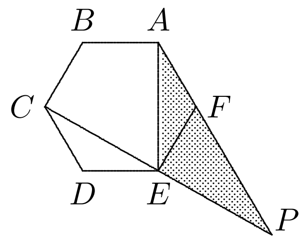
EXAMEN SEMIFINAL DE LA
15a OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Tiempo límite: 4 horas.
Escribe todos los razonamientos.
No puedes usar calculadora.
Las soluciones de problemas distintos deben quedar en hojas distintas.
Puedes preguntar por escrito las dudas que tengas sobre los enunciados de las preguntas del examen.

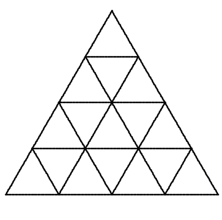
1. En una fiesta cada persona saludó a exactamente otras tres personas.
(i) Explica por qué es imposible que a la fiesta hayan asistido exactamente 2001 personas.
(ii) Si hubo en total 123 saludos, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

2. Se tienen 6 números enteros A, B, C, D, E y F que cumplen $C = A \times B$, $D = B \times C$, $E = C \times D$ y $F = D \times E$ (es decir, a partir del tercero, cada uno es el producto de los dos anteriores). Si sabemos que $A = 2$ y que $F = 6\,075\,000$, determina B, C, D y E.

3. El hexágono regular $ABCDEF$ de la figura tiene área 2001 y P es la intersección de las rectas AF y CE. Calcula el área del triángulo AEP.

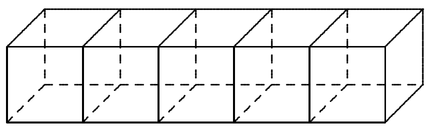


4. Para un entero $n \geq 2$, un triángulo equilátero de lado n se divide en n^2 triángulos equiláteros de lado 1 como se ilustra en la figura (para $n = 4$). Decimos que dos triangulitos de éstos son *vecinos* si comparten ya sea un lado o un vértice. Se quiere escribir los números del 1 al n^2 en los triangulitos (uno en cada triangulito) de tal manera que números que estén escritos en triangulitos vecinos no tengan el mismo residuo al dividirlos entre 5. ¿Para qué valores de n es esto posible?



5. Una rueda tiene a su alrededor 128 casillas numeradas en forma consecutiva del 1 al 128. Una pulga va saltando de una casilla a otra siguiendo la siguiente regla: Cuando está sobre la casilla con número N puede saltar únicamente a cualquiera de las dos casillas que están separadas N casillas de esa misma (por ejemplo, cuando está en la casilla 3, sus dos posibilidades de salto son a la casilla 6 o a la casilla 128). Determina todas las casillas donde puede haber iniciado sus saltos la pulga de tal manera que, sin importar cómo haya ido saltando, al terminar su quinto salto se puede asegurar que está en la casilla 128 (tal vez no por primera vez).

6. Con 125 cubitos de lado 1 se forma un cubo grande de lado 5. Muestra una manera de poner en cada cubito un número entero de tal forma que todas las sumas por *filas* (ve la descripción aquí abajo) sean iguales pero no todos los 125 números sean iguales.
Aclaraciones:
(a) Vas a escribir 125 números en total. Puedes repetir números, pero entre los 125 debe haber al menos dos distintos.
(b) Se considera *fila* cualquier hilera de 5 cubitos alineados que lleve una dirección paralela a alguno de los lados del cubo. En otras palabras, hay en total 75 filas; 25 de ellas llevan la dirección adelante-atrás, otras 25 van en dirección izquierda-derecha y otras 25 llevan dirección arriba-abajo. En la figura se ilustra una fila en dirección izquierda-derecha.
(c) Escribe tu respuesta poniendo 5 cuadrículas de 5×5 de manera que cada cuadrícula represente un "piso" del cubo.



7. Encuentra todos los enteros positivos menores que 2001 que son iguales a tres veces la suma de sus cifras.

8. En la figura, los puntos A, P, Q y R están sobre la circunferencia con centro C; $ABCD$ es un cuadrado; la recta PR pasa por B y D; la recta QR pasa por C. Determina el ángulo $\angle PQR$.