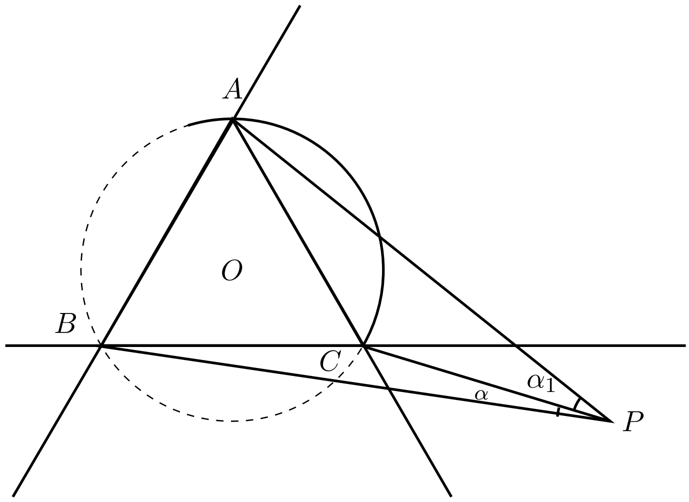
Segundo caso. Si P está dentro del *cono pequeño* que determinan las rectas AB y BC. Sean $\alpha_1 = \angle APB$ y $\alpha = \angle BPC$ y sea Q el punto de intersección de BP con el circuncírculo de ABC (distinto de B). Por el primer caso $\angle AQB = \angle BQC = 60°$.

Luego $\alpha_1 = \alpha$ si y sólo si los triángulos APQ y CPQ son congruentes (tienen dos ángulos iguales y un lado común) si y sólo si $AP = CP$ (los triángulos tendrían los tres lados iguales).

Luego P dentro del cono pequeño cumple la condición si y sólo si P está sobre la mediatriz de CA, sin incluir el caso $P = B$ ya que en este punto no están bien definidos los ángulos.



Tercer caso. Si P se encuentra sobre el *cono grande* que determinan las rectas AB y BC. Si P está por abajo de la recta BC y a la derecha de la recta CA, se tiene que $\alpha_1 = \angle APB > \angle BPC = \alpha$ (ya que C queda dentro del triángulo APB). Y si P está por abajo de la recta BC y a la izquierda de la recta CA se tiene que $\alpha_1 = \angle APB < \angle BPC = \alpha$ (ya que C queda fuera del triángulo APB).

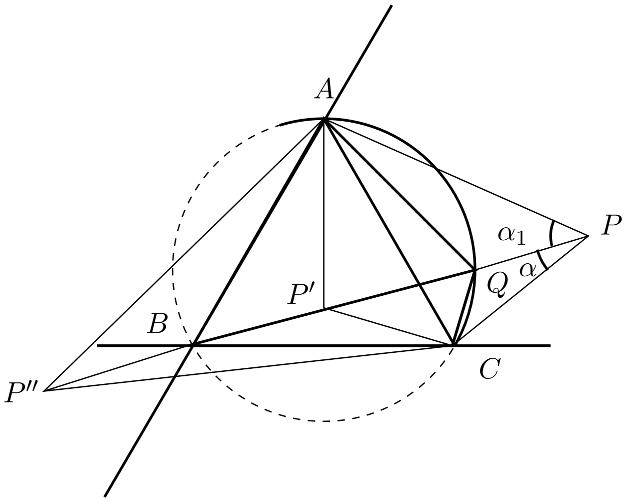


Por tanto $\alpha_1 = \alpha$ si y sólo si P se encuentra sobre el rayo que parte de C en dirección $\overrightarrow{AC}$.

Algo análogo ocurre para los puntos de la otra parte del cono grande.

Segunda Solución. Observemos que P tiene que ser distinto de A y de C. Más aún, P no está en alguna de las rectas AB y BC. Si P está en el arco AC que no contiene a B, entonces $\angle APB = \angle ACB = 60°$, por abrir ambos el arco AB. Análogamente, $\angle BPC = \angle BAC = 60°$. Por tanto, P cumple con la condición.

Sea P un punto en el interior de un ángulo de $60°$ determinado por las rectas AB y BC tal que $\angle APB = \angle BPC$. Sea Q la intersección de la recta PB con el arco AC (que no contiene a B). Observemos que Q es distinto de A y de C, por tanto, Q cumple que $\angle AQC = \angle BQC$. Como $\angle APB = \angle BPC$, se sigue que $\angle APQ = \angle QPC$. De aquí que los triángulos APQ y CPQ son congruentes, pues comparten el lado PQ y los ángulos respectivos sobre este lado son iguales. Concluimos que $AP = PC$. Por tanto P está sobre la mediatriz de AC.



Ahora sea P un punto en el interior de un ángulo de $120°$ determinado por las rectas AB y BC, tal que $\angle APB = \angle BPC$. Observemos que $|\angle APB - \angle BPC| = \angle APC$. Además, $\angle APC = 0$ si y sólo si P está en la recta AC y no en el segmento AC.

Solución del problema 15. Por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, se tiene que:

$$bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(1-a)^2}{4},$$

donde se ha usado que $a+b+c=1$. Luego:

$$a+bc \leq a+\frac{(1-a)^2}{4}=\frac{4a+1-2a+a^2}{4}=\frac{(a+1)^2}{4},$$

de donde $\sqrt{a+bc} \leq \frac{a+1}{2}$.
Análogamente, para los otros sumandos se tiene que $\sqrt{b+ca} \leq \frac{b+1}{2}$ y $\sqrt{c+ab} \leq \frac{c+1}{2}$. Por lo tanto:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq \frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}=\frac{a+b+c+3}{2}=2.$$

Segunda Solución. Usando el hecho de que $a+b+c=1$ tenemos que:

$$a+bc=1-b-c+bc=(1-b)(1-c).$$

Por la desigualdad media geométrica - media aritmética, tenemos que:

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{(1-b)(1-c)} \leq \frac{(1-b)+(1-c)}{2}=\frac{2-b-c}{2}.$$

Análogamente, para los otros dos sumandos tenemos que:

$$\sqrt{b+ca} \leq \frac{2-c-a}{2}, \quad \sqrt{c+ab} \leq \frac{2-a-b}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} &\leq \frac{2-b-c}{2}+\frac{2-c-a}{2}+\frac{2-a-b}{2} \\
&= \frac{6-2(a+b+c)}{2}=2.
\end{aligned}$$

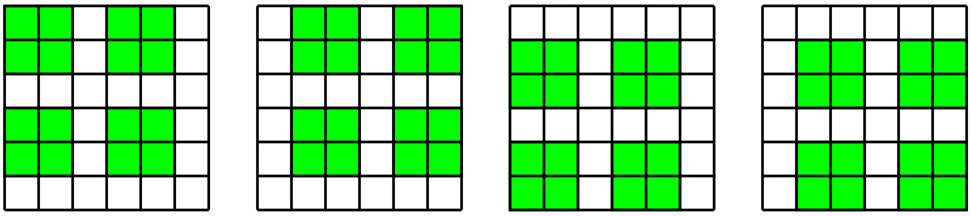
Hay varias variantes de la segunda solución. En ellas, la idea es hacer uso de $a+b+c=1$ y después aplicar la desigualdad media geométrica - media aritmética. Por ejemplo, se puede llegar a cualquiera de las siguientes 3 identidades:

$$\begin{aligned}
a+bc &= a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c), \\
a+bc &= a+b(1-a-b)=(a+b)(1-b), \\
a+bc &= a+(1-a-c)c=(a+c)(1-c),
\end{aligned}$$

y después aplicar la desigualdad media geométrica - media aritmética a cualquiera de ellas.

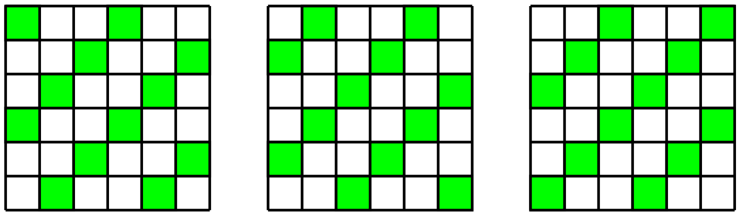
Solución del problema 16. Como $2007_1 = 9$, $2007_2 = 9$ y $2007_3 = 9$, queremos que $m_3+n_3 = 9$. La restricción $m+n = 2007$ implica que $0 < m, n < 2007$. Además, $0 < n_1 \leq 28$ ya que n_1 se maximiza cuando $n = 1999$. Luego, $0 < n_2 \leq 10$, ya que n_2 se maximiza cuando $n_1 = 19$ ó 28. Finalmente, $0 < n_3 \leq 9$. Como al sumar los dígitos de un número se preserva su congruencia módulo 9, tenemos que si $n \equiv r \pmod 9$ con $1 \leq r \leq 9$, entonces $n_3 = r$. Análogamente, si $m \equiv s \pmod 9$ con $1 \leq s \leq 9$, entonces $m_3 = s$. Si $m+n = 2007$, entonces $n_3+m_3 \equiv 0 \pmod 9$. El hecho de que $0 < n_3, m_3 \leq 9$ nos dice que $n_3 + m_3 = 9$ ó 18. Pero $m_3 + n_3 = 18$ si y sólo si $n_3 = m_3 = 9$. Por lo tanto, las parejas que cumplen el problema son $(a, 2007 - a)$ donde a es cualquier entero positivo menor que 2007 que no sea divisible entre 9.

Solución del problema 17. Primero nos fijamos en dónde está la luciérnaga encendida, y usamos alguna de las siguientes cuatro coloraciones de tal manera que la luciérnaga se encuentre en un cuadrado coloreado (lo que siempre es posible porque cada cuadrado está coloreado al menos alguna vez en una de las cuatro coloraciones).



Si nos fijamos en una coloración en particular, al aplicar una movida se cambia de estado una cantidad par de cuadrados coloreados (ya sea cero o dos), por lo que la paridad de luciérnagas encendidas se mantiene invariante en los cuadrados sombreados. Puesto que escogimos una coloración en donde la cantidad de luciérnagas encendidas en los cuadrados coloreados empieza impar, siempre será impar, por lo que no puede ser cero. Y como no puede ser cero en los cuadrados coloreados, no puede ser cero en el total de los cuadrados. Esto completa la demostración.

Segunda Solución. Como en cada movida se cambian tres luciérnagas de estado, tenemos que se cambia una cantidad impar de luciérnagas de estado. Luego, la cantidad total de luciérnagas encendidas cambia de paridad cada movida, y como se empieza con una cantidad impar de luciérnagas encendidas, se necesita una cantidad impar de movidas.
Escojamos una de las siguientes coloraciones, de tal manera que el cuadrado con la luciérnaga encendida no quede coloreado.

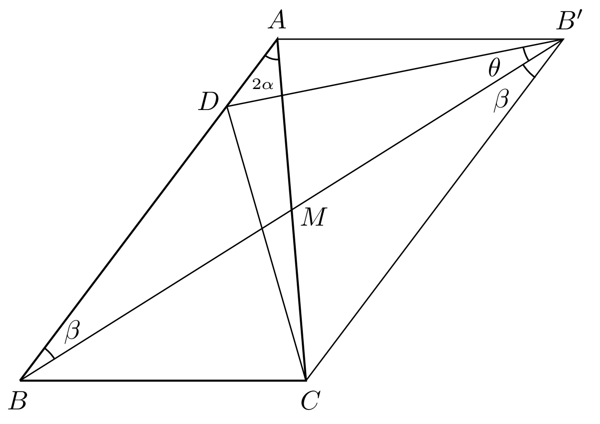


Puesto que en cada movida se cambia de estado exactamente uno de los cuadrados coloreados, la paridad de cuadrados coloreados encendidos cambia cada movida. Como se empieza con una cantidad par de cuadrados coloreados encendidos, entonces sólo al aplicar una cantidad par de movidas la cantidad de cuadrados coloreados encendidos es par (con la posibilidad de ser cero). Por el primer argumento, para que la cantidad de luciérnagas encendidas sea cero, es necesario aplicar una cantidad impar de movidas, y por el segundo argumento es necesario aplicar una cantidad par de movidas, lo cual no es posible. Por lo tanto, no se puede hacer cero la cantidad de luciérnagas encendidas.

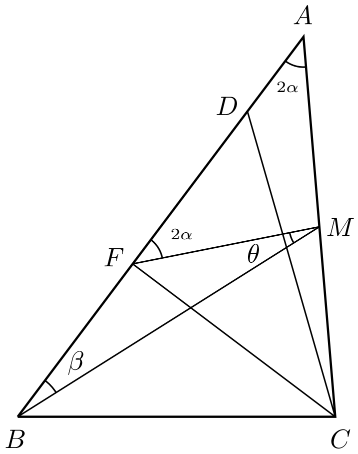
Solución del problema 18. Sea $\angle BAC = 2\alpha$. Prolonguemos el segmento BM hasta un punto B' tal que $BM = MB'$. De este modo tenemos que el cuadrilátero $AB'CD$ es un paralelogramo, de donde se sigue que $B'C = AB$. También sabemos que $DC = BC = AB'$, de modo que el cuadrilátero $ADCB'$ es un trapecio isósceles. De aquí que $DB' = AC$. Por lo tanto, los triángulos $B'CD$ y ABC son congruentes. Se sigue que $\angle DB'C = 2\alpha$. Luego:

$$BD = DB' = AC \Leftrightarrow \angle DB'B = \angle DBB' \Leftrightarrow \angle DB'B = \angle BB'C = \alpha,$$

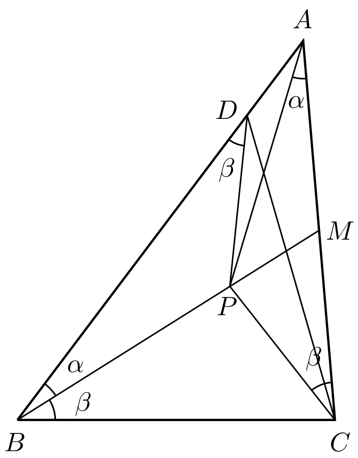
es decir, $BD = AC$ si y sólo si $\angle BAC = 2\angle ABM$.



Segunda Solución. Tracemos primero la altura CF desde C. Sean $2\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABM$ y $\theta = \angle FMB$. Como el triángulo CFA es rectángulo, tenemos que $FM = \frac{AC}{2}$. Además, también tenemos que $\angle MFA = 2\alpha$. Por otro lado, como el ángulo MFA es exterior al triángulo MFB tenemos que $\beta + \theta = 2\alpha$. Por lo tanto, $BD = AC \Leftrightarrow BF = FM \Leftrightarrow \beta = \theta \Leftrightarrow \beta = \alpha$.



Tercera Solución. Sea P un punto sobre BM tal que $\angle PAM = \angle MBA = \alpha$. Los triángulos MAP y MBA comparten el ángulo BMA y por construcción $\angle PAM = \angle MBA$, de modo que son triángulos semejantes. Luego, $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MA}$. Como $MA = CM$, tenemos que $\frac{CM}{MP} = \frac{MB}{CM}$. Luego, los triángulos MCP y MBC tienen lados proporcionales y comparten el ángulo CMB, de modo que también son semejantes. Por lo tanto, $\angle MCP = \angle MBC = \beta$.

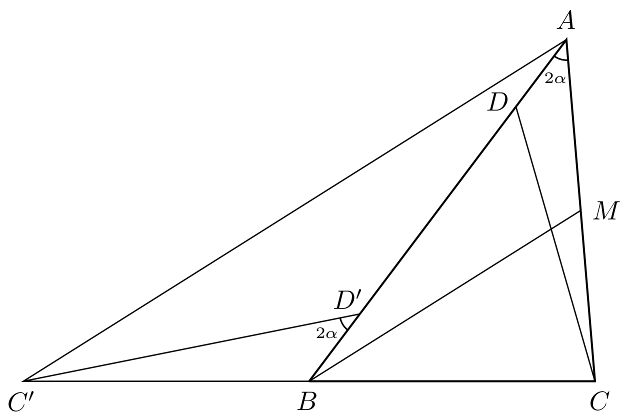


Ahora, observemos que $\angle APC = 180° - (\alpha + \beta)$ y como $\alpha + \beta = \angle ABC =$

$\angle CDB$, tenemos que $\angle ADC = 180° - (\alpha + \beta) = \angle APC$. Luego, el cuadrilátero $CPDA$ es cíclico. Esto implica que $\angle PDB = \angle PCA = \beta$, de modo que los triángulos CPA y DPB son semejantes. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} BD = AC \quad &\Leftrightarrow \quad \triangle CPA \cong \triangle DPB \Leftrightarrow PA = PB \\ &\Leftrightarrow \quad \angle PAB = \angle PBA = \angle PAC \Leftrightarrow \angle BAC = 2\angle MBA. \end{aligned}$$

Cuarta Solución. Sea C' el punto donde la paralela a MB por A intersecta a la recta BC, y sea D' el punto sobre el lado AB tal que $AD' = BD$. Observemos que $C'B = BC = CD$ y que $BD' = AD$. Además, como el triángulo BCD es isósceles tenemos que $\angle C'BD' = \angle ADC$. Con esto, obtenemos que el triángulo $C'BD'$ es congruente al triángulo CDA, de donde se sigue que $C'D' = AC$. Denotemos por 2α a los ángulos DAC y $C'D'B$.



Supongamos primero que $BD = AC$, es decir, $AD' = AC$. Entonces, $C'D' = AD'$ y de aquí obtenemos que $\angle AC'D' = \angle C'AD'$. Además, como $\angle AC'D' + \angle C'AD' = \angle C'D'B = 2\alpha$ obtenemos que $\angle C'AD' = \alpha$. Como $C'A$ y BM son paralelas, concluimos que $\angle ABM = \angle C'AD' = \alpha$.

Ahora, supongamos que $\angle ABM = \alpha$. Entonces se sigue que $\angle C'AD' = \alpha$. Como $\angle AC'D' + \angle C'AD' = \angle AC'D' + \alpha = \angle C'D'B = 2\alpha$, tenemos que $\angle AC'D' = \alpha$, es decir, el triángulo $AC'D'$ es isósceles. De aquí obtenemos que $AD' = C'D' = AC$, y como $AD' = BD$, se sigue que $BD = AC$.

Capítulo 4

Soluciones de las Olimpiadas Internacionales

4.1. XIX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Solución del problema 1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que S contiene sólo enteros positivos. Sea:

$$S = \{2^{a_i}3^{b_i} | a_i, b_i \in \mathbb{Z}, \ \ a_i, b_i \geq 0, \ \ 1 \leq i \leq 9\}.$$

Es suficiente demostrar que existen enteros i_1, i_2, i_3 con $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 9$, tales que:

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} \equiv b_{i_1} + b_{i_2} + b_{i_3} \equiv 0 \pmod 3.$$

Para $n = 2^a 3^b \in S$, diremos que $(a \pmod 3), b \pmod 3)$ es el *tipo* de n. Claramente hay 9 posibles tipos:

$$(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2).$$

Sea $N(i,j)$ el número de enteros en S de tipo (i,j). Obtenemos 3 enteros distintos cuyo producto es un cubo perfecto cuando:

1. $N(i,j) \geq 3$ para algunos i, j, o
2. $N(i,0)N(i,1)N(i,2) \neq 0$ para algún $i = 0, 1, 2$, o

3. $N(0,j)N(1,j)N(2,j) \neq 0$ para algún $j = 0, 1, 2$, o

4. $N(i_1, j_1)N(i_2, j_2)N(i_3, j_3) \neq 0$, donde $\{i_1, i_2, i_3\} = \{j_1, j_2, j_3\} = \{0, 1, 2\}$.

Supongamos que ninguna de las condiciones 1 a 3 se cumple. Ya que $N(i,j) \leq 2$ para todo (i,j), tenemos al menos cinco $N(i,j)$'s distintas de cero. Además, de entre las $N(i,j)$'s que no son cero, no hay tres que tengan la misma i ni la misma j. Usando esto, es fácil concluir que la condición 4 se debe cumplir. (Por ejemplo, si uno escribe cada $N(i,j)$ distinta de cero en la posición (i,j) de una cuadrícula de 3×3 (renglón i, columna j) cuyos renglones y columnas están numerados con 0, 1 y 2, entonces podemos encontrar tres casillas, ocupadas por al menos una $N(i,j)$ distinta de cero, cuyos renglones y columnas de tales tres casillas son todas distintas. Esto implica 4).

Segunda Solución. Como en la primera solución, tenemos 9 posibles tipos para $n = 2^a 3^b \in S$.
Notemos que:

1. Entre cualesquiera 5 enteros, hay 3 cuya suma es múltiplo de 3.

2. Si $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$, entonces $i + j + k \equiv 0 \pmod 3$ si y sólo si $i = j = k$ o $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$.

Sean T el conjunto de tipos de enteros en S; $N(i)$ el número de enteros en S de tipo $(i, \cdot)$; y $M(i)$ el número de enteros $j \in \{0, 1, 2\}$ tales que $(i, j) \in T$.
Si $N(i) \geq 5$ para algún i, el resultado se sigue de 1. Si no, para alguna permutación (i, j, k) de $(0, 1, 2)$, tenemos que $N(i) \geq 3$, $N(j) \geq 3$ y $N(k) \geq 1$. Si $M(i)$ o $M(j)$ es 1 o 3, el resultado se sigue de 2. Si no, entonces $M(i) = M(j) = 2$. Luego, o bien $(i,x), (i,y), (j,x), (j,y) \in T$ o bien $(i,x), (i,y), (j,x), (j,z) \in T$ para alguna permutación (x, y, z) de $(0, 1, 2)$. Como $N(k) \geq 1$, al menos uno de $(k,x), (k,y)$ y (k,z) está contenido en T. Por lo tanto, en cualquier caso, el resultado se sigue de 2. (Por ejemplo, si $(k, y) \in T$, entonces tomamos $(i,y), (j,y), (k,y)$ o $(i,x), (j,z), (k,y)$ de T).

Solución del problema 2. Sea D el punto de intersección de las rectas AH y BC. Sea K el punto de intersección del circuncírculo O del triángulo ABC con la recta AH. Consideremos la recta por I perpendicular a BC y supongamos que intersecta a BC y al menor de los dos arcos entre B y C (del circuncírculo O) en los puntos E y N, respectivamente. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\angle BIC &= 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \\ &= 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = 120°\end{aligned}$$

y también $\angle BNC = 180° - \angle BAC = 120° = \angle BIC$. Como IN y BC son perpendiculares, el cuadrilátero $BICN$ es un trapezoide y por lo tanto $IE = EN$. Ahora, ya que H es el ortocentro del triángulo ABC, tenemos que $HD = DK$. También, como $ED \perp IN$ y $ED \perp HK$, tenemos que $IHKN$ es un trapecio isósceles con $IH = NK$. Luego, $\angle AHI = 180° - \angle IHK = 180° - \angle AKN = \angle ABN$. Como $IE = EN$ y $BE \perp IN$, los triángulos IBE y NBE son congruentes. Luego, $\angle NBE = \angle IBE = \angle IBC = \angle IBA = \frac{1}{2}\angle ABC$ y por lo tanto $\angle AHI = \angle ABN = \frac{3}{2}\angle ABC$.

Segunda Solución. Sean P, Q y R los puntos de intersección de BH, CH y AH con AC, AB y BC, respectivamente. Entonces, $\angle IBH = \angle ICH$. En efecto:

$$\angle IBH = \angle ABP - \angle ABI = 30° - \frac{1}{2}\angle ABC$$

y

$$\angle ICH = \angle ACI - \angle ACH = \frac{1}{2}\angle ACB - 30° = 30° - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

ya que $\angle ABH = \angle ACH = 30°$ y $\angle ACB + \angle ABC = 120°$. (Note que $\angle ABP > \angle ABI$ y $\angle ACI > \angle ACH$ porque AB es el lado mayor del triángulo ABC bajo las condiciones dadas). Por lo tanto, $BIHC$ es un cuadrilátero cíclico, de modo que $\angle BHI = \angle BCI = \frac{1}{2}\angle ACB$.
Por otra parte:

$$\angle BHR = 90° - \angle HBR = 90° - (\angle ABC - \angle ABH) = 120° - \angle ABC.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\angle AHI &= 180° - \angle BHI - \angle BHR = 60° - \frac{1}{2}\angle ACB + \angle ABC \\ &= 60° - \frac{1}{2}(120° - \angle ABC) + \angle ABC = \frac{3}{2}\angle ABC.\end{aligned}$$

Solución del problema 3. La respuesta es $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
Diremos que un conjunto de n discos que satisface las condiciones del problema es una n-*configuración*. Para una n-configuración $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$, sea $S_{\mathcal{C}} = \{(i,j) | C_i \text{ contiene propiamente a } C_j\}$. Luego, el resultado de una n-configuración $\mathcal{C}$ es $|S_{\mathcal{C}}|$.
Demostraremos que:
(i) Hay una n-configuración $\mathcal{C}$ para la cual $|S_{\mathcal{C}}| = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

(ii) $|S_{\mathcal{C}}| \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ para cualquier n-configuración $\mathcal{C}$.

Sea C_1 cualquier disco. Entonces, para $i = 2, \ldots, n-1$, tomemos C_i dentro de C_{i-1} de tal manera que la circunferencia de C_i contenga el centro de C_{i-1}. Finalmente, sea C_n un disco cuyo centro está sobre la circunferencia de C_1 y cuya circunferencia contenga el centro de C_{n-1}. Esto implica que el número de elementos de $S_{\mathcal{C}} = \{(i,j) | 1 \leq i < j \leq n-1\}$ es $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, lo que prueba (i). Para cualquier n-configuración $\mathcal{C}$, $S_{\mathcal{C}}$ debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $(i,i) \notin S_{\mathcal{C}}$.
2. $(i+1,i) \notin S_{\mathcal{C}}$, $(1,n) \notin S_{\mathcal{C}}$.
3. Si $(i,j),(j,k) \in S_{\mathcal{C}}$, entonces $(i,k) \in S_{\mathcal{C}}$.
4. Si $(i,j) \in S_{\mathcal{C}}$, entonces $(j,i) \notin S_{\mathcal{C}}$.

Demostraremos que un conjunto G de parejas ordenadas de enteros entre 1 y n que satisface las condiciones 1 a 4, no puede tener más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ elementos. En efecto, supongamos que hay un conjunto G que satisface las condiciones 1 a 4 y que tiene más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ elementos. Sea n el menor entero positivo para el cual existe tal conjunto G. Notemos que G debe contener a la pareja $(i,i+1)$ para algún $1 \leq i \leq n$ o a la pareja $(n,1)$, ya que de no ser así G tendría a lo más:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

elementos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(n,1) \in G$. Entonces $(1,n-1) \notin G$, ya que de no ser así la condición (3) implicaría que $(n,n-1) \in G$ lo cual contradice la condición (2). Ahora, sea $G' = \{(i,j) \in G | 1 \leq i,j \leq n-1\}$. Entonces, G' satisface las condiciones 1 a 4, con $n-1$.
Afirmamos que $|G-G'| \leq n-2$. En efecto, supongamos que $|G-G'| > n-2$. Entonces $|G-G'| = n-1$, de modo que para cada $1 \leq i \leq n-1$, alguno de (i,n) o (n,i) está en G. Como $(n,1) \in G$ y $(n-1,n) \in G$ (porque $(n,n-1) \notin G$), se sigue que $(n,n-2) \notin G$ y $(n-2,n) \in G$. Continuando este proceso, tenemos que $(1,n) \in G$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $|G-G'| \leq n-2$ y de aquí tenemos que:

$$|G'| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Esto contradice la minimalidad de n y con esto queda demostrado (ii).

Solución del problema 4. Sea $S=\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}$.
Notemos primero que:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} &= \frac{x^2-x(y+z)+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\\ &= \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}\\ &\geq \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}.\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} &\geq \frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2},\\ \frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} &\geq \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.\end{aligned}$$

Sumando las tres desigualdades anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned}S &\geq \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\\ &= \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta demostrar que:

$$\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 0.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x\geq y\geq z$. Entonces:

$$\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geq 0$$

y

$$\begin{aligned}\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} &= \frac{(y-z)(x-z)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\\ &\geq \frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}.\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que:

$$(y-z)(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right)\geq 0,$$

ya que $y^2(z+x)=y^2z+y^2x\geq yz^2+z^2x=z^2(x+y)$.
Esto completa la demostración.

Segunda Solución. Sea S como en la primera solución. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right)\times$$
$$\times\ (\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)})\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=1,$$

y

$$\left(\frac{yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right)\times$$
$$\times\ (\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)})\geq\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2.$$

Sumando las dos desigualdades, tenemos que:

$$\begin{aligned}S\times(\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}) &\geq 1+\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2\\ &\geq 2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, será suficiente demostrar que:

$$2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}).$$

Aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica, tenemos que:

$$\left[\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\right]^2\geq 4\sqrt{\frac{yz}{x}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)=2(y+z),$$

o equivalentemente:

$$\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)}.$$

Análogamente, tenemos que:

$$\sqrt{\frac{zx}{y}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}\right)\geq\sqrt{2(z+x)},$$

$$\sqrt{\frac{xy}{z}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}\right)\geq\sqrt{2(x+y)}.$$

Finalmente, sumando las últimas tres desigualdades se sigue que:

$$2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{xz}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)},$$

lo que completa la demostración.

Solución del problema 5. Consideremos las siguientes *primeras etiquetas* de las 25 posiciones de los focos:

1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Para cada combinación de encendido-apagado de los focos en el arreglo, definimos su *primer valor* como la suma de las primeras etiquetas de aquellas posiciones en las cuales los focos están encendidos. Es fácil verificar que al apagar o encender cualquier apagador, siempre se obtiene una combinación de encendido-apagado de focos cuyo primer valor tiene la misma paridad (el residuo cuando se divide entre 2) que el primer valor de la combinación anterior de encendido-apagado.

Al rotar 90° las primeras etiquetas, obtenemos otro arreglo de etiquetas (que llamaremos *segundas etiquetas*) las cuales también hacen que la paridad del *segundo valor* (la suma de las segundas etiquetas de aquellas posiciones en las que los focos están encendidos) quede invariante bajo encendido-apagado.

1	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	0	1

Como la paridad de los primeros valores y segundos valores al inicio es cero, después de cierto número de encendidos y apagados la paridad debe permanecer inalterada con respecto a las primeras etiquetas y segundas etiquetas también. Por lo tanto, si exactamente un foco está encendido después de varios encedidos y apagados, la etiqueta de esa posición debe ser 0 con respecto a ambas etiquetas. Luego, de acuerdo con los arreglos anteriores, las posibles posiciones son aquellas marcadas con $*_i$ $(i = 0, 1, 2, 3$ o $4)$ en el siguiente arreglo.

	$*_2$		$*_1$	
		$*_0$		
	$*_3$		$*_4$	

Demostraremos ahora que cada una de las cinco posiciones anteriores es posible. En efecto, al cambiar las posiciones marcadas con t en el siguiente arreglo (el orden encendido-apagado es irrelevante), tenemos que el centro $(*_0)$ es la única posición con foco encendido.

			t	t
		t		
	t	t		t
t				t
t		t	t	

Y al cambiar las posiciones marcadas con t en el siguiente arreglo, la posición $*_1$ es la única con foco encendido.

	t		t	
t	t		t	t
	t			
		t	t	t
			t	

El resto de las $*_i$'s se pueden obtener rotando el arreglo anterior apropiadamente.

4.2. IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe

Solución del problema 1. Sea $a(n)$ el año en que se realiza la n-ésima olimpiada. Entonces, tenemos que $a(n) = 1998+n$ por lo que n divide a $a(n)$ si y sólo si

n divide a 1998. Por lo tanto, los n que cumplen con la condición son los divisores positivos de 1998. Como $1998 = 2{\cdot}3^3{\cdot}37$, se tienen $(1{+}1)(3{+}1)(1{+}1) = 16$ valores posibles de $n : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999$ y 1998.

Solución del problema 2. Supongamos que hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilátero $ADPE$ y sea O su centro. Como O está en la recta AP y PO es bisectriz del ángulo DPE, tenemos que los triángulos APD y APE son congruentes. Luego, $\angle BPA = 180° - \angle DPA = 180° - \angle EPA = \angle CPA$. Además, como los triángulos APB y APC comparten el lado AP, y $\angle BAP = \angle CAP$ por ser AP bisectriz de $\angle DAE$, se sigue que son congruentes y por lo tanto, $AB = AC$.
Supongamos ahora que $AB = AC$. Sea F el punto de intersección de AP con BC. Como F es el punto medio de BC (porque ABC es isósceles y AF es bisectriz) y AF también es altura del triángulo ABC, los triángulos PCF y PBF son congruentes y por lo tanto $\angle APD = \angle BPF = \angle CPF = \angle APE$. De aquí que los triángulos APD y APE son congruentes, de modo que $AE + DP = AD + EP$. Es decir, hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilátero $ADPE$ (ver teorema 45 del apéndice).

Solución del problema 3. Demostraremos que el máximo número de elementos que puede tener S es 3. Sea $S = \{-1, 0, 1\}$. Mostraremos que S cumple la propiedad pedida. Para ello, notemos que el polinomio $x^2 + 0x - 1$ tiene coeficientes en S y raíces $-1, 1$; el polinomio $x^2 - x + 0$ tiene coeficientes en S y raíces $0, 1$; y el polinomio $x^2 + x + 0$ tiene coeficientes en S y raíces $-1, 0$. Esto prueba que el conjunto S cumple la condición.
Demostraremos ahora que todo conjunto S que cumple la condición, no puede tener más de 3 elementos. Supongamos, por contradicción, que hay un conjunto S que cumple la condición y que tiene al menos cuatro elementos.
Supongamos que S tiene al menos dos elementos con valor absoluto mayor que 1. Sean r y s los dos elementos con mayor valor absoluto en S con $|r| \geq |s| > 1$. Según la condición del problema, existen a, b y c en S, con $a \neq 0$, tales que el polinomio $ax^2 + bx + c$ tiene raíces r, s. Entonces, $rs = \frac{c}{a}$ de donde $|c| = |r||s||a| \geq |r|(|s| + |a|) > 2|r| > |r|$, lo que contradice que r y s son los elementos con mayor valor absoluto en S. Por lo tanto, S tiene a lo más un elemento con valor absoluto mayor que 1. Luego, S tiene a lo más cuatro elementos, siendo estos $-1, 0, 1, n$ para algún entero n con $|n| > 1$. Si $n > 0$, el coeficiente $-1 - n$ del término lineal en el polinomio que tiene raíces 1 y n, no pertenece a S. Análogamente, si $n < 0$ el coeficiente $1 - n$ del término lineal en el polinomio que tiene raíces -1 y n, no pertenece a S. Por lo tanto, S tiene a lo más tres elementos y queda demostrado el problema.

Solución del problema 4. Veamos primero que a partir de una letra dada podemos producir cualquiera de las otras letras:

$$\begin{aligned}
&a \to bc \to cdc \to d\\
&b \to cd \to ded \to e\\
&c \to de \to efe \to f\\
&d \to ef \to fgf \to g\\
&e \to fg \to gag \to a\\
&f \to ga \to aba \to b\\
&g \to ab \to bcb \to c.
\end{aligned}$$

Consideremos dos palabras cualesquiera, nos fijamos en la que tiene menos letras y le aplicamos la primera regla repetidamente hasta que tenga el mismo número de letras que la segunda palabra (si ambas palabras tienen el mismo número de letras, no hacemos nada). Finalmente, cambiamos letra por letra. Por ejemplo, como a produce a b, tenemos que $***a***$ produce a $***b***$ (donde $*$ es cualquier letra). De esta forma cada palabra P produce cualquier palabra que tenga por lo menos la misma cantidad de letras que P. Falta demostrar que cada palabra P produce cualquier palabra con menos letras que P. En efecto, ya que una letra dada produce a cualquiera de las otras, tenemos que cualquier palabra de n letras produce a la palabra formada por n letras a. Supongamos que P es una palabra con n letras y sea Q la palabra de n letras a producida por P. Si n es impar, aplicamos la segunda regla a Q hasta producir la palabra formada por una sola a, y por lo demostrado antes, esta palabra de una sóla letra produce cualquier palabra. Si n es par, entonces eliminamos letras de Q de dos en dos aplicando la segunda regla, para producir la palabra aa. Luego, por lo demostrado antes, podemos producir la palabra ga a partir de la palabra aa, y de aquí producimos la palabra a como sigue:

$$aa \to \cdots \to ga \to aba \to b \to \cdots \to a,$$

y nuevamente a partir de a podemos producir cualquier palabra.

Solución del problema 5. Notemos que si el número termina en 0, entonces el producto de sus dígitos es también 0 y por lo tanto cumple la condición de terminar en el producto de sus dígitos. De esta forma, todos los números de tres dígitos que terminan en 0 cumplen. De éstos hay 90.

Supongamos ahora que el número buscado es de la forma $\overline{abc}$, con $c \neq 0$. Queremos que $abc = c$ o que $abc = \overline{bc}$.

En el primer caso, podemos cancelar c en ambos lados (ya que $c \neq 0$) para

obtener $ab = 1$, de donde $a = b = 1$. En total hay diez números de tres dígitos con $a = b = 1$, pero uno de ellos ya fue contado (el 110), por lo que solamente se agregan 9 posibles números que cumplen la condición.
En el segundo caso, tenemos que $abc = 10b+c$ de donde $a \neq 0$, $b \neq 0$ y b divide a $10b + c$, lo que implica que b divide a c. Análogamente, se tiene que c divide a $10b$. Luego, las posibles parejas (b, c) son $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(4, 8)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$, $(7, 7)$, $(8, 8)$, $(9, 9)$. De estas parejas, los únicos números que se pueden construir según las condiciones del problema son 612, 315, 324 y 236. De esta forma se obtienen 4 posibilidades más.
Por lo tanto, el número total de números de tres dígitos que terminan en el producto de sus dígitos es $90 + 9 + 4 = 103$.

Solución del problema 6. Como el triángulo AMG es rectángulo, tenemos que C es su circuncentro, por lo que $CA = CG$. Por simetría, si E es la intersección de BG con S, tenemos que $EG = BE = AC$. Como AG y BD son paraleas y M es punto medio de AB, tenemos que los triángulos rectángulos AMG y BMD son congruentes, por lo que $AG = BD$, y por simetría $AG = BG$. Así, $BD = BG$. Si F es la intersección de AG con BP, usando nuevamente el paralelismo anterior tenemos que $\angle BGF = \angle DBE$, y como $\angle FBG = \angle BDE$ (por subtender el mismo arco) tenemos que los triángulos BDE y BGF son congruentes, de donde $GF = BE$. Por lo tanto, en el triángulo ABP tenemos que G es un punto sobre la mediana PM tal que $AG = 2GF$. Demostraremos que esta igualdad implica que G es el punto donde concurren las medianas del triángulo ABP. Una manera de argumentarlo es por contradicción, suponiendo que G' (distinto de G) ubicado sobre PM y tal que $AG' = 2G'F'$ es el punto donde concurren las medianas del triángulo ABP, donde F' es la intersección de AG' con BP. Entonces, por el recíproco del Teorema de Thales, tenemos que GG' y FF' son paralelas, es decir, MP y BP son paralelas, lo que es una contradicción. Otra manera de argumentarlo es aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ABF con los puntos alineados P, G y M:

$$1 = \frac{BP}{PF} \cdot \frac{FG}{GA} \cdot \frac{AM}{MB} = \frac{BP}{2PF},$$

de donde se sigue que F es el punto medio de BP y de ahí el resultado.

4.3. XXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Solución del problema 1. Si m es par, entonces el primer entero que aparece en la sucesión sería a_1. Luego, m es impar. Es claro que todo entero impar se puede escribir en la forma $2^k(2q+1)+1$ con k y q enteros no negativos. Demostraremos que si $m = 2^k(2q+1)+1$, entonces el primer entero en la secuencia es a_{k+1}. Si $k=0$, m sería par y a_1 es entero. Si $k=1$, entonces $a_1 = 2q+1+\frac{1}{2}$ y $\lceil a_1 \rceil = 2q+2$, por lo que $a_2 = (2q+1+\frac{1}{2})(2q+2)$ que claramente es entero. Veamos ahora que si $a_i = \frac{2^k(2q+1)+1}{2}$ con $k \geq 1$, entonces a_{i+1} es de la forma $\frac{2^{k-1}(2n+1)+1}{2}$ para algún entero $n > 0$. En efecto, ya que $a_i = \frac{2^k(2q+1)+1}{2} = 2^{k-1}(2q+1)+\frac{1}{2}$ tenemos que $\lceil a_i \rceil = 2^{k-1}(2q+1)+1$, de donde:

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \left(\frac{2^k(2q+1)+1}{2}\right)(2^{k-1}(2q+1)+1) \\ &= \frac{2^{2k-1}(2q+1)^2+2^k(2q+1)+2^{k-1}(2q+1)+1}{2} \\ &= \frac{2^{k-1}(2n+1)+1}{2}, \end{aligned}$$

donde $n = 2q+1+2(2q+1)+2^k(2q+1)^2$. Luego, al aumentar de 1 en 1 el subíndice de a_i, va disminuyendo de 1 en 1 el exponente de la potencia de 2 que aparece en el numerador en el número resultante. Por lo tanto, si empezamos en $a_1 = \frac{2^k(2q+1)+1}{2}$, el número a_{k+1} será de la forma $\frac{2^0(2r+1)+1}{2}$, que es claramente el primer entero en la secuencia. Finalmente, como m es impar y queremos que el número a_{2007} sea el primer entero en la secuencia, entonces $m = 2^{2006}(2q+1)+1$ con q un entero no negativo.

Solución del problema 2. Sean $X_5 \neq X_4$ y $X_6 \neq X_1$ los puntos de intersección de Γ con AC y AB, respectivamente. Sean, además, Q el punto de intersección de X_3X_6 con X_2X_5, r el radio del incírculo del triángulo ABC, R el radio de Γ y P_1, P_2 y P_3 los puntos de tangencia del incírculo con AB, BC y AC, respectivamente. Aplicando el Teorema de Pitágoras, tenemos que $X_6P_1 = X_1P_1 = X_2P_2 = X_3P_2 = X_4P_3 = X_5P_3 = \sqrt{R^2-r^2}$. Como $BP_1 = BP_2$, $CP_2 = CP_3$ y $AP_3 = AP_1$ tenemos que $BX_6 = BX_3$, $BX_1 = BX_2$, $CX_2 = CX_5$, $CX_3 = CX_4$, $AX_1 = AX_4$ y $AX_6 = AX_5$. Luego, X_6X_3 es paralela a X_1X_2, X_2X_5 es paralela a X_4X_3 y X_6X_5 es paralela a X_1X_4. De aquí que QX_3KX_2 es un paralelogramo y por lo tanto QK biseca a X_2X_3. Los triángulos X_6X_5Q y X_1X_4K tienen sus lados paralelos dos a dos, por lo que son homotéticos. Luego, X_1 y X_6 son vértices homólogos, así como también lo son X_4 y X_5. Por lo tanto, el centro de homotecia es A. Luego, los puntos A, Q y K son colineales (ver Teorema 41 del Apéndice), por lo que AK biseca al segmento X_2X_3.

Solución del problema 3. Un determinado equipo controla un punto P del círculo (P distinto del centro) si y sólo si controla todos los puntos del radio del círculo al que pertenece P. Por lo tanto, el problema se reduce a controlar los puntos de la circunferencia F. De aquí en adelante, *arco* significa arco de la circunferencia F sin incluir a los extremos.

Supongamos que tenemos k banderas fijadas. Éstas descomponen a F en k arcos disjuntos, teniendo cada arco una bandera en cada extremo. Un arco delimitado por banderas azules es un *arco azul* y un arco delimitado por banderas blancas es un *arco blanco*. Si las banderas son de distinto color, se dice que el arco es *neutro*.

Un arco es azul (respectivamente blanco) si y sólo si está controlado por A (respectivamente por B). En un arco neutro, la mitad es controlado por A y la otra mitad por B. Luego, para determinar quién gana o si hay empate, no nos interesan los arcos neutros.

Si una nueva bandera ocupa un punto de uno de esos k arcos, digamos el arco α, diremos que la nueva bandera *separa* las banderas limítrofes de α. Si α tiene color distinto al de la nueva bandera, ésta descompone a α en dos arcos neutros, y diremos entonces que la bandera *neutraliza* a α.

Lema. En una configuración de $a + b$ banderas, con a azules y b blancas, y r_A, r_B el número de arcos azules y blancos, respectivamente, se tiene que $r_A - r_B = a - b$.

Así, en el transcurrir del juego, cada jugada de A deja a B una configuración con por lo menos un arco azul. Luego, cada vez que juega B, puede neutralizar un arco azul. La neutralización sistemática conduce al empate. Para lograr que B gane, después de colocar la primera bandera azul, construimos un n-ágono regular inscrito en F que tenga esa bandera como vértice. Denotaremos con V a un vértice de dicho n-ágono. Estos vértices V determinan n arcos disjuntos iguales, a los que llamaremos arcos "grandes" y los denotaremos por G. A continuación presentamos una estrategia para B:

1. B va colocando sus banderas en vértices V, hasta que no haya más vértices V disponibles.
2. Después, B neutraliza un arco azul en cada jugada, dando prioridad a los arcos G, hasta quedarse con sólo una bandera disponible.
3. La última bandera blanca es colocada en posición, es decir, para ganar.

Si al final del primer paso hay w vértices V azules, entonces hay $n - w$ vértices V blancos y a lo más $w - 1$ arcos G azules, de modo que B tiene w banderas disponibles. Por lo tanto, en el paso 2, B neutraliza todos los arcos G azules. (El argumento contempla el caso $w = 1$, en el cual el paso 2 no existe). En el paso 2, B no crea nuevos arcos blancos.

Cuando B coloca su última bandera, hay por lo menos un arco G, pero ninguno

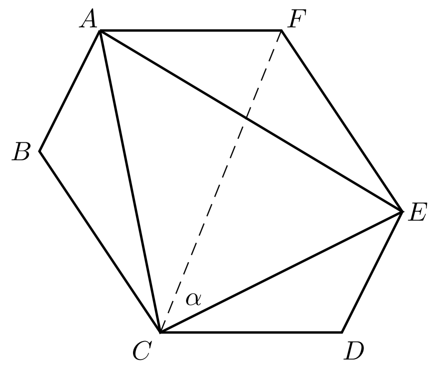
de ellos es azul. Luego, el número de arcos azules excede en uno al de arcos blancos y todos los arcos blancos son arcos G. Tenemos dos casos a considerar:
Caso 1. *Existe un arco G blanco.* B coloca la última bandera blanca, de modo que neutraliza un arco azul y gana.
Caso 2. *No existe un arco G blanco.* Por lo tanto, no existe un arco blanco, de donde se sigue que existe un sólo arco azul que no es un arco G, y existe por lo menos un arco G neutro. Entonces, B coloca la última bandera blanca en un arco G neutro, que no es de A, de modo que crea un arco blanco de mayor tamaño al del único arco azul existente y gana.

Solución del problema 4. Identificamos las casillas con pares (i, j) de enteros con $0 \leq i, j < n$. Un salto de (i, j) a (i', j') será *horizontal* (respectivamente *vertical*) si $|i - i'| = 4$ (respectivamente $|j - j'| = 4$).
El dragón parte de $(0, 0)$ y da s saltos, llegando a la casilla (x, y). Escribimos $s = h + v$ donde h es el número de saltos horizontales y v es el número de saltos verticales. Entonces, $x = 4h' + v'$, $y = 4v'' + h''$ donde $|h'|, |h''| \leq h$, $|v'|, |v''| \leq v$, h, h', h'' tienen la misma paridad y v, v', v'' tienen la misma paridad.
Veamos que se puede llegar de C a V en 8 saltos: $(0, 0) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (8, 0) \rightarrow (7, 4) \rightarrow (6, 8) \rightarrow (2, 7) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (5, 2) \rightarrow (1, 1)$. Demostraremos que existen casillas que distan más de 8 saltos de C. En efecto, consideremos la casilla $(17, 18)$ (existen 4 casillas elegibles: $(15, 18)$, $(18, 15)$, $(18, 17)$ y $(17, 18)$) y supongamos que $4h' + v' = 17$, $4v'' + h'' = 18$ y $h + v \leq 8$. Las $h's$ son pares y las $v's$ son impares, de modo que $h' = 4$ y $v' = 1$. Luego, $h \geq 4$ y $v \leq 3$ de donde $v'' = 3$ y $h'' = 6$. Por lo tanto, $h + v \geq 9$ que es una contradicción. Luego, la casilla $X = (17, 18)$ dista más de 8 saltos de C. Por lo tanto, la distancia dragoniana de C a V es a lo más 8 y la distancia dragoniana de C a X es al menos 9, lo que completa la demostración.

Solución del problema 5. Sea n un número atresvido. Denotaremos por $\omega(n)$ al número de divisores primos distintos de n, $\Omega(n)$ al número de divisores primos de n contando repeticiones, y $S(n)$ a la suma de los divisores de n. Como n es atresvido, sus divisores se pueden dividir en tres subconjuntos cuya suma de elementos de cada subconjunto es igual a $\frac{S(n)}{3}$. Como n pertenece a alguno de estos subconjuntos, tenemos que $n \leq \frac{S(n)}{3}$, es decir, $S(n) \geq 3n$. Además, el número de divisores de n es mayor o igual a $2^{\omega(n)}$.
Observemos que el número $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, cuyo número de divisores es 16, es un número atresvido. En efecto, basta considerar la siguiente partición de los divisores de 120: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 24, 30\}$, $\{20, 40, 60\}$ y $\{120\}$. Demostraremos que no existen números atresvidos con menos de 16 divisores.

Supongamos que n es un número atresvido con menos de 16 divisores. Entonces, $2^{\omega(n)} < 16$, es decir, $\omega(n) = 1, 2$ ó 3.
Si $\omega(n) = 1$, entonces existe algún primo p tal que $n = p^a$ para algún entero $a \geq 1$. Luego, $S(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \geq 3p^a = 3n$ implica que $\frac{p^{a+1}}{p-1} > 3p^a$, es decir, $\frac{p}{p-1} > 3$ de donde $2p < 3$ lo cual es imposible.
Si $\omega(n) = 2$, entonces $n = p^a q^b$ con a y b enteros positivos y p, q números primos. Luego, $S(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{b+1}-1}{q-1} \geq 3p^a q^b = 3n$ implica que $\frac{p^{a+1}}{p-1} \cdot \frac{q^{b+1}}{q-1} > 3p^a q^b$, es decir, $\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} > 3$. Suponiendo que $p < q$ tenemos que $p \geq 2$ y $q \geq 3$, de donde $\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \leq \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$ lo que contradice la desigualdad anterior.
Si $\omega(n) = 3$, entonces $n = p^a q^b r^c$ con a, b y c enteros positivos y p, q y r números primos. Para que $\Omega(n) < 16$ debemos tener que $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ o $(a, b, c) = (2, 1, 1)$, salvo permutación de los exponentes. Si $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, entonces $n = pqr$. Luego, $S(n) = (p + 1)(q + 1)(r + 1) \geq 3pqr$ implica que $\frac{p+1}{p} \cdot \frac{q+1}{q} \cdot \frac{r+1}{r} \geq 3$. Suponiendo que $p < q < r$, tenemos que $p \geq 2$, $q \geq 3$ y $r \geq 5$ de modo que $\frac{p+1}{p} \cdot \frac{q+1}{q} \cdot \frac{r+1}{r} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} < 3$ lo que contradice la desigualdad anterior. Ahora si $(a, b, c) = (2, 1, 1)$, entonces $n = p^2 qr$. Luego, $S(n) = (p^2 + p + 1)(q + 1)(r + 1) \geq 3p^2 qr$ implica que $\frac{q+1}{q} \cdot \frac{r+1}{r} \geq \frac{3p^2}{p^2+p+1}$. Suponiendo que $q < r$, tenemos que $q \geq 2$ y $r \geq 3$. Entonces, $\frac{q+1}{q} \cdot \frac{r+1}{r} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{qr} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2$ y por lo tanto $\frac{3p^2}{p^2+p+1} \leq 2$, de donde $p = 2$. Como los primos p, q y r son distintos, tenemos entonces que $q \geq 3$ y $r \geq 5$. Luego, $\frac{q+1}{q} \cdot \frac{r+1}{r} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$. Por otra parte, usando que $p = 2$, tenemos que $\frac{q+1}{q} \cdot \frac{r+1}{r} \geq \frac{3 \cdot 2^2}{2^2+2+1} = \frac{12}{7}$ lo que contradice la desigualdad anterior.
Por lo tanto, el mínimo número de divisores que puede tener un número atresvido es 16. (Nota. Véase la fórmula para la suma de los divisores positivos, en el Teorema 8 del Apéndice).

Solución del problema 6. Vamos a demostrar que $\sqrt{2}$ es un valor posible para l y después que es el menor valor posible.
Sea $H = ABCDEF \in \mathcal{F}$. Si alguna de las diagonales AD, BE, CF, AC, CE o EA es menor o igual que $\sqrt{2}$, es fácil (usando el paralelismo de cada par de lados opuestos) cubrir H con una franja de ancho $\sqrt{2}$. Supongamos entonces que todas estas diagonales son mayores que $\sqrt{2}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AE \geq AC \geq CE > \sqrt{2}$. Entonces $d(C, AE) \leq d(E, AC) \leq d(A, CE)$, donde $d(X, YZ)$ denota la distancia del punto X al segmento YZ. Como el triángulo ACE puede cubrirse con una franja de ancho 1, la menor de sus alturas es menor o igual que 1, es decir, $d(C, AE) \leq 1$. Usando esto junto con las relaciones $AC \geq CE > \sqrt{2}$, tenemos que $\angle ACE > 90°$.



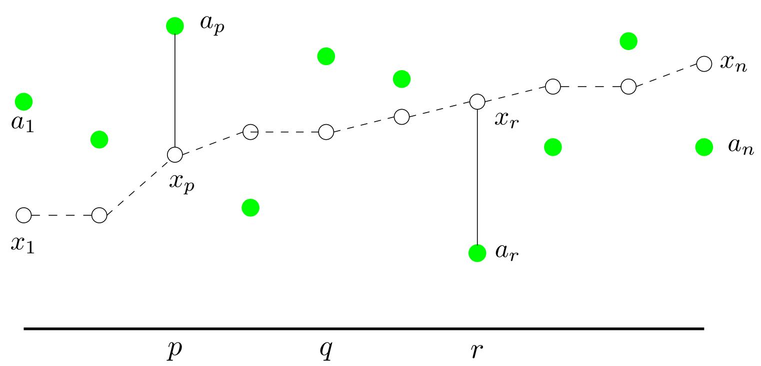
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha = \angle FCE \geq \angle ACF$. Entonces, $\angle FCE > 45°$. Luego, $d(F, CE) = FC \operatorname{sen} \alpha > \sqrt{2} \operatorname{sen} 45° > 1$. De manera análoga tenemos que $d(E, FC) > 1$. Como el triángulo FCE puede cubrirse con una franja de ancho 1, entonces $d(C, FE) \leq 1$. Por lo tanto, H puede cubrirse por la franja delimitada por las rectas FE y BC, la cual tiene ancho $d(C, FE) \leq 1 < \sqrt{2}$. Esto demuestra que cada hexágono de la familia $\mathcal{F}$ puede ser cubierto por una banda de ancho $\sqrt{2}$.
Falta demostrar que $l \geq \sqrt{2}$. La idea de la demostración es considerar un cuadrado $ABCD$ de lado 1 visto como un hexágono "degenerado" $ABBCDD$. Es claro que en este hexágono degenerado, cada tres vértices pueden cubrirse por una banda de ancho 1 y que cualquier banda que lo cubra debe ser de tamaño $\sqrt{2}$. Como en este hexágono degenerado hay lados de tamaño cero, hacemos que esos lados midan $\varepsilon > 0$, estirando los triángulos ABD y BCD. De esta forma tenemos un hexágono no degenerado con lados opuestos paralelos. Como en este nuevo hexágono ya no se cumple que cualesquiera tres vértices son cubiertos por una banda de ancho 1, le aplicamos una homotecia hasta obtener el resultado. Finalmente, tomando ε pequeño tenemos que $\sqrt{2}$ es el mínimo.

4.4. 48^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Solución del problema 1. (a) Sean $1 \leq p \leq q \leq r \leq n$ índices tales que:

$$d = d_q, \quad a_p = \max\{a_j : 1 \leq j \leq q\}, \quad a_r = \min\{a_j : q \leq j \leq n\}.$$

Luego, $d = a_p - a_r$. (Estos índices no son necesariamente únicos).



Para números reales arbitrarios $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, consideremos las dos cantidades $|x_p - a_p|$ y $|x_r - a_r|$. Ya que:

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) = (a_p - a_r) + (x_r - x_p) \geq a_p - a_r = d,$$

tenemos que o bien $a_p - x_p \geq \frac{d}{2}$ o bien $x_r - a_r \geq \frac{d}{2}$. De aquí que:

$$\begin{aligned} \text{máx}\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} &\geq \text{máx}\{|x_p - a_p|, |x_r - a_r|\} \\ &\geq \text{máx}\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \\ &\geq \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

(b) Definimos la sucesión (x_k) como:

$$x_1 = a_1 - \frac{d}{2}, \quad x_k = \text{máx}\left\{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\right\} \quad \text{para} \quad 2 \leq k \leq n.$$

Demostraremos que se cumple la igualdad en (2.1) para esta sucesión.
Por definición, la sucesión (x_k) es no decreciente y $x_k - a_k \geq -\frac{d}{2}$ para todo $1 \leq k \leq n$. Demostraremos que:

$$x_k - a_k \leq \frac{d}{2} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Consideremos un índice arbitrario $1 \leq k \leq n$. Sea $l \leq k$ el más pequeño índice tal que $x_k = x_l$. Tenemos que o bien $l = 1$ o bien $l \geq 2$ y $x_l > x_{l-1}$. En ambos casos:

$$x_k = x_l = a_l - \frac{d}{2}. \tag{4.1}$$

Ya que:

$$a_l - a_k \leq \text{máx}\{a_j : 1 \leq j \leq k\} - \text{mín}\{a_j : k \leq j \leq n\} = d_k \leq d,$$

la igualdad (4.1) implica que:

$$x_k - a_k = a_l - a_k - \frac{d}{2} \leq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Luego, $-\frac{d}{2} \leq x_k - a_k \leq \frac{d}{2}$ para todo $1 \leq k \leq n$, de donde:

$$\text{máx}\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \frac{d}{2}.$$

Además se cumple la igualdad ya que $|x_1 - a_1| = \frac{d}{2}$.

Segunda Solución. Presentamos otra construcción de una sucesión (x_i) para la parte (b).
Para cada $1 \leq i \leq n$, sean:

$$M_i = \text{máx}\{a_j : 1 \leq j \leq i\} \text{ y } m_i = \text{mín}\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Para todo $1 \leq i < n$, tenemos que:

$$M_i = \text{máx}\{a_1, \ldots, a_i\} \leq \text{máx}\{a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}\} = M_{i+1}$$

y

$$m_i = \text{mín}\{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\} \leq \text{mín}\{a_{i+1}, \ldots, a_n\} = m_{i+1}.$$

Por lo tanto, las sucesiones (M_i) y (m_i) son no-decrecientes. Además, ya que a_i aparece en ambas definiciones, tenemos que $m_i \leq a_i \leq M_i$. Para alcanzar la igualdad en (2.1), hagamos $x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$. Ya que las sucesiones (M_i) y (m_i) son no-decrecientes, la sucesión (x_i) es no-decreciente también.
Haciendo $d_i = M_i - m_i$, tenemos que:

$$-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \leq x_i - a_i \leq x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\text{máx}\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \text{máx}\left\{\frac{d_i}{2} : 1 \leq i \leq n\right\} = \frac{d}{2}.$$

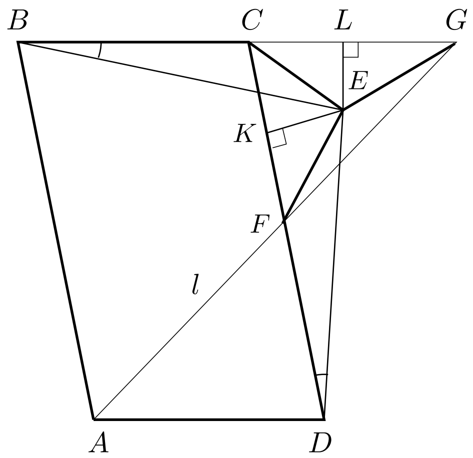
Como la desigualdad opuesta se demostró en la parte (a), tenemos la igualdad.

Solución del problema 2. (Solución de Isaac Buenrostro). Sean H e I los puntos medios de FC y GC, respectivamente. Entonces HI y FG son paralelas por Thales, y como $FH = HC$, tenemos que HI intersecta a AC en su punto medio (otra vez por Thales aplicado al triángulo ACF). Como $ABCD$ es un paralelogramo, sus diagonales AC y BD se bisecan, de modo que el punto medio de AC es el punto medio de BD. Ahora, si E está en el circuncírculo del triángulo BCD, las proyecciones de E sobre BC, DC y BD son colineales (recta de Simson). Como la proyección sobre BC es I y la proyección sobre DC es H, tenemos que la proyección sobre BD es la intersección de HI y BD, que es el punto medio de BD, por lo que la altura desde E sobre BD es también mediatriz de BD. Así, $EB = ED$ y $\angle EBD = \angle EDB$.

Ahora, como $DBCE$ es cíclico, tenemos que $\angle DCE = \angle DBE = \angle EBD = \angle EDB = 180^\circ - \angle ECB = \angle ECG$, de donde se sigue que $\angle FCE = \angle ECG$. Como E es el circuncentro del triángulo FCG, tenemos que $\angle ECF = \angle EFC = \alpha$. Luego, $\angle FEC = 180^\circ - 2\alpha$ de donde $\angle FGC = 90^\circ - \alpha$. Análogamente, tenemos que $\angle CFG = 90^\circ - \alpha$. Además, $\angle CFG = \angle DFA$ por ser opuestos por el vértice y como AB es paralela a CD y AD es paralela a BC, tenemos que $\angle DAF = \angle FGC = \angle DFA = \angle FAB$ y por lo tanto AF es bisectriz del ángulo DAB.

Segunda Solución. Si $CF = CG$, entonces $\angle FGC = \angle GFC$, de donde $\angle GAB = \angle GFC = \angle FGC = \angle FAD$ y así l es bisectriz.

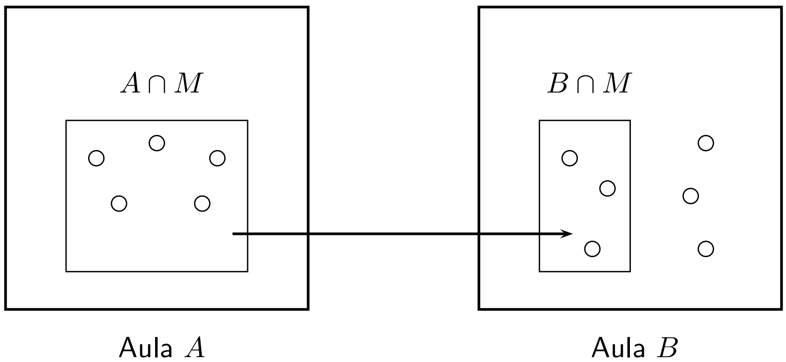
Supongamos que $CF < CG$. Sean EK y EL alturas de los triángulos isósceles ECF y EGC, respectivamente. Entonces, en los triángulos rectángulos EKF y ELC tenemos que $EF = EC$ y $KF = \frac{CF}{2} < \frac{GC}{2} = LC$, de modo que $KE = \sqrt{EF^2 - KF^2} > \sqrt{EC^2 - LC^2} = LE$. Como el cuadrilátero $BCED$ es cíclico, tenemos que $\angle EDC = \angle EBC$, de modo que los triángulos rectángulos BEL y DEK son semejantes. Entonces, $KE > LE$ implica que $DK > BL$ y por lo tanto $DF = DK - KF > BL - LC = BC = AD$. Pero los triángulos ADF y GCF son semejantes, así que $1 > \frac{AD}{DF} = \frac{GC}{CF}$ que contradice nuestra suposición. Análogamente, si suponemos que $CF > GC$ obtenemos que $KF > LC$, $KE < LE$, $DK < BL$ y $DF < AD$, de donde $1 < \frac{AD}{DF} = \frac{GC}{CF}$ que también es una contradicción. Por lo tanto, $CF = CG$ y l es bisectriz del ángulo DAB.



Solución del problema 3. Presentaremos un algoritmo para distribuir a los participantes. Supongamos que las aulas son *Aula* A y *Aula* B. Comenzamos con una distribución inicial, y entonces la modificamos varias veces enviando una persona a la otra aula. En cualquier paso del algoritmo, A y B denotarán los conjuntos de los participantes en las aulas, y $c(A)$, $c(B)$ denotarán los tamaños de las cliques más grandes contenidas en las aulas A y B, respectivamente.

Paso 1. Sea M una de las cliques de mayor tamaño, $|M| = 2m$. Enviamos a todos los miembros de M a la aula A y al resto de los participantes a la aula B.
Como M es una clique de mayor tamaño, tenemos que $c(A) = |M| \geq c(B)$.

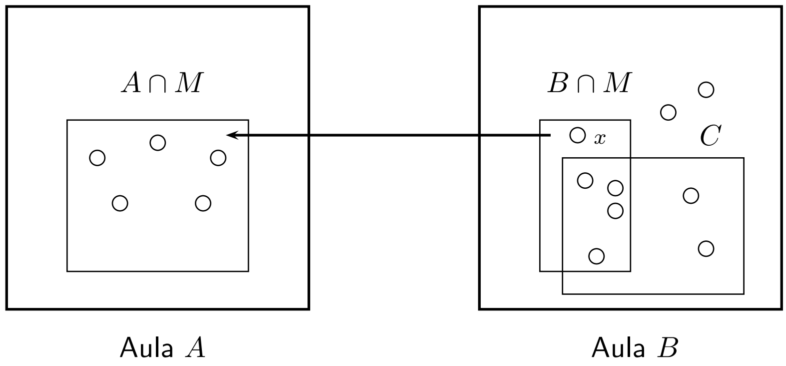
Paso 2. Mientras $c(A) > c(B)$, enviamos una persona del aula A al aula B.



Note que $c(A) > c(B)$ implica que el aula A no está vacía. En cada paso, $c(A)$ disminuye en uno y $c(B)$ aumenta en a lo más uno. Luego, al final tendremos que $c(A) \leq c(B) \leq c(A)+1$. También tendremos al final que $c(A) = |A| \geq m$, ya que si no tendríamos al menos $m+1$ miembros de M en el aula B y a lo más $m-1$ en el aula A, lo que implicaría que $c(B)-c(A) \geq (m+1)-(m-1) = 2$.

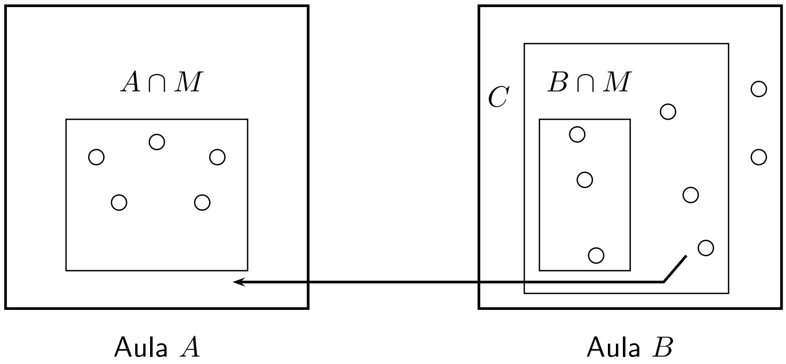
Paso 3. Sea $k = c(A)$. Si $c(B) = k$, entonces terminamos.
Si llegamos a que $c(A) = c(B) = k$, entonces habremos encontrado la distribución deseada. En los otros casos, tenemos que $c(B) = k+1$. De la estimación anterior también sabemos que $k = |A| = |A \cap M| \geq m$ y $|B \cap M| \leq m$.

Paso 4. Si existe un participante $x \in B \cap M$ y una clique $C \subset B$ tal que $|C| = k+1$ y $x \notin C$, entonces movemos x al aula A y terminamos.



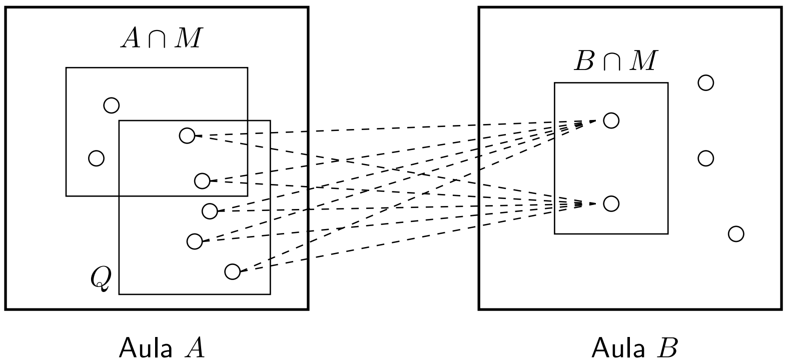
Después de regresar a x al aula A, tendremos $k+1$ miembros de M en el aula A, de modo que $c(A) = k+1$. Como $x \notin C$, $c(B) = |C|$ no disminuye, y después de este paso tenemos que $c(A) = c(B) = k+1$.
Si no hay tal competidor x, entonces en el aula B todas las cliques de tamaño $k+1$ contienen a $B \cap M$ como subconjunto.

Paso 5. Mientras $c(B) = k+1$, elegimos una clique $C \subset B$ tal que $|C| = k+1$ y movemos un miembro de $C \setminus M$ al aula A.



Note que $|C| = k + 1 > m \geq |B \cap M|$, de modo que $C \setminus M$ no puede ser vacío. En cada momento movemos una sóla persona del aula B al aula A, de tal manera que $c(B)$ disminuye en a lo más 1. Luego, al final de esta rutina tenemos que $c(B) = k$.

En el aula A tenemos la clique $A \cap M$ de tamaño $|A \cap M| = k$. Luego, $c(A) \geq k$. Demostraremos que no hay ninguna clique de tamaño mayor que k en A. Sea $Q \subset A$ una clique arbitraria. Demostraremos que $|Q| \leq k$.



En el aula A, y especialmente en el conjunto Q, puede haber dos tipos de participantes:
(a) Algunos miembros de M. Como M es una clique, ellos son amigos de todos los miembros de $B \cap M$.
(b) Participantes que fueron movidos al aula A en el paso 5. Cada uno de ellos ha estado en una clique con $B \cap M$, así que ellos son también amigos de todos los miembros de $B \cap M$.
Luego, todos los miembros de Q son amigos de todos los miembros de $B \cap M$.

Los conjuntos Q y $B \cap M$ son por sí mismos cliques, de modo que $Q \cup (B \cap M)$ es también una clique. Como M es una clique de mayor tamaño, tenemos que:

$$|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|,$$

de donde $|Q| \leq |A \cap M| = k$.
Finalmente, después del paso 5 tenemos que $c(A) = c(B) = k$.

Solución del problema 4. (Solución de Aldo Pacchiano). Como los triángulos rectángulos CLQ y CKP son semejantes (por tener ángulos iguales en el vértice C), tenemos que $\angle RQL = 180° - \angle CQL = 180° - \angle CPK = \angle RPK$. Luego, $\angle RPK = \angle RQL = 90° + \theta$ donde $\theta = \angle LCQ$. Tenemos que las áreas de los triángulos RPK y RQL están dadas por:

$$\begin{aligned} (RPK) &= RP \cdot PK \cdot \operatorname{sen}(90° + \theta), \\ (RQL) &= RQ \cdot QL \cdot \operatorname{sen}(90° + \theta), \end{aligned}$$

y son iguales si y sólo si $RP \cdot PK = RQ \cdot QL$.
Notemos que $PK = \frac{BC}{2}\tan\theta$ y $QL = \frac{AC}{2}\tan\theta$. Luego, basta demostrar que $RP \cdot BC = RQ \cdot AC$.
Tenemos que $AQ = QC$ y $BP = PC$. Luego, $\angle QAC = \theta$ y $\angle PBC = \theta$. Como $\angle RAB = \angle RCB$ por subtender el mismo arco, y $\angle RCB = \theta$, tenemos que $\angle RAB = \theta$ de donde $\angle RAQ = \angle BAC$. Análogamente, como $\angle RBA = \angle RCA$ por subtender el mismo arco, tenemos que $\angle RBP = \angle ABC$.
Aplicando la ley de senos en el triángulo RAQ, tenemos que:

$$\frac{RA}{\operatorname{sen}(\angle AQR)} = \frac{RQ}{\operatorname{sen}(\angle RAQ)},$$

es decir:

$$\frac{RA}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{RQ}{\operatorname{sen}(\angle BAC)}.$$

Análogamente, aplicando la ley de senos en el triángulo RPB tenemos que:

$$\frac{RB}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{RP}{\operatorname{sen}(\angle ABC)}.$$

Luego:

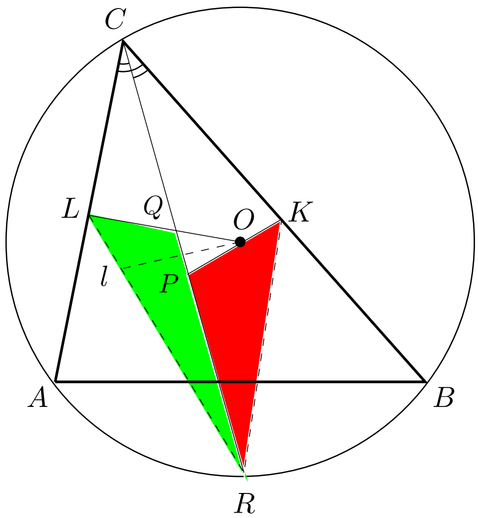
$$RQ = \frac{RA}{\operatorname{sen}(2\theta)} \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC) \quad \text{y} \quad RP = \frac{RB}{\operatorname{sen}(2\theta)} \cdot \operatorname{sen}(\angle ABC).$$

Finalmente, como $\angle RAB = \angle RBA$ tenemos que $RA = RB$ y por lo tanto:

$$\frac{RQ}{RP} = \frac{\operatorname{sen}(\angle BAC)}{\operatorname{sen}(\angle ABC)} = \frac{BC}{AC},$$

donde la última igualdad se sigue aplicando la ley de senos en el triángulo ABC. Por lo tanto, $RQ \cdot AC = RP \cdot BC$ que es lo que queríamos demostrar.

Segunda Solución. Si $AC = BC$, entonces el triángulo ABC es isósceles, los triángulos RQL y RPK son simétricos respecto a la bisectriz CR y el problema es trivial. Si $AC \neq BC$, entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $AC < BC$.



Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Los triángulos rectángulos CLQ y CKP tienen ángulos iguales en el vértice C, de modo que son semejantes. Así que $\angle CPK = \angle CQL = \angle OQP$ y:

$$\frac{QL}{PK} = \frac{CQ}{CP}.$$

Sea l la mediatriz de CR. Claramente, l pasa por el circuncentro O. Debido a la igualdad de los ángulos en P y en Q, el triángulo OPQ es isósceles con $OP = OQ$. De aquí que l es el eje de simetría en este triángulo también. Por lo tanto, los puntos P y Q son simétricos en el segmento CR con respecto a la recta l, de modo que $RP = CQ$ y $RQ = CP$.

Como $\angle RQL = 180° - \angle CQL = 180° - \angle CPK = \angle RPK$, tenemos que:

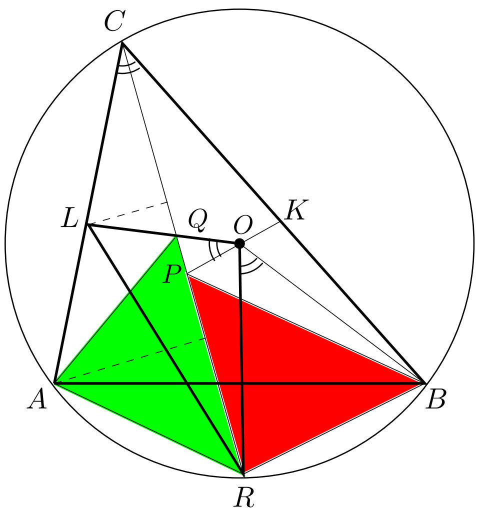
$$\frac{\text{área}(RQL)}{\text{área}(RPK)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot RQ \cdot QL \cdot \operatorname{sen} \angle RQL}{\frac{1}{2} \cdot RP \cdot PK \cdot \operatorname{sen} \angle RPK} = \frac{RQ}{RP} \cdot \frac{QL}{PK}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{\text{área}(RQL)}{\text{área}(RPK)} = \frac{RQ}{RP} \cdot \frac{QL}{PK} = \frac{CP}{CQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = 1,$$

de donde se sigue que área$(RQL) =$ área(RPK).

Tercera Solución. Supongamos como en la segunda solución que $AC < BC$. Denotemos por O al circuncentro del triángulo ABC, y sea γ el ángulo en C. De manera análoga a la segunda solución, usando los triángulos rectángulos CLQ y CKP obtenemos que $\angle OPQ = \angle OQP = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Luego, el triángulo OPQ es isósceles, $OP = OQ$ y además $\angle POQ = \gamma$.
Es un resultado conocido que R es el punto medio del arco AB y $\angle ROA = \angle BOR = \gamma$.



Consideremos una rotación alrededor del punto O por un ángulo γ. Esta transformación mueve el punto A al punto R, el R al B y el Q al P. Luego, los triángulos RQA y BPR son congruentes y tienen la misma área.
Como los triángulos RQL y RQA tienen a RQ como un lado común, la razón entre sus áreas es:

$$\frac{\text{área}(RQL)}{\text{área}(RQA)} = \frac{d(L, CR)}{d(A, CR)} = \frac{CL}{CA} = \frac{1}{2},$$

donde $d(X, YZ)$ denota la distancia del punto X a la recta YZ.
De manera análoga se demuestra que:

$$\frac{\text{área}(RPK)}{\text{área}(BPR)} = \frac{CK}{CB} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\text{área}(RQL) = \frac{1}{2}\text{área}(RQA) = \frac{1}{2}\text{área}(BPR) = \text{área}(RPK).$$

Solución del problema 5. Diremos que una pareja de enteros positivos (a, b) es *mala* si $4ab-1$ divide a $(4a^2-1)^2$ pero $a \neq b$. Para demostrar que no existen parejas malas, demostraremos primero dos propiedades de ellas.

Propiedad 1. Si (a, b) es una pareja mala y $a < b$, entonces existe un entero positivo $c < a$ tal que (a, c) es también una pareja mala.
En efecto, sea $r = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$. Entonces:

$$r = -r \cdot (-1) \equiv -r(4ab-1) = -(4a^2-1)^2 \equiv -1 \pmod{4a},$$

de donde $r = 4ac - 1$ para algún entero positivo c. Como $a < b$, tenemos que:

$$4ac - 1 = \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1} < 4a^2 - 1$$

y por lo tanto $c < a$. Además, por construcción el número $4ac-1$ es un divisor de $(4a^2-1)^2$ y así (a, c) es una pareja mala.

Propiedad 2. Si (a, b) es una pareja mala, entonces (b, a) también lo es.
En efecto, ya que $1 = 1^2 \equiv (4ab)^2 \pmod{4ab-1}$, tenemos que:

$$(4b^2-1)^2 \equiv \left(4b^2 - (4ab)^2\right)^2 = 16b^4(4a^2-1)^2 \equiv 0 \pmod{4ab-1}$$

y por lo tanto, $4ab-1$ divide a $(4b^2-1)^2$.

Supongamos que existe una pareja mala. Tomemos una pareja mala (a, b) tal que $2a + b$ sea mínimo. Si $a < b$, entonces por la propiedad 1 existe una pareja mala (a, c) tal que $c < b$ y por lo tanto $2a + c < 2a + b$. Ahora, si $b < a$, entonces por la propiedad 2 la pareja (b, a) también es mala y $2b + a < 2a + b$. Como ambos casos contradicen la minimalidad de $2a + b$, concluimos que no existen parejas malas.

Solución del problema 6. Es fácil encontrar $3n$ de tales planos. Por ejemplo, los planos $x = i$, $y = i$ o $z = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cubren el conjunto S pero ninguno de ellos contiene al origen. Otras colecciones que también cumplen están formadas por todos los planos $x + y + z = k$ para $k = 1, 2, \ldots, 3n$.
Demostraremos que $3n$ es el menor número posible.

Lema 1. Considere un polinomio no cero $P(x_1, \ldots, x_k)$ en k variables. Suponga que P se anula en todos los puntos $(x_1, \ldots, x_k)$ tales que $x_1, \ldots, x_k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $x_1 + \cdots + x_k > 0$, mientras que $P(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$. Entonces, gr$P \geq kn$ (gr$P$ denota el grado de P).
Para la demostración del Lema 1 usaremos inducción en k. El caso base $k = 0$ es claro ya que $P \neq 0$. Denotaremos $y = x_k$ para mayor claridad.
Sea $R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$ el residuo de P módulo $Q(y) = y(y-1)\cdots(y-n)$. El polinomio $Q(y)$ se anula en $y = 0, 1, \ldots, n$, de modo que $P(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) = R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$ para cada $x_1, \ldots, x_{k-1}, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, R también satisface la condición del lema. Además, gr$_y R \leq n$ (gr$_y R$ denota el grado de R en la variable y). Claramente, gr$R \leq$ gr$P$, así que es suficiente demostrar que gr$R \geq nk$.
Expandamos el polinomio R en las potencias de y:

$$\begin{aligned} R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) &= R_n(x_1, \ldots, x_{k-1})y^n + R_{n-1}(x_1, \ldots, x_{k-1})y^{n-1} + \\ &\quad + \cdots + R_0(x_1, \ldots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Demostraremos que el polinomio $R_n(x_1, \ldots, x_{k-1})$ satisface la condición de la hipótesis de inducción. Consideremos el polinomio $T(y) = R(0, \ldots, 0, y)$ de grado menor o igual que n. Este polinomio tiene n raíces $y = 1, \ldots, n$. Por otra parte, $T(y) \not\equiv 0$ ya que $T(0) \neq 0$. Luego, gr$T = n$ y su coeficiente principal (el coeficiente del término de mayor grado) es $R_n(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$. En particular, en el caso $k = 1$ obtenemos que el coeficiente R_n es distinto de cero.
Análogamente, consideremos cualesquiera números $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, n\}$ con $a_1 + \cdots + a_{k-1} > 0$. Sustituyendo $x_i = a_i$ en $R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$, obtenemos un polinomio en y el cual se anula en todos los puntos $y = 0, \ldots, n$ y tiene grado menor o igual que n. Luego, este polinomio es el polinomio cero y por lo tanto $R_i(a_1, \ldots, a_{k-1}) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. En particular, $R_n(a_1, \ldots, a_{k-1}) = 0$. De aquí que el polinomio $R_n(x_1, \ldots, x_{k-1})$ satisface la condición de la hipótesis de inducción. Luego, tenemos que gr$R_n \geq (k-1)n$ y

gr$P \geq$ gr$R \geq$ gr$R_n + n \geq kn$. Esto concluye la demostración del lema.

Ahora podemos terminar la solución. Supongamos que hay N planos que cubren todos los puntos de S pero que no contienen al origen. Consideremos sus ecuaciones $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ y el polinomio:

$$P(x,y,z) = \prod_{i=1}^{N}(a_ix + b_iy + c_iz + d_i).$$

P tiene grado total N y tiene la propiedad de que $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ para cualquier (x_0, y_0, z_0) en S, mientras que $P(0,0,0) \neq 0$. Luego, por el Lema 1 tenemos que $N =$ gr$P \geq 3n$, de donde se sigue el resultado.

Segunda Solución. Presentaremos una prueba distinta del Lema 1 y el resto de la demostración es como en la primera solución. Demostraremos sólo el caso $k = 3$, que se aplica en la solución, y denotaremos las variables por x, y, z. (La misma demostración funciona para el caso general).
Usaremos el siguiente resultado conocido y presentamos una demostración del mismo por completez.

Lema 2. Para enteros arbitrarios $0 \leq m < n$ y para cualquier polinomio $P(x)$ de grado m se cumple que:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k) = 0.$$

Usaremos inducción en n. Si $n = 1$, entonces $P(x)$ es un polinomio constante, de modo que $P(1) - P(0) = 0$ y así el caso base queda demostrado.
Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$ y definamos $P_1(x) = P(x+1) - P(x)$. Claramente gr$P_1 =$ gr$P - 1 = m - 1 < n - 1$, de modo que por la

hipótesis de inducción tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}P_1(k) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\left(P(k)-P(k+1)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}P(k) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}P(k+1)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}P(k) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}P(k)\\
&= P(0) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)P(k) + (-1)^nP(n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k),
\end{aligned}$$

lo que completa la inducción.

Regresando a la demostración del Lema 1, supongamos por contradicción que gr$P = N < 3n$. Consideremos la suma:

$$S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{i+j+k}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{k}P(i,j,k).$$

El único término de esta suma que no es cero es $P(0,0,0)$ y su coeficiente es $\binom{n}{0}^3 = 1$. Por lo tanto, $S = P(0,0,0) \neq 0$.

Por otro lado, si $P(x,y,z) = \sum\limits_{\alpha+\beta+\gamma\leq N} p_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma$, entonces:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{i+j+k}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{k}\sum_{\alpha+\beta+\gamma\leq N}p_{\alpha,\beta,\gamma}i^\alpha j^\beta k^\gamma\\
&= \sum_{\alpha+\beta+\gamma\leq N}p_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i^\alpha\right)\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^\beta\right)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^\gamma\right).
\end{aligned}$$

Consideremos un término arbitrario de esta suma y demostremos que es cero. Como $N < 3n$, una de las tres desigualdades $\alpha < n$, $\beta < n$ ó $\gamma < n$ es válida. Supongamos que $\alpha < n$. Aplicando el Lema 2 al polinomio x^α, tenemos que $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i^\alpha = 0$, de donde se sigue que cada término de S es cero. Luego, $S = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto gr$P \geq 3n$.

Apéndice

Definición 1 (Divisor)**.** *Un entero $a \neq 0$ es divisor del entero b, si existe un entero c tal que $b = a \cdot c$. Se denota esto por $a|b$. También se dice que a divide a b, o que b es divisible entre a, o que b es múltiplo de a.*

Definición 2 (Número primo y número compuesto)**.** *Un entero $p > 1$ es un número primo si los únicos divisores positivos de p son 1 y p. Un entero $n > 1$ que no es primo, se dice que es compuesto. Por ejemplo, 2 y 3 son números primos y 6 es compuesto.*

Definición 3 (Máximo Común Divisor)**.** *Un entero $d \geq 1$ es el máximo común divisor de los enteros a y b si:*
(1) $d|a$ y $d|b$.
(2) Si $c|a$ y $c|b$, entonces $c|d$.
Se denota por (a, b). Si $(a, b) = 1$, se dice que a y b son primos relativos o primos entre sí.

Teorema 4. *El máximo común divisor de a y b es el menor entero positivo que se puede escribir en la forma $am + bn$ con m, n enteros.*

Definición 5 (Mínimo Común Múltiplo)**.** *Un entero $m \geq 1$ es el mínimo común múltiplo de los enteros a y b si:*
(1) $a|m$ y $b|m$.
(2) Si $a|c$ y $b|c$, entonces $m|c$.
Se denota por $[a, b]$.

Teorema 6 (Teorema Fundamental de la Aritmética)**.** *Todo entero es producto de primos. Su descomposición como producto de primos es única salvo el orden de los factores primos.*

Teorema 7. *Se cumple que:*
(1) $(a, b)\,[a, b] = ab$.
(2) *Si $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ con α_i, β_i enteros no negativos y p_i números primos distintos, entonces $(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$ y $[a, b] = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k}$ donde $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ y $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$.*

Teorema 8 (Número de divisores y suma de divisores). *si n es un entero positivo cuya factorización como producto de potencias de primos distintos es $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, entonces:*
1. $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$,
2. $S(n) = (1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2}) \cdots (1+p_r+p_r^2+\cdots+p_r^{\alpha_r})$,
donde $d(n)$ es el número de divisores positivos de n y $S(n)$ es la suma de los divisores positivos de n.

Teorema 9 (Algoritmo de la división). *Para a y b enteros, con $b \neq 0$, existen enteros únicos q y r tales que $a = bq + r$ y $0 \leq r < |b|$.*
El número r se llama el "residuo" que deja a al dividirlo entre b.

Teorema 10 (Algoritmo de Euclides). *Es un proceso para encontrar el máximo común divisor de dos enteros positivos a y b. Utiliza el algoritmo de la división como sigue:*

$$\begin{array}{rcll} a & = & n_0 b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b & = & n_1 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 & = & n_2 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ & \vdots & & \\ r_{k-2} & = & n_{k-1} r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} & = & n_k r_k & \end{array}$$

Entonces, el último residuo distinto de cero es el máximo común divisor de a y b, es decir, $r_k = (a, b)$.
Además, $r_k = (a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{k-2}, r_{k-1}) = (r_{k-1}, r_k)$.

Teorema 11 (Congruencias). *Si a y b son enteros y n es un entero positivo, decimos que a es congruente con b módulo n si n divide a $a - b$, y se denota por $a \equiv b \pmod{n}$.*
Para a, b, c enteros y n, m, r enteros positivos, tenemos las siguientes propiedades:
(1) $a \equiv a \pmod{n}$.
(2) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $b \equiv a \pmod{n}$.
(3) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$.
(4) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ y $ac \equiv bd \pmod{n}$.
(5) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ para todo entero positivo m.
(6) Si $a = nc + r$ con $0 \leq r < n$, entonces $a \equiv r \pmod{n}$.

Definición 12 (Función ϕ de Euler). *Sea n un entero positivo. Se define $\phi(n)$ como el número de enteros positivos menores que n y primos relativos con n.*

Teorema 13 (Teorema de Euler). *Si n es un entero positivo y a es un entero primo relativo con n, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (\text{mod}\, n)$.*

Teorema 14 (Pequeño Teorema de Fermat). *Si a es un entero positivo y p es un número primo que no divide a a, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod}\, p)$.*

Definición 15 (Orden). *Si a y n son primos entre sí, el orden de a módulo n, denotado por O, es el menor entero positivo tal que $a^O \equiv 1 \ (\text{mod}\, n)$.*

Teorema 16 (Propiedad del orden). *Si a y n son primos entre sí y $a^m \equiv 1 \ (\text{mod}\, n)$, entonces el orden de a módulo n es un divisor de m.*

Teorema 17 (Fórmulas útiles). *(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(4) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ para cualquier número real $x \neq 1$.
(5) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ para todo entero positivo n y cualesquiera números reales x, y.
(6) $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$ para todo entero positivo impar n y cualesquiera números reales x, y.

Teorema 18 (Teorema del Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Teorema 19 (Desigualdad media aritmética - media geométrica). *Para cualesquiera números reales no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se tiene que:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Teorema 20 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para cualesquiera números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, se tiene que:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

La igualdad ocurre si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 21 (Principio fundamental del conteo). *Si una tarea puede realizarse de m formas diferentes y, para cada una de estas maneras, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas pueden realizarse (en ese orden) de mn formas distintas.*

Teorema 22 (Principio de las casillas). *Si $nk+1$ objetos (o más) se distribuyen en k casillas, entonces alguna casilla tiene al menos $n+1$ objetos.*

Definición 23 (Triángulos). *(1) Triángulo acutángulo. Es aquel que tiene sus tres ángulos agudos, es decir, menores de $90°$.*
(2) Triángulo rectángulo. Es aquel que tiene un ángulo recto o de $90°$.
(3) Triángulo obtusángulo. Es aquel que tiene un ángulo obtuso, es decir, un ángulo mayor de $90°$.
(4) Triángulo equilátero. Es aquel que tiene sus tres lados iguales.
(5) Triángulo isósceles. Es aquel que tiene dos lados iguales.
(6) Triángulo escaleno. Es aquel que no tiene dos lados iguales.

Teorema 24. *(1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$.*
(2) (Desigualdad del triángulo) En un triángulo de lados a, b y c, las siguientes tres desigualdades se cumplen: $a+b \geq c, a+c \geq b, b+c \geq a$, y las igualdades se cumplen si y sólo si los vértices del triángulo son colineales.

Definición 25 (Puntos y rectas notables de un triángulo). *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.
Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.
Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices.
Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.
Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas.
Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.
Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.

Definición 26 (Triángulos semejantes). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:*
(1) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.
(2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Teorema 27 (Criterios de semejanza). *Dos triángulos son semejantes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(1) Tienen sus lados correspondientes proporcionales.
(2) Tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
(3) Tienen dos ángulos correspondientes iguales.

Definición 28 (Triángulos congruentes)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales.*

Teorema 29 (Criterios de congruencia)**.** *Dos triángulos son semejantes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*
(1) (LAL) Tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
(2) (ALA) Tienen dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre ellos igual.
(3) (LLL) Tienen los tres lados correspondientes iguales.

Teorema 30 (Teorema de Thales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre AB y CA respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 31 (Teorema de Pitágoras)**.** *Si ABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, entonces $AB^2 = BC^2 + CA^2$. El recíproco del Teorema de Pitágoras también es cierto, es decir, si en un triángulo ABC se cumple que $AB^2 = BC^2 + CA^2$, entonces el triángulo es rectángulo con ángulo recto en C.*

Teorema 32 (Ley de los cosenos)**.** *En un triángulo ABC, de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B) y c (opuesto al ángulo C), se tiene que:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Teorema 33 (Ley de los senos)**.** *En un triángulo ABC, de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B) y c (opuesto al ángulo C), se tiene que:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. (La circunferencia circunscrita o circuncírculo es la que pasa por los tres vértices del triángulo).

Teorema 34 (Área de un triángulo)**.** *El área de un triángulo ABC, denotada por (ABC), de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B), c*

(opuesto al ángulo C), y alturas h_a, h_b, h_c (donde h_i es la altura trazada sobre el lado i) es:

$$(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

También:

$$\begin{aligned} (ABC) &= sr, \\ (ABC) &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \textit{(Fórmula de Herón)} \\ (ABC) &= \frac{abc}{4R}, \\ (ABC) &= \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}, \end{aligned}$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$, R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC, y r es el radio de la circunferencia inscrita del triángulo ABC. (La circunferencia inscrita o incírculo es la que tiene como centro al punto de intersección de las bisectrices internas (incentro) y es tangente a los tres lados).

Teorema 35 (Teorema de la Bisectriz). *Si AP es la bisectriz interna del ángulo en A del triángulo ABC (con P sobre BC), se tiene que:*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Definición 36 (Colineales). *Puntos colineales son los que se encuentran sobre una misma recta.*

Teorema 37. *(1) En un triángulo ABC el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.*
(2) (La circunferencia de los nueve puntos) Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, están en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Teorema 38 (Teorema de Ceva). *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 39 (Teorema de Menelao). *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB respectivamente, del triángulo ABC, entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$.*

Definición 40 (Triángulos homotéticos). *Decimos que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son homotéticos si $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ y $CA \parallel C'A'$. Y decimos que los vértices A y A' son homólogos, así como también los vértices B y B', y los vértices C y C'.*

Teorema 41. *Si ABC y $A'B'C'$ son triángulos homotéticos, entonces las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes. El punto de intersección es el centro de homotecia.*

Definición 42 (Ángulos en la circunferencia). *(1) Ángulo inscrito. En una circunferencia, es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
(2) Ángulo semi-inscrito. En una circunferencia, es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.
(3) Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 43. *(1) La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*
(2) La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.
(3) El ángulo entre dos secantes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior, es igual a la mitad de la diferencia de los dos arcos subtendidos.
(4) El ángulo entre dos cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia, es igual a la mitad de la suma de los dos arcos subtendidos.

Teorema 44 (Potencia de un punto). *(1) Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
(2) Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en C, intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PC^2 = PA \cdot PB$.

Definición 45 (Cuadriláteros). *(1) Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Un cuadrilátero $ABCD$ es convexo si al trazar sus diagonales AC y BD, éstas quedan dentro del cuadrilátero. Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si sus vértices están sobre una misma circunferencia.*
(2) Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. A los lados paralelos del trapecio se les llaman bases. Si los lados no paralelos del trapecio son iguales, se dice que el trapecio es isósceles.
(3) Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene ambos pares de lados opuestos paralelos.
(4) Un rombo es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
(5) Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.
(6) Un cuadrado es un rectángulo que tiene sus cuatro lados iguales.

Teorema 46. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(1) $ABCD$ *es un cuadrilátero cíclico.*
(2) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.
(3) $\angle ADB = \angle ACB$.
(4) $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ *(Teorema de Ptolomeo).*

Teorema 47 (Teorema de Varignon)**.** *Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. El perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.*

Teorema 48 (Fórmula de Brahmagupta)**.** *El área* A *de un cuadrilátero cíclico de lados* a, b, c *y* d *está dada por:*

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Teorema 49. *El cuadrilátero convexo* $ABCD$ *es circunscrito, es decir, sus lados son tangentes a una misma circunferencia, si y sólo si* $AB + CD = BC + DA$.

Bibliografía

[1] Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*. Academia de la Investigación Científica, México 1993.

[2] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega, *Geometría, ejercicios y problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] E. Gentile, *Aritmética Elemental*. Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[5] R. Grimaldi, *Matemáticas Discretas y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[6] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[7] A. Illanes Mejía, *Principios de Olimpiada* en la colección *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

[8] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[9] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[10] M. L. Pérez Seguí, *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[11] M. L. Pérez Seguí, *Teoría de Números*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[12] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[13] N. Vilenkin, *¿De cúantas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Radmila Bulajich Manfrino
(Presidenta)

Anne Alberro Semerena

Ignacio Barradas Bribiesca

Alejandro Bravo Mojica

Gabriela Campero Arena

José Antonio Climent Hernández

José Alfredo Cobián Campos

Luis Cruz Romo

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Jesús Jerónimo Castro

Antonio Olivas Martínez

Juan Carlos Piceno Rivera

Carlos Jacob Rubio Barrios

Elena Ruiz Velázquez

Pablo Soberón Bravo

Carmen Sosa Garza

Rogelio Valdez Delgado