Problemas Introductorios

para la

29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Elena Aguilera Miranda
Luis Miguel García Velázquez
Jorge Garza Vargas
Isabel Hubard Escalera
María Luisa Pérez Seguí

2015

María Elena Aguilera Miranda

Egresada del Doctorado en Ciencias Matemáticas,
Instituto de Matemáticas, UNAM

Luis Miguel García Velázquez

División de Posgrados, Investigación y Extensión,
Tecnológico de Monterrey, Campus Morelia

Jorge Garza Vargas

Estudiante de la Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

Isabel Hubard Escalera

Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México

María Luisa Pérez Seguí

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores formarán parte de las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2016: la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en Hong Kong durante el mes de julio, la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre en Chile y la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que tendrá lugar en Panamá en el mes de junio.

En la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1996. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2015-2016, y para el 1^o de julio del año 2016 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a los alumnos que desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Los primeros treinta problemas que aparecen en esta publicación formaron parte del Examen del Nivel Olímpico del Canguro Matemático Mexicano y están pensados para ser resueltos en un lapso de 3 horas, como un examen eliminatorio. Los siguientes diecinueve problemas formaron parte de la Primera Etapa del Concurso

Metropolitano de la Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal (entre ellos se incluyen algunas variantes de problemas publicados originalmente en otras competencias matemáticas). Los últimos seis problemas corresponden a las siguientes fases de concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

El presente folleto se edita con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en Guadalajara, Jalisco del 21 al 27 de noviembre de 2015. En él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2016. También se aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

A partir del 21 de abril -y durante un mes- se distribuirán los Exámenes del Canguro Matemático Mexicano, cuyo objetivo es acercar a los alumnos al tipo de matemáticas de la Olimpiada. Para participar en estos exámenes y obtener mayor información puedes visitar la página

`http://canguro.deltagauge.info/`

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí, Guanajuato, Huasca y Toluca.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en los concursos internacionales donde participa han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22
2012	Argentina	100	31
2013	Colombia	97	17
2014	Sudáfrica	101	26

En 2014, todos los alumnos de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvieron un reconocimiento. Ellos fueron: Kevin William Beuchot Castellanos de Nuevo León (medalla de plata), Juan Carlos Ortiz Rothon de Jalisco (medalla de plata), Diego Alonso Roque Montoya de Nuevo León (medalla de plata), Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán (medalla de plata), Oscar Samuel Henney Arthur de Michoacán (medalla de bronce) y Luis Enrique Chacón Ochoa de Chihuahua (mención honorífica). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 2 medallas de oro, 17 medallas de plata, 51 medallas de bronce y 32 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1
2012	Bolivia	19	6
2013	Panamá	20	3
2014	Honduras	22	1

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamericana de 2014 obtuvieron medalla: tres de oro (Kevin William Beuchot Castellanos de Nuevo León, Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán y Pablo Meré Hidalgo de Querétaro) y una de plata (Luis Enrique Chacón Ochoa de Chihuahua). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 25 medallas de oro, 40 medallas de plata, 31 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Centroamericana y del Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1
2012	El Salvador	12	1
2013	Nicaragua	13	1
2014	Costa Rica	12	1

En la XVI Olimpiada Mexicana de Centroamérica y el Caribe la delegación mexicana obtuvo tres medallas de oro (Olga Medrano Martín del Campo de Jalisco, Karol José Gutiérrez Suárez de Colima y Antonio López Guzmán de Chihuahua), ubicándose así la delegación nacional en primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 31 medallas de oro, 14 de plata y 3 de bronce.

En abril de 2014 México participó por primera vez en la III Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) en Antalya, Turquía. Esta olimpiada es para países europeos pero se permite la participación por invitación de otros equipos. México ocupó el lugar 17 de 29 países participantes. El equipo mexicano fue integrado por Nayeli Reyes Moreno de Baja California, María Cecilia Rojas Cuadra de Puebla, Olga Medrano Martín del Campo de Jalisco y Sandra Berenice Mendoza Peñuñuri de Sonora. Nayeli, María Cecilia y Olga obtuvieron medalla de bronce.

Resultados en el Concurso Nacional de la 28a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2014 se llevó a cabo en Toluca, Estado de México, el 28º Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 19 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Arturo Arenas Esparza (Chihuahua),
Enrique Domínguez Lucero (Chihuahua),
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua),
Alonso Granados Baca (Chihuahua),
Antonio López Guzmán (Chihuahua),
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila),
Israel Bonal Rodríguez (Guanajuato),
José Ramón Tuirán Rangel (Hidalgo),
Rodrigo Flores Martínez (Jalisco),
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco),
Rodrigo Andrés Cariño Escobar (Morelos),
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos),
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León),
Víctor Hugo Antonio De La Fuente Jiménez (Nuevo León),
María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla),
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro) y
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán).

Los 10 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe fueron:

Enrique Domínguez Lucero (Chihuahua),
Víctor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal),
Luis Alfredo Aceves Astengo (Jalisco),
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco),
Iancarlo Ariel Espinosa García (Nuevo León),
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí),
Carlos Yeddiel Cortes Ruelas (Tlaxcala),
Fernando Isaí Sáenz Meza (Tlaxcala),
Manuel Guillermo Flota López (Yucatán) y
Juan Eduardo Castanedo Hernández (Zacatecas).

Las 9 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil fueron:

Aylín Aribel Pérez Moriel (Chiapas),
Tania Martínez Villagómez (Guanajuato),
Naomi Mastache López (Guerrero),
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco),
Alka Xavier Earathu (Morelos),

Jacqueline Lira Chávez (Morelos),
María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla) y
Shaira Rocío Hernández Flores (San Luis Potosí) y
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 28º Concurso Nacional:

1. Chihuahua
2. Jalisco
3. Morelos
4. Nuevo León
5. Yucatán
6. Distrito Federal
7. Guanajuato
6. San Luis Potosí
9. Puebla
10. Colima

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Tamaulipas. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Sinaloa y Veracruz.

Material de estudio e información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

`http://ommenlinea.org/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Febrero 2015

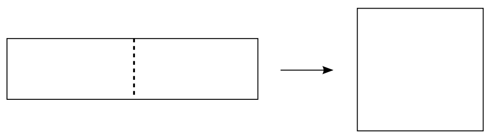
*

Enunciados de los problemas

Problema 1. Una cubeta está llena de agua hasta la mitad de su capacidad. Cuando Cecilia le agrega dos litros de agua a la cubeta, la cubeta se llena hasta tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total de la cubeta?

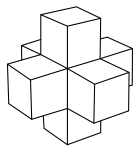
(a) 2 litros (b) 4 litros (c) 6 litros (d) 8 litros (e) 10 litros

Problema 2. Si cortamos un rectángulo por la mitad y ponemos una pieza encima de la otra obtenemos un cuadrado cuya área es $144\,\text{cm}^2$. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo con el que empezamos?



(a) 24 cm (b) 30 cm (c) 48 cm (d) 60 cm (e) 72 cm

Problema 3. Sara tiene 7 cubos idénticos, cada uno de ellos con lados que miden 1 cm. Pegándolos todos, Sara construyó una pieza como la que se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos le hacen falta para completar un cubo que tenga lados de 3 cm?



(a) 20 (b) 18 (c) 16 (d) 14 (e) 12

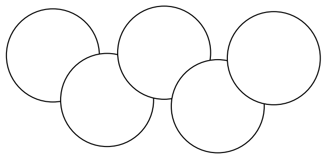
Problema 4. Cuatro hermanos se repartieron una bolsa de dulces. Los tres más grandes se quedaron con $\frac{2}{3}$ de lo que les habría correspondido si la repartición hubiera sido equitativa. ¿Qué porcentaje de la bolsa de dulces le quedó al hermano menor?

(a) 20% (b) 25% (c) 33% (d) 40% (e) 50%

Problema 5. ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones da el resultado mayor?

(a) 44×777 (b) 55×666 (c) 77×444 (d) 88×333 (e) 99×222

Problema 6. Sobre una mesa se han puesto 5 monedas iguales, como se muestra en la figura. El área de cada círculo mide $1\,\mathrm{cm}^2$. El área común entre cada dos círculos encimados es $\frac{1}{8}\,\mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es la superficie de la mesa que está cubierta por los 5 círculos?



(a) $4\,\mathrm{cm}^2$ (b) $\frac{9}{2}\mathrm{cm}^2$ (c) $\frac{35}{8}\mathrm{cm}^2$ (d) $\frac{39}{8}\mathrm{cm}^2$ (e) $\frac{19}{4}\mathrm{cm}^2$

Problema 7. En un curso se aplican 5 exámenes. Todos tienen la misma puntuación máxima, pero la calificación final se obtiene como sigue: la calificación del primer examen se promedia con la del segundo; el resultado se promedia con la calificación del tercero; el resultado se promedia con la calificación del cuarto examen y, finalmente, el resultado se promedia con la quinta calificación. ¿En qué porcentaje de la calificación final contribuye el tercer examen?

(a) 10 % (b) 12.5 % (c) 20 % (d) 25 % (e) depende de las calificaciones

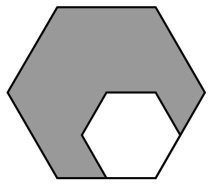
Problema 8. En un rectángulo de 6×11 se trazan las rectas que dividen a la mitad cada uno de los ángulos que están en los extremos de uno de los lados que mide 11, de forma que el lado opuesto queda dividido en tres partes. ¿Cuáles son las longitudes de esas tres partes?

(a) 5, 1, 5 (b) 2, 7, 2 (c) 3, 5, 3 (d) 4, 3, 4 (e) 1, 9, 1

Problema 9. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $\underbrace{111\cdots11}_{2014}\times 101$?

(a) 2014 (b) 2016 (c) 4028 (d) 4032 (e) 8056

Problema 10. En la figura se muestran dos hexágonos regulares. Los lados del hexágono grande miden el doble que los del hexágono pequeño. El hexágono pequeño tiene un área de $4\,\mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es el área del hexágono grande?

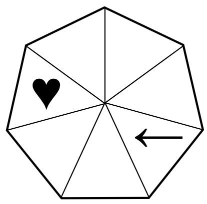


(a) $24\,\text{cm}^2$ (b) $18\,\text{cm}^2$ (c) $16\,\text{cm}^2$ (d) $15\,\text{cm}^2$ (e) $12\,\text{cm}^2$

Problema 11. Diego tiene clases de piano todos los lunes y jueves; Ana tiene clase de piano un lunes sí y uno no. Ambos empezaron a tomar clase un mismo lunes. Desde que empezó a estudiar piano, Diego ha asistido a 15 clases más que Ana. ¿Hace cuántas semanas que Diego empezó con sus clases?

(a) 30 (b) 25 (c) 20 (d) 15 (e) 10

Problema 12. En la figura se muestra un tablero en forma de heptágono. El corazón y la flecha comienzan a moverse al mismo tiempo, desde las posiciones indicadas. En cada movimiento, la flecha cambia a la casilla que se ubica a 3 casillas de distancia en el sentido de las manecillas del reloj (es decir, en un primer movimiento la flecha llega a la casilla en que se encontraba el corazón). A mismo tiempo el corazón cambia a la casilla que se ubica a 4 casillas de distancia en sentido contrario a las manecillas del reloj. ¿En cuántos movimientos el corazón y la flecha se encuentran en la misma casilla por primera vez?



(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) Nunca se encuentran

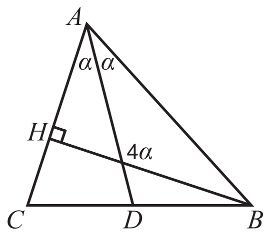
Problema 13. En cierta ciudad, la proporción de hombres adultos a mujeres adultas es 2 : 3 y la proporción de mujeres adultas a niños es 8 : 1. ¿Cuál es la proporción entre el número de adultos y el de niños?

(a) 40 : 3 (b) 10 : 3 (c) 13 : 1 (d) 12 : 1 (e) 5 : 1

Problema 14. Raquel se dio cuenta de que su edad, la de su hija y la de su nieta son tres números que cumplen que, al ser divididos por cualquier impar mayor a 1, el resultado nunca es entero. Al sumar las tres edades, Raquel obtiene 100 años. ¿Cuántos años tiene la nieta de Raquel?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 8 (e) 16

Problema 15. En el triángulo ABC de la figura, el segmento BH es una altura y los ángulos CAD y DAB miden lo mismo. El ángulo mayor entre AD y BH mide 4 veces lo que el ángulo DAB, así como se ha marcado en la figura. ¿Cuál es la medida del ángulo CAB?



(a) 30º (b) 45º (c) 60º (d) 75º (e) 90º

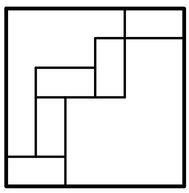
Problema 16. Seis hermanos comienzan a ducharse para ir a la escuela, a partir de las 7:00 de la mañana. En la casa hay dos baños en total y nunca hay más de una persona en el mismo baño. Cada uno de los hermanos estuvo en el baño durante 8, 10, 12, 17, 21 y 22 minutos, respectivamente. ¿A qué hora es lo más temprano que pudieron terminar de bañarse los seis hermanos?

(a) 7:45 (b) 7:46 (c) 7:47 (d) 7:48 (e) 7:50

Problema 17. Varios piratas se repartieron un cofre con monedas de oro de manera a cada uno le tocó la misma cantidad. Si hubiera habido cuatro piratas menos, a cada persona le habría tocado 10 monedas más. Si hubiera habido 50 monedas menos, a cada persona le hubieran tocado 5 monedas menos que en el reparto original. ¿Cuántas monedas se repartieron en total?

(a) 80 (b) 100 (c) 120 (d) 150 (e) 250

Problema 18. Cada uno de los lados del cuadrado que se muestra en la figura mide 24 cm. En su interior se dibujaron 5 rectángulos iguales. ¿Cuál es el área de cada uno de esos rectángulos?



(a) $32\,\text{cm}^2$ (b) $24\,\text{cm}^2$ (c) $18\,\text{cm}^2$ (d) $16\,\text{cm}^2$ (e) $12\,\text{cm}^2$

Problema 19. Brenda anotó en su cuaderno varios números enteros, todos diferentes. Exactamente dos de ellos eran pares y exactamente trece de ellos son divisibles por 13. Si M es el número más grande de la lista, ¿Cuál es el menor valor posible para M?

(a) 169 (b) 260 (c) 273 (d) 299 (e) 325

Problema 20. Héctor escribió, sin repetir, los números del 1 al 9 en las celdas de una cuadrícula de 3×3, de forma que cada celda contiene un dígito. Escribió los números 1, 2, 3 y 4 en las casillas que se muestran. Dos números se consideran **vecinos** si sus casillas comparten un lado. Después de llenar toda la cuadrícula, Héctor se dio cuenta de que la suma de todos los vecinos de 9 es 15. ¿Cuál es la suma de todos los vecinos de 8?

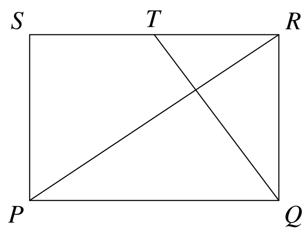
1		3
2		4

(a) 12 (b) 18 (c) 20 (d) 26 (e) 27

Problema 21. Octavio tiene 100 tarjetas numeradas del 1 al 100. ¿Cuál es la mayor cantidad de tarjetas que puede escoger de tal manera que el producto de las que escoja no sea múltiplo de 18?

(a) 5 (b) 11 (c) 17 (d) 68 (e) 90

Problema 22. En la figura, $PQRS$ es un rectángulo, T es el punto medio de RS y QT es perpendicular a la diagonal PR. ¿Cuál es el valor de $\frac{QR}{PQ}$?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{4}{5}$

Problema 23. María y Luisa compitieron resolviendo una lista de 100 problemas. Algunos problemas no fueron resueltos por ninguna pero otros los resolvieron las dos. Por cada problema resuelto, la primera en resolverlo obtuvo 4 puntos y, en caso que lo hubieran resuelto las dos, la segunda obtuvo sólo 1 punto. Si cada una de ellas resolvió 60 problemas de la lista y entre las dos lograron 312 puntos, ¿cuántos problemas resolvieron en común?

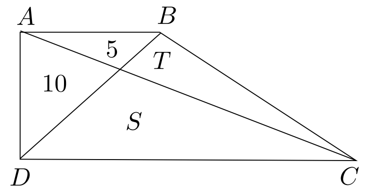
(a) 57 (b) 56 (c) 55 (d) 54 (e) 53

Problema 24. Al final de un día de ventas, Mariana y Ricardo juntaron el dinero que ganó cada uno y se lo repartieron en partes iguales. Haciendo esto, Ricardo perdió un 30 % del dinero que había ganado. ¿Qué porcentaje ganó Mariana, del dinero que había ganado originalmente?

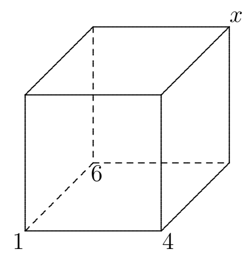
(a) 20 % (b) 25 % (c) 30 % (d) 70 % (e) 75 %

Problema 25. El cuadrilátero $ABCD$ tiene ángulos rectos solamente en los vértices A y D y está dividido en cuatro triángulos de áreas 10, 5 y S y T, como se indica en la figura. ¿Cuál es el área del cuadrilátero?

(a) 60 cm^2 (b) 45 cm^2 (c) 40 cm^2 (d) 35 cm^2 (e) 30 cm^2



Problema 26. Los vértices de un cubo se numeran del 1 al 8 de manera que el resultado de sumar los cuatro números de cada cara es el mismo para todas las caras. Se han colocado ya los números 1, 4 y 6 como se muestra en la figura. ¿Qué número va en el vértice marcado con x?



(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 8

Problema 27. Cada tres vértices de un cubo forman un triángulo. ¿Cuántos de esos triángulos no tienen todos sus vértices sobre una de las caras del cubo?

(a) 16 (b) 24 (c) 32 (d) 40 (e) 48

Problema 28. La báscula de mi mamá se descompuso. Si algo pesa menos de 1000 g, la báscula muestra correctamente su peso. Si algo pesa 1000 g o más, la báscula muestra cualquier número mayor que 1000 g. Tenemos 5 pesas con respectivos pesos A g, B g, C g, D g y E g. Todas las pesas son menores a 1000 g. Pesando algunas de ellas por pares, obtuve las siguientes cantidades: B+D=1200, C+E=2100, B+E=800, B+C=900 y A+E=600. ¿Cuál de las pesas es la más pesada?

(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Problema 29. En el bosque hay 20 duendes. Algunos son verdes, otros son amarillos y otros son morados. Se les hicieron 3 preguntas. Los verdes siempre dijeron la verdad, los morados siempre mintieron, y cada uno de los amarillos eligió entre mentir y decir la verdad al responder la primera pregunta y, a partir de ahí alternó entre verdad y mentira. La primera pregunta que se le hizo a cada uno fue "¿Eres verde?", a lo que 17 de ellos respondieron "Sí". La segunda pregunta fue "¿Eres amarillo?" y 12 de ellos respondieron "Sí". La tercera pregunta fue "¿Eres morado?" y 8 de ellos respondieron "Sí". ¿Cuántos duendes son amarillos?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 30. Dos polígonos regulares de lado 1 están pegados por un lado. Uno de los dos polígonos tiene 15 lados y el otro tiene n lados. Etiquetamos con A y B a los vértices del lado que comparten ambos polígonos, con C al otro vértice que es adyacente a B sobre el 15-ágono y con D al otro vértice que es adyacente a B en el otro polígono. Sabiendo que la distancia entre C y D es 1, ¿cuál es el valor de n?

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 16 (e) 18

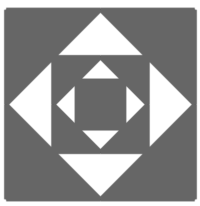
Problema 31. Un número x cumple que el $x\%$ de x es 1. ¿Cuánto vale x?

(a) 0.01 (b) 0.1 (c) 1 (d) 10 (e) 100

Problema 32. En una reunión, cada persona saludó al menos a un hombre y a una mujer. ¿Cuál es el mínimo número de personas que pudo haber en la reunión?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 33. Si el lado del cuadrado más grande mide 4, ¿cuánto mide el área de la región sombreada?

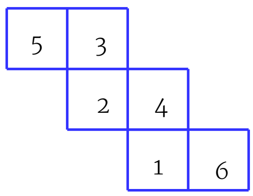


(a) 8 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 15

Problema 34. El joven Fernández tenía melones del mismo tamaño. Después de comerse un tercio de un melón se dio cuenta que un melón completo representaba el 60% de la cantidad de melón que le quedó. ¿Cuántos melones tenía originalmente el joven Fernández?

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 30 (e) 60

Problema 35. La figura representa un cubo desdoblado con las caras numeradas del 1 al 6. Para cada vértice del cubo se considera el producto de los números que aparecen en las tres caras que contienen al vértice. ¿Cuál es el mayor de todos esos productos?



(a) 60 (b) 72 (c) 90 (d) 120 (e) 216

Problema 36. Isabel escribe una lista de diez números. El primero es 5 y el tercero es 13. Además, cualquier número en la lista, excepto el primero y el último, es el promedio del número anterior a él con el número posterior a él. ¿Cuál es el último número en la lista?

(a) 40 (b) 41 (c) 42 (d) 43 (e) 44

Problema 37. Gerardo quiere formar en una fila a sus cinco alumnos: Carlos, Oriol, Paco, Valeria y Víctor. Lo único que quiere es que Valeria quede inmediatamente enfrente de Oriol. ¿De cuántas maneras los puede formar de modo que se cumpla la condición?

(a) 20 (b) 24 (c) 30 (d) 32 (e) 36

Problema 38. El promedio de 15 números es 20, mientras que el promedio de otros 20 números es 15. ¿Cuál es el promedio de los 35 números?

(a) $\frac{120}{7}$ (b) $\frac{60}{7}$ (c) 35 (d) 150 (e) 300

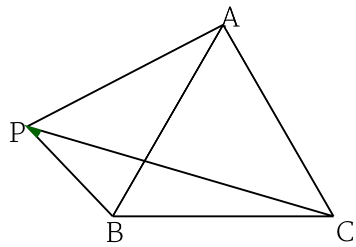
Problema 39. Se tienen 8 piezas de ajedrez: 2 torres, 2 alfiles, 2 caballos y 2 peones. De cada uno de los cuatro tipos de piezas, una es blanca y la otra negra. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las ocho piezas en una columna del tablero, de manera que no quede ninguna pieza en un cuadro de su color?

(a) 512 (b) 576 (c) 596 (d) 634 (e) 676

Problema 40. Un rectángulo de 217×2015 se cuadricula en cuadritos de 1×1. Dentro de este rectángulo se traza una de las diagonales. ¿Cuántos de los cuadritos en la cuadrícula tienen uno de sus vértices sobre la diagonal?

(a) 2 (b) 13 (c) 62 (d) 217 (e) 2015

Problema 41. En la siguiente figura ABC es un triángulo equilátero y P es un punto tal que $\angle BCP = 20°$ y $\angle CPA = 40°$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BPC$?



(a) 20° (b) 25° (c) 30° (d) 40° (e) 45°

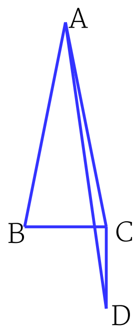
Problema 42. Los dígitos A, B y C cumplen la siguiente ecuación

$$(100A + 10B + C)(2A - B - C) = 2015$$

¿Cuánto vale A?

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 43. En la figura, $CD = BC = 3$, CD es perpendicular a BC, $AB = AC$ y el área del triángulo ABC es 5. ¿Cuál es el área del triángulo ACD?



(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{9}{2}$ (e) $\frac{9}{5}$

Problema 44. En un pizarrón están escritos los números del 100 al 200. Cada minuto, Pardo escoge dos números que estén en el pizarrón, los borra y escribe su suma. Pardo repite el proceso hasta que queda solo un número escrito en el pizarrón. ¿Cuál es este número?

(a) 4950 (b) 5050 (c) 12500 (d) 15150 (e) 20100

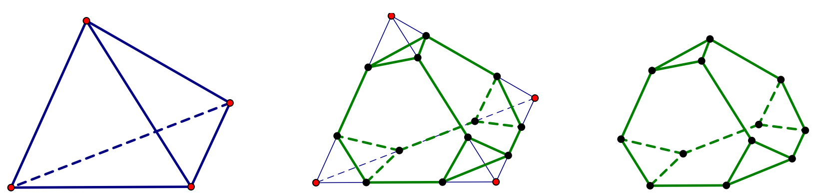
Problema 45. Zeus, Gustavo, Félix, Emanuel y Marcos tienen cuentas de internet. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos entre sí por internet, y ninguno de ellos tiene un amigo por internet fuera del grupo. Además, cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos por internet. ¿De cuántas maneras puede suceder esto?

(a) 2 (b) 6 (c) 12 (d) 24 (e) 36

En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Al final encontrarás las respuestas.

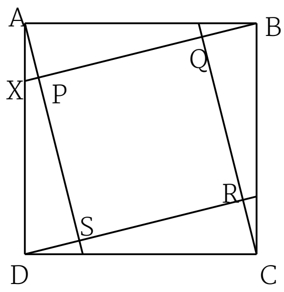
Problema 46. Las caras de un cubo de lado n se pintan de azul. Posteriormente el cubo se corta en n^3 cubitos de lado 1. Sabemos que después de haber cortado en cubitos, exactamente un séptimo de las caras están pintadas de color azul. ¿Cuál es el valor de n?

Problema 47. Un poliedro Q es obtenido a partir de un poliedro P de 36 aristas de la siguiente manera. Para cada vértice V de P se utiliza un plano para rebanar de P una pirámide que tiene como vértice a V. Los planos se intersectan en el exterior de P. ¿Cuántas aristas tiene Q? (En la figura se muestra un ejemplo de esta operación de poliedros, tomando como P al tetraedro, que tiene 6 aristas).



Problema 48. Los números p, q, r satisfacen las ecuaciones $p+q+r=26$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=31$. Encuentra el valor de $\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{r}+\frac{r}{q}+\frac{q}{p}$.

Problema 49. En la siguiente figura, tanto $ABCD$ como $PQRS$ son cuadrados. Si se sabe que $AX=9$ y $AB=40$. ¿Cuánto mide el área del cuadrado $PQRS$?



Problema 50. Se escriben de menor a mayor todos los números que se pueden formar revolviendo los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. ¿Cuál es el último de la primera mitad?

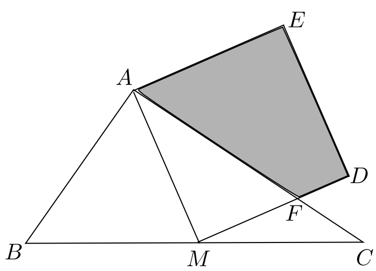
Problema 51. Los enteros positivos a, b, c cumplen la siguiente ecuación:

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{25}{19}$$

¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

Problema 52. Se tiene un conjunto X de 6 números enteros. Se sabe que de todas las posibles colecciones de 3 elementos distintos de X, exactamente la mitad tiene sus tres elementos pares. ¿Cuántos enteros pares hay en X?

Problema 53. En la figura se muestra un triángulo ABC en el que $AB = 6$, $AC = 8$ y $BC = 10$. Además M es el punto medio de BC, $AMDE$ es un cuadrado y F es el punto de intersección de MD con AC. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $AFDE$?



Problema 54. En la cuadrícula que se muestra aparecen escritos los números 1 y 19. Determinar de cuántas formas es posible poner números enteros en los cuadros vacíos si en cada renglón los números van en orden creciente de izquierda a derecha, en cada columna los números van en orden creciente de arriba a abajo, y se cumple que en cada tres cuadros consecutivos en el mismo renglón o en la misma columna, el número que aparece enmedio es el promedio de los otros dos.

1			
			19

Problema 55. Los vértices de un polígono regular de 160 lados están numerados en el sentido de las manecillas del reloj del 1 al 160. En un juego, Manuel debe escoger un vértice y ponerle una marca. Después seguirá marcando algunos vértices de acuerdo a la siguiente regla: Cada vez que marque un vértice con número par, girará en el sentido de las manecillas del reloj el mismo número de vértices que indique el vértice que acaba de marcar. Por ejemplo, si escoge el vértice 42, marcará éste, luego el 84, luego el 8, etc.). En caso de que en algún momento marque un vértice con número impar, entonces hará lo mismo que con el par, pero en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Irá marcando vértices hasta que llegue a un vértice ya marcado y ahí termina su juego. ¿Cuál es el máximo número de vértices que puede marcar?

Soluciones de los Problemas

Solución 1. Dos litros de agua equivalen a $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de la cubeta, así que la capacidad total de la cubeta es de 8 litros. La respuesta es (d).

Solución 2. El cuadrado debe tener 12 cm de lado, así que el rectángulo tiene medidas 6 cm$\times$24 cm y su perímetro es $2(6+24) = 60$ centímetros. La respuesta es (d).

Solución 3. En total son necesarios $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubos, así que hacen falta $27 - 7 = 20$ cubos. La respuesta es (a).

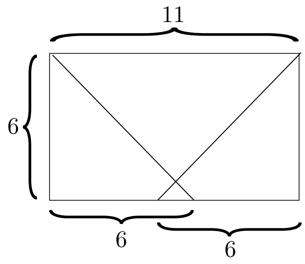
Solución 4. Los hermanos mayores se quedaron con el $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ de la bolsa, así que el hermano menor se quedo con la mitad. La respuesta es (e).

Solución 5. Tenemos que 11×111 es un factor común de todas las multiplicaciones, así que es suficiente con comparar $4 \times 7 = 28$, $5 \times 6 = 30$, $7 \times 4 = 28$, $8 \times 3 = 24$ y $9 \times 2 = 18$. La respuesta es (b).

Solución 6. El área total de los 5 círculos es de 5 cm^2, pero se han traslapado 4 veces, así que la superficie de la mesa que está cubierta es de $5 - 4(\frac{1}{8}) = \frac{9}{2}$ cm^2. La respuesta es (b).

Solución 7. A partir de la segunda calificación, cada calificación que se agrega contribuye en la mitad del resultado parcial. Entonces, si sólo fueran 3 calificaciones, la tercera contribuiría en $\frac{1}{2}$, si fueran cuatro, contribuiría en $\frac{1}{4}$ (pues la cuarta contribuiría en la mitad y la contribución de la tercera sería la mitad de su contribución anterior); como son 5, contribuye en $\frac{1}{8}$, o sea 12.5 %. La respuesta es (b).

Solución 8. Se forman dos triángulos isósceles de lado 6 que se traslapan como se muestra en la figura. Como el lado mide 11, el traslape mide 1.



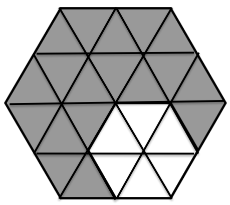
La respuesta es (a).

Solución 9. Tenemos que

$$\underbrace{111\cdots 11}_{2014}\times 101 = \underbrace{111\cdots 11}_{2014}\times 100 + \underbrace{111\cdots 11}_{2014} = \underbrace{111\cdots 11}_{2014}00 + \underbrace{111\cdots 11}_{2014}$$
$$= 11\underbrace{222\cdots 22}_{2012}11.$$

Entonces la suma de los dígitos es $2012 \times 2 + 4 = 4028$. La respuesta es (c).

Solución 10. Podemos dividir el hexágono en 24 triángulos iguales, como se muestra en la figura. Como el hexágono menor quedó cubierto por 6 de estos triángulos, el área del hexágono es igual a $4 \times 4 = 16\,\text{cm}^2$.



La respuesta es (c).

Solución 11. Cada dos semanas Diego tiene 3 clases más que Ana. La respuesta es (e).

Solución 12. Numeremos las casillas en el sentido de las manecillas del reloj de manera que la casills donde está la flecha tenga el 1. Como vemos en la siguiente tabla que representa la posiciones sucesivas de la flecha y el corazón, a partir del octavo movimiento todo se repite.

movimiento	1	2	3	4	5	6	7	8
$\leftarrow$	1	4	7	3	6	2	5	1
$\heartsuit$	4	7	3	6	2	5	1	4

La respuesta es (e).

Solución 13. Denotemos por H al número de hombres, por M al número de mujeres y por N al número de niños. Tenemos que $H = 2M/3 = (2/3) \times 8N = 16N/3$, de donde $H+M = (16N/3)+8N = (16+24)N/3 = 40N/3$. La respuesta es (a).

Solución 14. Las edades de Raquel, su hija y su nieta deben ser potencias de 2, así que debemos encontrar tres números del conjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ que sumen 100. La única posibilidad es $64 + 32 + 4$. La respuesta es (c).

Solución 15. Llamemos O a la intersección de AD y BH y β al ángulo HOA. Tenemos que $\beta = 180 - 4\alpha$. Además, fijándonos en el triángulo AOH tenemos que $\beta = 90 - \alpha$. Así, resulta que $180 - 4\alpha = 90 - \alpha$, de donde $\alpha = 30$. La respuesta es (c).

Solución 16. En total tardaron 90 minutos en bañarse, así que el baño que estuvo ocupado por más tiempo debió ser utilizado por 45 minutos o más. La menor suma mayor o igual a 45 que se puede conseguir con 8, 10, 12, 17, 21 y 22 es 46, por lo que esa es la menor cantidad de tiempo en la que pudieron terminar todos de bañarse. La respuesta es (b).

Solución 17. Como quitar 50 monedas del total sería lo mismo que quitarle 5 monedas a cada pirata, tenemos que hay $\frac{50}{5} = 10$ piratas. Si hubiera cuatro piratas menos quedarían 6 piratas, cada uno de los cuales recibiría 10 monedas más (60 en total), así que cada uno de esos cuatro piratas recibió $\frac{60}{4} = 15$ monedas. Como todos los piratas recibieron lo mismo, en total hay $10 \times 15 = 150$ monedas. La respuesta es (d).

Solución 18. Llamemos l al lado menor de un rectangulito y L a su lado mayor. Fijándonos en sentido horizontal, tenemos que $L + L - l + l + L = 24$, de donde $L = 8$. Fijándonos en sentido vertical, tenemos que $l + 8 + 8 + l = 24$, de donde $l = 4$. El área que buscamos es $l \times L = 4 \times 8 = 32\,\text{cm}^2$. La respuesta es (a).

Solución 19. La lista debe contener 13 múltiplos de 13, pero a lo más dos de ellos pueden ser pares, así que al menos 11 de ellos deben ser impares. La lista más pequeña es: 13×1, 13×2, 13×3, 13×4, 13×5, 13×7, 13×9, 13×11, 13×13, 13×15, 13×17, 13×19, $13 \times 21 = 273$. La respuesta es (c).

Solución 20. Si el 9 estuviera en la casilla central, la suma de sus vecinos sería $8 + 7 + 6 + 5 = 26$ y no cumpliría que la suma de sus vecinos es igual a 15. Por lo anterior, el 9 tiene que estar en alguno de los extremos y tener dos vecinos en las esquinas del cuadrado. La mayor suma que se puede obtener con números de las esquinas es $3 + 4 = 7$; como los vecinos de 9 suman 15, la única posibilidad es que esto suceda es que el 9 sea vecino de 3, 4 y 8. Luego, el 8 debe estar en la casilla central y sus vecinos son 5, 6, 7 y 9, que suman 27. La respuesta es (e).

Solución 21. Como $18 = 2 \times 3 \times 3$, en el caso de que en la lista hubiera dos múltiplos de 3 o un múltiplo de 9, Octavio tendría que evitar todos los pares (y su lista quedaría con a lo más 50 números). En el caso de que en la lista haya a lo más un múltiplo de 3 (que no sea un múltiplo de 9), lo máximo que podemos conseguir es una lista de $100 - 32 = 68$ números (dejando al 3 y a todos los números del 1 al 100 que no son múltiplos de 3, por ejemplo). La respuesta es (d).

Solución 22. Llamaremos O a la intersección entre TQ y RP. Como los triángulos OQR y RPQ son rectángulos, tenemos que $\angle TQR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle RPQ = 90^o$, de donde $\angle TQR = \angle RPQ$. Por lo anterior, como TQR y PRQ son triángulos rectángulos, resultan ser triángulos semejantes, así que $\frac{QR}{PQ} = \frac{TR}{QR} = \frac{PQ}{2QR}$, lo que implica que $\left(\frac{QR}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{2}$. La respuesta es (d).

Solución 23. Llamémosle k a la cantidad de problemas que ambas resolvieron. Por cada problema que ambas resuelven se suman 5 puntos a la cuenta total, así es que el total de puntos resulta de calcular $5k+4(60-k)+4(60-k) = 480-3k$. Luego, como $480 - 3k = 312$, tenemos $k = 56$. La respuesta es (b).

Solución 24. Sean m el dinero que aportó Mariana y r el que aportó Ricardo. como buscamos porcentajes, podemos suponer que $r = 100$ y tenemos que $\frac{m+100}{2} = 70$, de donde $m = 40$. La proporción que le tocó a Mariana es $\frac{70}{40} = 1.75$. La respuesta es (e).

Solución 25. Sea O el punto de intersección de AC y DB. Llamemos h y k a las respectivas alturas en O de AOB y de DOC. Tenemos que

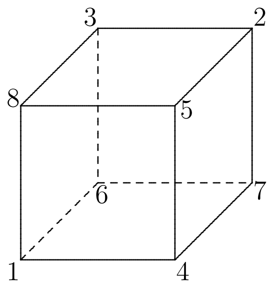
$$\frac{AB \cdot h}{2} = 5 = \frac{15}{3} = \frac{AB \cdot (h+k)}{6},$$

de donde $h + k = 3h$ y así $k = 2h$. Por otro lado, los triángulos ABO y CDO son semejantes, de donde $DC = 2AB$ y obtenemos que el área de BDC es

$$\frac{2AB \cdot 3h}{2} = 6\frac{AB \cdot h}{2} = 30.$$

La respuesta es (b).

Solución 26. Como $1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = 36$ y cada vértice pertenece a 3 caras, entonces la suma de todas las sumas de las caras es 3×36, de donde cada cara debe tener suma $\frac{3\times 36}{6} = 18$. Entonces el número que va en el otro vértice de la base es $18 - (1 + 4 + 6) = 7$. Los números que faltan por colocar son 2, 3, 5 y 8. Entonces a la cara lateral que tiene ya los números 4 y 7 le falta una suma de 7, lo cual sólo se logra con 2 y 5 (de entre los números restantes). A la cara posterior que tiene ya los números 6 y 7 le falta una suma de 5, lo cual se logra sólo con los números 2 y 3; entonces ya tenemos que en lugar de x va 2. La colocación completa es:



La respuesta es (a).

Solución 27. Cualquier elección de 3 vértices produce un triángulo. Como son 8 vértices, el número de posibilidades de escoger los tres vértices es $\frac{8\times7\times6}{3\times2}$. Ahora hay que restar los que se forman en las caras. En cada cara se forman 4 triángulos y, como son 6 caras, los que tenemos que restar son 24. La respuesta es (c).

Solución 28. Como $B+E$ y $B+C$ pesaron menos de 1000 gramos sabemos que los pesos obtenidos son correctos; juntando estos resultados obtenemos que $2B+(C+E)=1700$. Dado que $C+E\geq 1000$, tenemos que $B\leq 350$. Como $B+D\geq 1000$, tenemos que $D\geq 650$ (y por tanto $B<D$). De $A+E=600$ podemos concluir que A y E son menores que D. Finalmente, como $B+C=900$ y $B+D>1000$, podemos concluir que $C<D$. La respuesta es (d).

Solución 29. Cuando se pregunta "¿Eres morado?", los únicos que pueden responder "Sí" son los amarillos, así es que hay 8 duendes amarillos que dijeron una mentira en la primera y en la tercera pregunta. Como 17 duendes respondieron "Sí" cuando se preguntó "¿Eres verde?" y 8 duendes amarillos mintieron en ese caso, en total hay $17-8=9$ duendes verdes y morados. Entonces el número de duentes amarillos es $20-9=11$. La respuesta es (e).

Solución 30. Sea O el centro del 15-ágono y P el centro del n-ágono. El triángulo OAB es congruente a cualquier triángulo que se forme tomando como vértices a O y a los dos extremos de un lado del 15-ágono; como hay 15 triángulos de esos alrededor de O tenemos que el ángulo AOB mide $\frac{360^o}{15}=24^o$. Esos 15 triángulos son congruentes y así el ángulo ABC (dentro del 15-ágono) es igual a la suma de los ángulos ABO y BAO, que es igual a $180^o-24^o=156^o$. Por otro lado, el triángulo BCD es equilátero y entonces el ángulo ABD (dentro del n-ágono) mide $360^o - 60^o - 156^o = 144^o$. Como $PAB + PBA = ABD$, el ángulo APB mide $180^o - 144^o = 36^o$, así que debe haber $\frac{360}{36} = 10$ triángulos congruentes a APB alrededor de P. Por lo anterior, tenemos que $n = 10$. La respuesta es (a).

Solución 31. Dado que 1 es el $x\%$ de x, tenemos que $1 = x \cdot (\frac{x}{100})$. Despejando, obtenemos que $x = 10$. La respuesta es (d).

Solución 32. Notemos que si no hay mujeres en la reunión, entonces tampoco puede haber hombres (ya que si hubiera, estos no podrían saludar a una mujer) y por lo tanto ¡no hay reunión! Esto quiere decir que si M_1 es una mujer en la reunión, entonces M_1 saludó por lo menos a un hombre (llamémoslo H_1) y a una mujer (llamémosla M_2). Esto quiere decir que hay por lo menos 2 mujeres (M_1 y M_2) y un hombre (H_1). Ahora, H_1 tuvo que haber saludado a un hombre (al que llamaremos H_2). Esto quiere decir que en la reunión hay por lo menos 2 hombres (H_1 y H_2).

No es difícil ver que si en la reunión hay dos hombres y dos mujeres y todos saludan a todos, se cumplen las condiciones del problema. De esta forma, el mínimo número de personas que pudo haber en la reunión es 4. La respuesta es (c).

Solución 33. Notemos que, si tomamos un cuadrado de lado L, su área es L^2. Si sombreamos sus esquinas, cada dos esquinas forman un cuadrado de lado $\frac{L}{2}$. El área de este nuevo cuadrado es $\frac{L^2}{4}$. Como el cuadrado original tiene cuatro esquinas, el área de las 4 esquinas es $\frac{L^2}{2}$. Observando que las medidas de los tres cuadrados de la figura son 4, 2 y 1, tenemos que el área sombreada es $\frac{4^2}{2} + \frac{2^2}{2} + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$. La respuesta es (c).

Solución 34. Si un melón es el 60% de lo que le queda, entonces un tercio de melón es el 20% de lo que le queda. De aquí podemos deducir que entonces el 100% de lo que le queda son $\frac{5}{3}$ de melón. Como el jóven Fernández se había comido un tercio de melón, entonces originalmente tenía $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$ melones. La respuesta es (a).

Solución 35. El mayor producto que se puede obtener con tres números del 1 al 6 es $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, pero al armar el cubo estos números no coinciden en un vértice. El siguiente producto que se puede obtener es $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ (sustituimos el 4 por 3, que es lo mejor que se puede hacer). Como 6, 5 y 3 sí coinciden en una esquina, ese es el mayor producto que puedo conseguir. La respuesta es (c).

Solución 36. Las condiciones del problema nos dicen que el segundo número es el promedio del primer y tercer número. Es decir, el segundo número de la lista es $\frac{5+13}{2} = 9$. Ahora, el promedio del segundo número y el cuarto número es el tercer número. Esto quiere decir que el segundo número más el cuarto número es igual al doble del tercer número. Por lo tanto, 9 más el cuarto número es igual a $13 \times 2 = 26$. Es decir, el cuarto número es 17. Siguiendo este procedimiento, podemos ver que los números de la lista son $5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41$. Por lo tanto el último número es 41. La respuesta es (b).

Solución 37. Si Valeria debe de ir inmediatamente antes de Oriol, entonces Valeria nunca puede ir al final de la fila. Valeria puede entonces ser la primera, segunda, tercera o cuarta de la fila. Una vez que decidimos que lugar toma Valeria, el lugar de Oriol está determinado. Suponiendo que Valeria y Oriol ya están formados, entonces quedan 3 lugares en la fila que pueden ocupar Paco, Carlos y Víctor. Tenemos entonces ahora que saber de cuántas formas podemos formar a Paco, Carlos y Víctor en una fila. Como esto se puede hacer de 6 maneras diferentes, entonces Gerardo puede formar $6 \times 4 = 24$ filas con la condición dada. La respuesta es (b).

Solución 38. Llamemos $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ a los 15 números cuyo promedio es 20. Entonces

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}}{15} = 20,$$

y por lo tanto

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} = 300.$$

Llamemos ahora $b_1, b_2, \ldots, b_{20}$ a los 20 números cuyo promedio es 15. Entonces

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{20}}{20} = 15,$$

y por lo tanto

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{20} = 300.$$

El promedio de los 35 números es

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{15} + b_1 + b_2 + \ldots b_{20}}{35} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}}{35} + \frac{b_1 + b_2 + \ldots b_{20}}{35}$$

$$= \frac{300}{35} + \frac{300}{35} = \frac{600}{35} = \frac{120}{7}.$$

La respuesta es (a).

Solución 39. Una columna del tablero de ajedréz tiene 8 cuadros, 4 negros y 4 blancos. Entonces, tenemos que acomodar 1 torre, 1 alfil, 1 caballo y 1 peón blancos en los 4 cuadros negros. Esto se puede hacer de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

maneras. Por cada una de estas maneras, tenemos que acomodar 1 torre, 1 alfil, 1 caballo y 1 peón negros en los 4 cuadros blancos. Los cual se puede hacer de nuevo de 24 maneras. Por lo tanto hay $24 \times 24 = 576$ maneras de acomodar las piezas. La respuesta es (b).

Solución 40. Notemos que $217 = 7 \times 31$ y que $2015 = 5 \times 13 \times 31$. Entonces podemos dividir al rectángulo de 217×2015 en 31×31 rectángulos de 7×65 cada uno. Dado que 7 y 65 son primos relativos, una diagonal de un rectángulo con estas dimensiones toca únicamente los dos vértices opuestos del rectángulo. Entonces, una diagonal del rectángulo de 217×2015 pasa por los vértices opuestos de 31 rectángulos de 7×65. Por lo tanto hay 62 cuadritos que tienen uno de sus vértices sobre la diagonal. La respuesta es (c).

Solución 41. Dado que $\angle BCP = 20°$ y el triángulo ABC es equilátero, el ángulo $\angle PCA = 40°$. Por lo tanto el triángulo APC es isósceles, con $AP = AC$. Como además $AB = AC$, tenemos que el triángulo APB también es isósceles y $\angle APB = \angle PBA$. Entonces $\angle BPC + 40° = \angle PBA$.

Llamemos ahora X a la intersección de AB y PC. Como los ángulos internos del triángulo AXC suman $180°$ y sabemos que $\angle XAC = 60°$ y $\angle ACX = 40°$, entonces $\angle CXA = 80°$.

Finalmente consideremos el triángulo PBX. Tenemos que $180° = \angle PBX + \angle BXP + \angle XPB = \angle PBA + 80° + \angle BPC = \angle BPC + 40° + 80° + \angle BPC = 2\angle BPC + 120°$. Por lo tanto $\angle BPC = 30°$. La respuesta es (c).

Solución 42. Como A, B y C son dígitos, entonces $100A + 10B + C < 1000$. Ahora, si $A = 0$, entonces $2A - B - C$ sería negativo, lo cual no puede pasar. Por lo tanto $A > 0$ y entonces $100A + 10B + C > 99$. Es decir, $100A + 10B + C$ es un número de tres dígitos. Notemos que $2015 = 5 \times 13 \times 31 = 5 \times 403 = 13 \times 155 = 31 \times 65$. Esto implica que tenemos dos opciones: ya sea que $100A + 10B + C = 155$ y $2A - B - C = 13$ o que $100A + 10B + C = 403$ y $2A - B - C = 5$. En el primer caso $A = 1$, $B = 5$, $C = 5$ y entonces $2A - B - C = 2 - 5 - 5 = -8 \neq 13$. En el segundo caso $A = 4$, $B = 0$ y $C = 3$ y entonces $2A - B - C = 8 - 0 - 3 = 5$. Por lo tanto $A = 4$. La respuesta es (c).

Solución 43. Sea E el pie de la altura del triángulo ABC desde A. Como $AB = AC$, entonces $BE = EC = \frac{3}{2}$. Trazemos ahora la altura, desde A, del triángulo ACD y llamemos F al pie de dicha altura. Como $AF \perp DC$ y $DC \perp BC$, entonces $AF \parallel EC$. Además $AE \parallel CF$ lo que implica que $AFCE$ es un paralelogramo (de hecho, un rectángulo) y entonces $AF = CE = \frac{3}{2}$. El triángulo ACD tiene base CD y altura AF, por lo tanto su área es $\frac{3 \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}$. La respuesta es (b).

Solución 44. Notemos que la suma de todos los números que están escritos en el pizarrón nunca cambia, pues en cada paso los números borrados son sustituidos por la suma de éstos. Por lo tanto, cuando queda un sólo número éste tiene que ser igual a la suma de todos los números con los que empezamos. Esto es, el último número que queda escrito es $100+101+\ldots+200 = 15150$. La respuesta es (d).

Solución 45. Representemos esto con una gráfica en donde los vértices son los cinco chicos y las aristas representan que los chicos son amigos. Entonces en esta gráfica todos los vértices tienen el mismo número de aristas incidentes a ellos y ese número debe de ser menor que 4 (dado que nos dicen que algunos de ellos, pero no todos son amigos). Si el número de aristas en cada vértice fuera 1, habría alguno de los chicos que no tiene amigos, lo cual no pasa. Entonces, cada chico tiene 2 o 3 amigos. Si tuviera 3 amigos, entonces el número de aristas de la gráfica sería $\frac{3\times 5}{2}$, lo cual no es un entero y por lo tanto no puede ocurrir. Esto quiere decir que cada chico tiene exactamente dos amigos y por lo tanto la gráfica es un ciclo. Por lo tanto hay $\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{5\times 2} = 12$ formas de hacer esto. La respuesta es (c).

Solución 46. Después de cortar los cubitos, las caras que están pintadas de azul son únicamente las caras que estaban en el exterior del cubo. Cada cara del cubo grande queda dividida en n^2 cubitos. Como el cubo tiene 6 caras, el número de caras pintadas de azul es $6n^2$. Ahora, al cortar el cubo en cubitos tenemos n^3 cubitos tal que cada uno tiene 6 caras. Por lo tanto el total de caras de los cubitos es $6n^3$. Como un séptimo de las caras están pintadas de azul, entonces $\frac{6n^3}{7} = 6n^2$, de donde obtenemos que $n = 7$.

Solución 47. Notemos que los vértices del nuevo poliedro están todos en las aristas del poliedro original. De hecho, por cada arista del poliedro original tenemos 2 vértices del nuevo poliedro. Además, en el nuevo poliedro cada vértice tiene 3 aristas: dos por las dos caras en las que estaba la arista en la que está el vértice y otra por la arista original. Entonces, si A es el número de aristas del poliedro original, el nuevo poliedro tiene $2A$ vértices y por lo tanto $\frac{3\times 2A}{2} = 3A$ aristas. Por lo tanto si el poliedro P tiene 36 aristas, el poliedro Q tiene 108 aristas.

Solución 48. Empezemos por notar que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 31$ implica que $qr+rp+pq = 31pqr$. Entonces,

$$\frac{pq+pr}{pqr} = 31 - \frac{qr}{pqr}, \quad \frac{qr+qp}{pqr} = 31 - \frac{pr}{pqr}, \quad \frac{rp+rq}{pqr} = 31 - \frac{pq}{pqr}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{r}+\frac{r}{q}+\frac{q}{p} &= \frac{p^2r+q^2p+r^2q+p^2q+r^2p+q^2r}{pqr} \\ &= p\frac{pr+pq}{pqr}+q\frac{qr+pq}{pqr}+r\frac{pr+rq}{pqr} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p(31-\frac{qr}{pqr})+q(31-\frac{pr}{pqr})+r(31-\frac{pq}{pqr})\\
&= 31(p+q+r)-3=31\times 26-3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{r}+\frac{r}{q}+\frac{q}{p}=803$.

Solución 49. Sea O el centro del cuadrado $ABCD$. Entonces la rotación de $90°$ en O manda la arista AB en la arista BC y la línea por P y Q a la línea por Q y R. Esto implica que $AP=BQ$. Por otra parte, como el triángulo AXB es rectángulo con $AX=9$ y $AB=40$, por el Teorema de Pitágoras vemos que $BX=41$. Además, como AP es perpendicular a PB, entonces los triángulos ABX y PAX son semejantes. Por lo tanto $\frac{AB}{PA}=\frac{BX}{AX}=\frac{AX}{PX}$, lo que implica que $\frac{40}{PA}=\frac{41}{9}=\frac{9}{PX}$. Esto nos da que $PX=\frac{81}{41}$ y $PA=\frac{360}{41}$. Finalmente tenemos que el área del cuadrado $PQRS$ es PQ^2, por lo que encontraremos PQ. Tenemos que $PQ=BX-PX-BQ=41-PX-PA=41-\frac{81}{41}-\frac{360}{41}=\frac{1240}{41}$. Entonces el área del cuadrado es $(\frac{1240}{41})^2$.

Solución 50. Hay la misma cantidad de números que empiezan con cada uno de los números del 1 al 7 (son 6!). Como 4 está a la mitad entre 1 y 7, el número buscado empieza con 4. Ahora, de los números que empiezan con 4, la mitad siguen con 1, 2 o 3, y la otra mitad con 5, 6 o 7, así que el número que buscamos sigue con 3. Entonces los números que empiezan con 43 son los últimos de la primera mitad y el número que buscamos es 4376521.

Solución 51. Tenemos lo siguiente:

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{25}{19}=1+\frac{6}{19}.$$

Entonces a es la parte entera de $\frac{25}{19}$, así que $a=1$. Además

$$\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{6}{19},$$

de donde

$$b+\frac{1}{c}=\frac{19}{6}=3+\frac{1}{6}.$$

Otra vez, de aquí deducimos que $b=3$ y también que $c=6$. Por lo tanto $a+b+c=10$.

Solución 52. Digamos que p es la cantidad de pares en X. La cantidad de subconjuntos de X formada por 3 pares es $\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}$, y la cantidad total de suconjuntos de X con 3 elementos es $\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}$. Entonces p debe satisfacer

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{2}.$$

El número 5 debe desaparecer del denominador al simplificar, así que alguno de p, $p-1$ o $p-2$ debe ser 5. Es claro que p no puede ser 6. Para $p=5$ tenemos

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{6\cdot 5\cdot 4} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 5\cdot 4} = \frac{1}{2},$$

como queríamos.

Solución 53. Como $10^2 = 6^2 + 8^2$, el triángulo ABC satisface el teorema de Pitágoras, así que el ángulo en A es recto y entonces M es el centro de la circunferencia circunscrita, por lo que tenemos que $AM = MC$. De aquí concluimos que el triángulo AMC es isósceles, lo que nos dice que $\angle MAC = \angle MCA$ y así, los triángulos ABC y MFA son semejantes. Esto implica que

$$\frac{6}{8} = \frac{AB}{AC} = \frac{MF}{MA} = \frac{MF}{5},$$

y de aquí que $MF = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$. Como el área de la región sombreada se obtiene restando el área del triángulo AMF de la del cuadrado $AMDE$, tenemos que el resultado es

$$25 - \frac{5}{2}\frac{15}{4} = 25\left(1 - \frac{3}{8}\right) = 25\cdot\frac{5}{8} = \frac{125}{8}.$$

Solución 54. Si escribimos tres números l, m y n en orden creciente de forma que $m = \frac{l+n}{2}$, tenemos que m cumple que $m - l = n - m$. Así, tenemos que, en cada renglón y en cada columna, la diferencia de dos números consecutivos debe ser una constante (posiblemente distintas para distintos renglones o columnas). Sean a, b, c y d las respectivas diferencias de dos números en cuadros consecutivos del primer renglón, la última columna, la primera columna y el último renglón. Entonces el borde de la cuadrícula queda como indica la figura.

Tenemos entonces que $19 = 1 + 3a + 3b$, de donde $a + b = 6$ y, análogamente, $c + d = 6$. Observemos también que los dos números extremos de cada renglón y de cada columna deben diferir por un múltiplo de 3 (pues uno se obtiene sumando la misma constante 3 veces al otro).

1	$1+a$	$1+2a$	$1+3a$
$1+c$			$1+3a+b$
$1+2c$			$1+3a+2b$
$1+3c$	$1+3c+d$	$1+3c+2d$	$1+3a+3b$ 19 $1+3c+3d$

En particular, eso ocurre en la segunda columna, es decir, $1+a$ y $1+3c+d$ difieren por un múltiplo de 3, así que $a-d$ debe ser también múltiplo de 3.

Para contar los posibles casos, supongamos que $a \geq c$ (los otros casos se obtendrán reflejando con respecto a la diagonal, es decir, invirtiendo el papel de (a, b) con el de (c, d)).

La condición de que los números van en orden creciente en cada renglón de izquierda a derecha y en cada columna de arriba a abajo nos dice que los números a, b, c, d son todos positivos. Las posibilidades de (a, b, c, d) que cumplen, $a \geq c$, $a+b=6=c+d$ y $a-d$ múltiplo de 3 son:

$$(5,1,1,5),(5,1,4,2),(4,2,2,4),(3,3,3,3),(2,4,1,5)$$

En la figura se muestra cómo construir la cuadrícula en cada caso.

1	6	11	16
2	7	12	17
3	8	13	18
4	9	14	19

1	6	11	16
5	9	13	17
9	12	15	18
13	15	17	19

1	5	9	13
3	7	11	15
5	9	13	17
7	11	15	19

1	4	7	10
4	7	10	13
7	10	13	16
10	13	16	19

1	3	5	7
2	5	8	11
3	7	11	15
4	9	14	19

Hasta aquí tenemos 5 casos. Al invertir el papel de (a, b) con el de (c, d) obtenemos otros 4:

$$(1,5,5,1),(4,2,5,1),(2,4,4,2),(1,5,2,4)$$

para un total de 9.

Solución 55. Observemos que si marca un vértice impar, entonces su siguiente marca será en el 160 y el juego terminará porque volverá a llegar al 160.

Ahora supongamos que escoge el vértice con número 2. Entonces marcará los 8 vértices siguientes: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 y 96, puesto que $256 - 160 = 96$ y $96 \cdot 2 - 160 = 192 - 160 = 32$.

Veamos ahora que es imposible que marque más de 8. Supongamos que escoge el vértice $2a$ (con $a \leq 80$). Los vértices que, si no repitiera, iría marcando serían los residuos de la división entre 160 de los números: $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, $32a$, $64a$. $128a$, $96a$ y su siguiente paso sería al $32a$, que ya habría estado marcado.

Concentrado de Respuestas

1. (d)	15. (c)	29. (e)	43. (b)
2. (d)	16. (b)	30. (a)	44. (d)
3. (a)	17. (d)	31. (d)	45. (c)
4. (e)	18. (a)	32. (c)	46. 7
5. (b)	19. (c)	33. (c)	47. 803
6. (b)	20. (e)	34. (a)	48. 108
7. (b)	21. (d)	35. (c)	49. $(\frac{1240}{41})^2$
8. (a)	22. (d)	36. (b)	50. 4376521
9. (c)	23. (b)	37. (b)	51. 10
10. (c)	24. (e)	38. (a)	52. 5
11. (e)	25. (b)	39. (b)	53. $\frac{125}{8}$
12. (e)	26. (a)	40. (c)	54. 9
13. (a)	27. (c)	41. (c)	55. 8
14. (c)	28. (d)	42. (c)	

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
México, Distrito Federal
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: `omm@fciencias.unam.mx`
Sitio Web: `http://www.ommenlinea.org/`

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

José Antonio Gómez Ortega
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

Irving Daniel Calderón Camacho

Fernando Campos García

José Alfredo Cobián Campos

Luis Cruz Romo

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Héctor Flores Cantú

Luis Eduardo García Hernández

Luis Miguel García Velázquez

María Eugenia Guzmán Flores

Jesús Jerónimo Castro

Leonardo Martínez Sandoval

Daniel Perales Anaya

María Luisa Pérez Seguí

Miguel Raggi Pérez

Olga Rivera Bobadilla

Julio Rodríguez Hernández

Carlos Jacob Rubio Barrios

David Guadalupe Torres Flores

Rogelio Valdez Delgado

Rita Vázquez Padilla

Hugo Villanueva Méndez.